SONLU ŞEKİL DEĞİŞTİREBİLEN KISITLI TERMOELASTİK CİSİMLERDE DALGA YAYILMASI VE KAYMA BANDI OLUŞUMU

BAHADIR ALYAVUZ

DOKTORA TEZİ

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EKİM 2008

ANKARA

Bahadır ALYAVUZ tarafından hazırlanan SONLU ŞEKİL DEĞİŞTİREBİLEN KISITLI TERMOELASTİK CİSİMLERDE DALGA YAYILMASI VE KAYMA BANDI OLUŞUMU adlı bu tezin Doktora tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Tekin GÜLTOP

Tez danışmanı, İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalında Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. MEHMET EMİN TUNA

Mimarlık Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Prof. Dr. Tekin GÜLTOP

İnşaat Müh. Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Prof. Dr. MEHMET UTKU

İnşaat Müh. Anabilim Dalı, O.D.T.Ü

Prof. Dr. MÜFİT GÜLGEÇ

Makina Müh. Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Prof. Dr. YUSUF ORÇAN

Mühendislik Bilimleri, O.D.T.Ü

Tarih: 30/10/2008

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Doktora derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Nail ÜNSAL ....

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Bahadır ALYAVUZ

SONLU ŞEKİL DEĞİŞTİREBİLEN KISITLI TERMOELASTİK CİSİMLERDE DALGA YAYILMASI VE KAYMA BANDI OLUŞUMU

(Doktora Tezi)

Bahadır ALYAVUZ

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Kasım 2008

ÖZET

Kısıtlı termoelastik ortamda zayıf şok dalgası yayılma hızları ve kayma bandı oluşumu incelenmiştir. Ele alınan ortam bazı deformasyon sınırlamaları bulunan sıkıştırılabilir ortamdır. Bu deformasyon sınırlamaları sıcaklığa bağlı uzama ve saf mekanik uzamazlık kısıtıdır. Zayıf şok dalgalarının hareket denklemi tekillik yüzeyleri teorisi kullanılarak elde edilmiştir. Kısıtlı termoelastik malzemelerin bünye denklemleri, kısıtlı ve kısıtsız kısımların toplamı olarak yazılmıştır. Zayıf şok dalga eşiği üzerindeki bazı değişkenlerin sıçrama ifadeleri, bu değişkenlerin Taylor serisi açılımı kullanılarak yazılmıştır. Termoelastik ortamda zayıf şok dalgası yayılma şartı Duhamel – Neumann formunda bir şekil değiştirme fonksiyonu kullanılarak elde edilmiştir. Oluşturulan özdeğer probleminin çözümü zayıf şok dalgalarının yayılma hızlarını vermektedir. Zayıf şok dalgası yayılma hızları bazı özel deformasyon durumları için elde edilmiştir. Kayma bandı oluşumu ve kritik uzama oranları tek eksenli, iki eksenli ve üç eksenli çekme durumları için bulunmuştur.

Bilim Kodu : 911.1.127
Anahtar Kelimeler : Zayıf şok dalgası, tekillik yüzeyi, termomekanik kısıt, termoelastisite, kayma bandı
Sayfa Adedi : 161
Tez Yöneticisi : Prof. Dr. Tekin GÜLTOP

WAVE PROPAGATION AND SHEAR BAND FORMATION IN FINITE DEFORMABLE CONSTRAINED THERMOELASTIC SOLIDS

(Ph.D. Thesis)

Bahadır ALYAVUZ

GAZI UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

November 2008

ABSTRACT

Linear weak shock wave propagation and the existence of shear bands are examined in finitely deformed constrained thermoelastic solids. We consider a compressible solid with certain type of internal constraints. The specific internal constraint cases of temperature dependent extensibility and the purely mechanical inextensibility are considered separately. The equation of motion of weak shock waves is recovered by using the theory of singular surfaces. The constitutive equations of constrained materials are written as the summation of constrained and unconstrained counterparts of the relevant quantities. The jumps of certain field variables across the shock wave front are obtained by using Taylor series expansions of them. The propagation condition of shock waves in a thermoelastic solid is obtained by using the strain-energy function corresponding to Duhamel-Neumann expression. The solution of resulting eigenvalue problem yield the propagation speeds of weak shock waves. The propagation speeds of weak shock waves are determined for particular state of deformations. Formation of shear bands and the magnitudes of critical stretches are obtained for the deformation states of uniaxial, biaxial extension and for uniform dilation.

Science Code : 911.1.127
Key Words : Weak shock waves, singular surfaces, thermomechanical constraint, thermoelasticity, shear band
Page Number : 161
Adviser : Prof. Dr. Tekin GÜLTOP

TEŞEKKÜR

Doktora çalışmalarım sırasında verdiği destek ve kıymetli yönlendirmeleri için değerli hocam ve tez danışmanım Prof. Dr. Tekin GÜLTOP'a sonsuz teşekkür ederim.

Desteği için sevgili eşim Mehtap AYTAÇ ALYAVUZ'a, eğitimime gösterdikleri önem ve verdikleri destekten dolayı aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

Sayfa

Sayfa

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge **Sayfa**

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil **Sayfa**

Şekil **Sayfa**

Şekil **Sayfa**

Şekil **Sayfa**

Şekil **Sayfa**

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
$\mathbf{A}$	Referans koordinatlarında ivme vektörü
$\mathbf{B}$	Sol Cauchy – Green deformasyon tansörü
c_v	Özgül ısı
$\mathbf{C}$	Sağ Cauchy – Green deformasyon tansörü
e	Birim kütledeki iç enerji yoğunluğu
$\mathbf{e}$	Kısıtlama doğrultusunda birim vektör
$\mathbf{E}$	Lagrange birim şekil değiştirme tansörü
E	Toplam iç enerji
$\mathbf{f}$	Kütle kuvveti
$\mathbf{F}$	Deformasyon gradyan tansörü
h	İç ısı enerjisi kaynağı
$\mathbf{I}$	Birim tansör
J	Jacobian
K	Toplam kinetik enerji
$\mathbf{n}$	Uzay koordinatlarında yüzey birim normal vektörü
$\mathbf{N}$	Referans koordinatlarında yüzey birim normal vektörü
p	Lagrange çarpanı
$\mathbf{P}$	İkinci Piola – Kirchhoff gerilme tansörü
Q	Ortama dışarıdan sağlanan ısı enerjisi
$\mathbf{Q}$	Akustik tansör
$\mathbf{q}$	Isı akısı vektörü
$\mathbf{s}$	Şok tekillik vektörü
t	Zaman
$\mathbf{T}$	Birinci Piola – Kirchhoff gerilme tansörü
U_{N}	Dalga yayılma hızı

Simgeler	**Açıklama**
$\mathbf{U}$	Referans koordinatlarında yer değiştirme vektörü
$\mathbf{V}$	Referans koordinatlarında hız vektörü
W	Gerilme potansiyel fonksiyonu
W	Birim zamanda yapılan iş
$\mathbf{x}$	Maddesel noktanın uzaysal konum vektörü
$\mathbf{X}$	Maddesel noktanın referans konum vektörü
β_0	Hacimsel ısıl genleşme katsayısı
δ	Kronecker deltası
$\delta_{\mathbf{e}}$	**e** vektörü doğrulutusunda uzama oranı
η	Entropi
κ_T	İzotermal elastik hacim modülü
λ	Lamé sabiti
μ	Lamé sabiti
ρ	Yoğunluk
σ	Uzay koordinatlarında tekillik yüzeyi
Σ	Referans koordinatlarında tekillik yüzeyi
$\boldsymbol{\sigma}$	Cauchy gerilme tansörü
θ	Mutlak sıcaklık
ϕ	Kısıt fonksiyonu
ψ	Helmholtz serbest enerji fonksiyonu

1. GİRİŞ

Sürekli ortam içerisinde bir bölgede gerçekleşen denge durumundan sapmanın ortamı oluşturan maddesel noktalar aracılığıyla ilerlemesi olayı *mekanik dalga yayılması* olarak tanımlanmaktadır. Oluşan etki, enerjinin maddesel noktalar aracılığıyla aktarılması şeklinde ve ortam içerisinde sonlu bir hızla yayılır. Pek çok dalga türü için, dalganın içinde yayılabileceği bir madde gereklidir. Ses ve basınç dalgaları için, Love ve Rayleigh dalgaları gibi sismik dalgalar için enerjiyi iletebilecekleri katı veya akışkan bir ortam gerekirken, düşük frekanslı radyo dalgalarından görünür ışığa, X ve gama dalgalarına kadar çeşitli elektromanyetik dalgalar boşluk ortamında da yayılırlar [1].

Küçük veya sonlu deformasyonların oluştuğu dalga hareketi üzerine çok sayıda çalışma yapılmış ve konu çeşitli yönlerden ele alınarak önemli ölçüde aydınlatılmıştır. Elastik katılarda dalga yayılması üzerine yapılan çalışmalar, 19. yy. ortalarına kadar kabul görmüş bir yaklaşım olan ve ışığın elastik bir eter içerisinde ilerleyen dalga olduğunu söyleyen düşünceyle artmıştır. Bu görüş Cauchy ve Poisson gibi büyük matematikçiler tarafından da destek bulmuş ve Elastisite Teorisi'nin gelişimine katkı sağlamıştır [2]. 19. yy. sonlarında elastik katılarda dalga yayılmasına ilgi, yeni dalga tiplerinin literatüre kazandırılmasıyla artmıştır. Bu zaman diliminde Rayleigh, Lamb ve Love'un katkıları, sürekli ortamın sınırlarında veya farklı ortamların ara yüzeylerinde oluşan dalgalar ile görülmektedir. Rayleigh yüzey dalgaları, sismik enerjinin % 75'ini taşıyan deprem dalgaları olarak bilinmektedir. Sismoloji alanında, deprem olayında daha net bilgi sahibi olabilmek için elastik dalga yayılması konusu, aktif bir çalışma alanı olarak kalmıştır. Elastik dalga yayılması problemi uygulamalı matematik, elektromanyetik ve akustik içerisinde de yerini almıştır. Doğrusal dalga teorilerinde 19. yy. matematiğinin analitik teknikleri (*değişkenlerin ayrıştırılması, Fourier serileri, Laplace dönüşümü gibi*) kullanıla gelmiştir.

20. yy. ve doğrusal olmayan dalgalara geldiğimizde karşımıza şok dalgaları, hiperbolik sistemler, doğrusal olmayan gaz dinamiği, doğrusal olmayan su dalgaları,

kimyasal ve elektrokimyasal dalgalar çıkmaktadır. Yüksek hızlı çarpışmalar ve patlamalar sonucunda oluşan büyük genlikli dalgalar, lineer elastisite kabullerinin dışında kalmakta, malzeme davranışını ifade eden denklemler doğrusal olmaktan çıkmaktadır. Oluşacak şok dalgaları, sürekli ortamın basıncında, yoğunluğunda ve maddesel noktaların hızlarında ani sıçramalar gerçekleştirecek şekilde yayılır.

Bu sıçramaların ortamda yayılması problemi, tekillik yüzeyleri teorisi kullanılarak modellenebilir. Bu teoriye göre, ortamda sürekli olan bir fonksiyonun değerinde sıçramanın olduğu bir yüzey bulunur. Sürekli ortamda sonlu bir hızda ilerleyen bu yüzey dalga olarak adlandırılır [3-5]. Tekillik yüzeyleri, süreksiz parametrenin kendisinde sonlu bir sıçrama olduğu durumda sıfırıncı mertebeden, parametrenin birinci ve ikinci zaman türevlerinde sıçrama olduğu durumlarda ise sırasıyla birinci ve ikinci mertebeden tekillik yüzeyleri olarak sınıflandırılırlar. Süreksiz parametre, ortamı oluşturan maddesel noktaların konum vektörü olduğu durumda sıfırıncı mertebe tekillik yüzeyleri çatlak, yırtılma veya birbiri üzerinde kayan bir yüzeyi gösterir. Konum vektörünün birinci zaman türevinde oluşan bir süreksizliğin yayılması şok dalgasına, ikinci zaman türevinde oluşan süreksizliğin yayılması ise ivme dalgasına karşılık gelir.

Hız veya ivmede süreksizliklerin olduğu durağan tekillik yüzeyi kayma bandlarının modellenmesinde kullanılabilir. Bazı yükleme şartları altında ortamın deformasyon limitlerinin belirlenmesinde oldukça önemli olan kayma bandları sünek metallerde, taneli ortamlarda ve polimer tür malzemelerde yeterli deformasyon altında oluşabilecek çok ince kalınlıklı yüzeylerdir. Bu yüzey ortamı ikiye ayırır. Ortam deformasyonu süreklidir ancak kayma bandı üzerindeki maddesel noktaların hız ve ivme gibi fiziksel büyüklüklerinde ani sıçramalar gerçekleşir. Kayma bandının oluşumu, ortam için deformasyonun üst sınırı olarak kabul edilebilir. Bu durum, dış yükler altındaki malzemenin daha fazla mukavemet göstermesine engel olur.

Bu aşamada, dalga yayılması problemlerinde tekillik yüzeylerinin kullanıldığı çalışmaların ve kayma bandı üzerine yapılan çalışmaların özeti verilecektir. Burada öncelikle ivme dalgaları ve zayıf şok dalgaları, sonrasında kısıtlı ortamlarda dalga yayılması ve son olarak kayma bandı çalışmaları verilmektedir.

1900'lerin basinda Hadamard [3] ve sonrasında Hill [4], hareketli tekillik yüzeyinin tanımını; ortamı oluşturan noktalara göre hareket eden, maddesel noktaların hızlarının sürekli olduğu ve buna karşılık ivmelerinin süreksiz olduğu geometrik bir yüzey olarak yapmıştır. Daha önce yaptığımız sınıflandırmaya göre ivme dalgası eşiği olarak değerlendirilecek bu yüzey, çok küçük bir zaman diliminde ve oldukça ince bir yüzey üzerinde gerçekleşen süreksizliklere örnek olarak verilmektedir.

İvme dalgalarının yayılması üzerine yapılan araştırmalar içerisinde Mandel'in [6] 1962 yılında yaptığı çalışmada, yayılma problemi elastoplastik katılarda, küçük deformasyonlar için çözülmektedir. Bu çalışma daha sonra sonlu deformasyon yapan ortamlar için genişletilmiştir [7].

Balaban ve arkadaşlarının [8] 1970 yılında yayınlanan çalışmalarında, tekillik yüzeyleri teorisini kullanılmış ve elastoplastik ortamlarda ivme dalgası yayılması bir özdeğer problemi olarak çözülmüştür. Yazarlar, elastik ve plastik dalga hızlarını karşılaştırarak, yükleme ve boşaltma eşiklerinin yayılmasını incelemişlerdir.

Ogden [9], yaptığı çalışmada sıkıştırılmaz elastik katılarda ivme dalgalarının büyüme şartlarını oluşturmuştur. Burada, elastik ve izotrop katılar ele alınarak bazı tür malzemelerde enine dalgaların büyüme veya azalma şartı elastik sabitler cinsinden oluşturulmuştur. Genlik değişiminin birim deformasyona, yayılma doğrultusuna ve elastik sabitlerin işaretlerine ne şekilde bağlı olduğu incelenmiştir. Mooney-Rivlin katı cisim modeli için enine dalgaların genliğinin değişmeden her doğrultuda ilerleyebildiği bulunmuştur. Elde edilen sonuçlar üçüncü mertebe sıkıştırılamaz izotrop elastik malzemelerin kesin teorisi ile karşılaştırılmıştır.

Reddy ve Gültop [10], elastoplastik ortamlarda dalga yayılması problemini tekillik yüzeyleri teorisi ve büyük deformasyonlar teorisi kullanarak incelemişlerdir. Burada eğiminde süreksizlik bulunabilen bir akma yüzeyi teorisi kullanılmıştır. Bu düzgün olmayan akma yüzeyi belirli sayıda sürekli eğime sahip akma yüzeylerinin kesişmesi ile elde edilmiştir. Ayrıca deformasyon gradyan tansörünün elastik ve plastik kısımlarına ayrıştırmada çarpım mantığı kullanılarak hareket denklemleri oluşturulmuştur. Dalga geçişi sonrasında oluşan deformasyonların plastik olduğunu varsayan plastik ivme dalgaları, dalga geçişinde plastik yüklemenin olduğu ve dalga ilerisinde elastik boşaltma durumunun olduğu yükleme ivme dalgaları ile dalga gerisinde boşaltma halinin oluştuğu ve dalga ilerisinde ise ortamın plastik deformasyon içerisinde oluğu ivme dalgaları düşünülmüş ve elastik dalga hızları ile plastik dalga hızları karşılaştırılmıştır. Düzgün ve düzgün olmayan akma yüzeyleri için asal dalgaların yayılma şartları ile enine ve boyuna dalgaların plastik davranış ile ilişkisi oluşturulmuştur. Son olarak von Mises ve Tresca akma şartları kullanılarak tek eksenli çekme halinde bulunan bir ortam için boyuna dalgaların yayılma hızları bulunmuştur.

Jordan [11], çalışmasında bir boyutlu yayın etrafını çevreleyen ve sönümleyici görevi gören bir ortamda ivme dalgalarının büyüme ve azalma koşullarını incelemiştir. Bu ortamdaki yay, sonlu genlikli enine titreşimler oluşturmakta sonuç olarak ivme dalgaları yayılmaktadır. Yazar hareket denklemini oluşturulduktan sonra, ivme dalgalarının hızları ve genliklerini tekillik yüzeyleri teorisi kullanarak elde etmiştir.

Ukeje [12] 1981 yılında yayınladığı çalışmasında ivme dalgalarına matematiksel olarak benzer olan zayıf şok dalgası yayılmasını termoelastik malzemeler için incelemiştir. Isı iletiminin olmadığı durum için zayıf şok dalgası yayılma hızlarını bulmuştur. Düzlem şok dalgalarının ve herhangi bir forma sahip şokların genlik değişimini yöneten denklemler oluşturulmuştur.

Ukeje [13] diğer bir çalışmasında ısı iletiminin olduğu ortamlar için zayıf şok dalgası yayılma şartlarını araştırmıştır. Burada, ikinci mertebe bir malzeme için şok büyüklüğü ile gerilmedeki sıçrama arasındaki ilişki hiperbolik olarak bulunmuştur.

Currò ve arkadaşlarının [14] yaptıkları çalışmada, erime sıcaklığına yakın sıcaklıkta bulunan izotrop bir katıda zayıf şok dalgası yayılma şartları incelenmiştir. Bu doğrultuda ortamı oluşturan atomların termal titreşimlerini dikkate alan istatistiksel bir bünye teorisi kullanmıştır. Çalışmada alüminyum içinde bir doğrultuda yayılan düzlem zayıf şok dalgası hızları hesaplanmış ve sıcaklıkla değişimleri verilmiştir.

Kısıtlı cisimlerde dalga yayılması ile ilgili çalışmalar arasında Scott [15], bir ya da iki kısıtlama bulunan Cauchy elastik malzemelerinde ivme dalgası yayılma şartlarını ve genlik değişimini incelemiştir. Üç ya da daha fazla sayıda kısıtlama içeren bir ortamda ivme dalgalarının yayılamayacağını bulmuştur. Hiperelastisitede kullanılan bir kabul kullanarak önemli derecede basitleştirme sağlamıştır. Yapılan çalışmanın basit elastik malzemelerden farklı malzemelere genişletilebileceği vurgulanmıştır.

Reddy [16], 1984 yılında yaptığı çalışmasında, bünyesinde gelişigüzel termo-kinematik kısıt bulunan termoelastik malzemelerde ivme dalgalarının yayılma koşullarını oluşturmuştur. Kısıtlama fonksiyonları serbest enerji fonksiyonu yardımıyla yazılarak mevcut termodinamik teorilerinin yeniden ifade edilmesiyle daha öz sonuçlara ulaşılmıştır. Homotermal ve homentropik dalgaların yayılma şartlarının Frensnel-Hadamard tipi olduğu gösterilmiştir. Düzlem homotermal ve homentropik dalgaların genliklerinin büyüme ifadeleri oluşturulmuş ve bunların kısıtsız malzemelerdeki eşitliklere benzer oldukları gösterilmiştir.

Reddy ve Bleach [17], izotrop termoelastik malzemelerde kısıtlamaların ivme dalgalarının yayılma özelliklerine etkisini araştırmışlardır. Bunun için ısı iletimi olan gelişi güzel kısıtlanmış elastik ortamda ivme dalgalarının yayılma şartları incelenmiştir. Pratik uygulamalarda karşılaşılabilecek kısıtlamalar kapsanmıştır. Asal dalgalar dikkate alınmış, düzlem, silindirik ve küresel dalga eşiği şekline sahip olan dalgalar ile gelişi güzel şekle sahip olan dalgaların genlik değişimi incelenmiştir.

Scott [18], deformasyon-sıcaklık ve deformasyon-entropi termo-mekanik kısıtlarının bulunduğu denge durumunda bulunan bir ortamda küçük denge değişimlerinin davranışını yöneten denklemleri oluşturmuştur. Deformasyon-sıcaklık kısıtının malzeme stabilitesinde bozulma oluşturduğu, deformasyon-entropi kısıtının ise oluşturmadığı ortaya konulmuştur. Stabilite bozulması, sabit deformasyon altında ısı kapasitesinin negatif olmasından kaynaklanmaktadır. Ayrıca dalga yayılmasına olan etkiler de sunulmuştur.

Tonon [19], kısıtlı lineer elastik malzemelerde ivme dalgası yayılma şartlarını Hoger ve Johnson'un oluşturduğu doğrusallaştırılmış (lineerleştirilmiş) sonlu deformasyonlar teorisini (DSDT) kullanarak çalışmıştır. Büyük deformasyonlar teorisinde kullanılan bünye denklemleri DSDT ile deplasman gradyan tansörü $\partial \mathbf{u} / \partial \mathbf{x}$ 'e göre doğrusallaştırılmıştır. Sıkıştırılamaz ve uzayamaz elastik malzemeler için ivme dalgası yayılma şartları DSDT ile bulunmuş ve klasik lineer elastisite teorisinden elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. Homojen deformasyon altında bulunan uzayamaz elastik ortam için düzlem ivme dalgalarının yayılma hızları elde edilmiştir. Sıkışmazlık veya uzamazlık kısıtı bulunan ortamda yayılma hızlarının deplasman gradyan tansörüne bağlı olduğunu bulmuştur. Bu hızlar lineer elastisite teorisinde sabittirler.

Gültop [20], 2003 yılında yayınladığı çalışmasında, büyük deformasyonlar yapabilen sıkıştırılamaz elastik ortamda ivme dalgası yayılma şartlarını incelemiştir. Dalga yayılma hızları, neo-Hookean, Money-Rivlin ve St. Venant-Kirchhoff katıları için elde edilmiştir. Tekillik yüzeyleri teorisinin kullanılmasıyla elde edilecek hareket denkleminin ardından, gerilme deformasyon enerjisi arasındaki ilişki yazılmıştır. Sıkıştırılamazlık deformasyon enerjisi fonksiyonunda bir kısıt fonksiyonu olarak bulunmaktadır. Sıkıştırılamaz malzemeler için oluşturulmuş şekil değiştirme enerjilerinin kullanılmasıyla gerilmeler malzeme sabitlerine bağlı olarak yazılmıştır. Bulunan bu gerilmelerin hareket denkleminde kullanılması ve sıkışmazlık kısıtlamasından gelen özelliklerin kullanılmasıyla bir özdeğer problemi elde edilmiş ve bu problemin çözümünden bahsedilen malzemelerde oluşacak dalga yayılma hızlarını malzeme sabitleri cinsinden bulunmuştur.

Gültop [21], çalışmasında kısıtlı termoelastik malzemede zayıf şok dalgası yayılma hızlarını incelemiştir. Tekillik yüzeyi üzerinde sıçrama ifadelerini Taylor serisi açılımı yaparak oluşturmuştur. Kısıtlı ortamlar için oluşturulmuş bünye denklemlerinde, kısıtlı ve kısıtsız kısımların birleşimi kullanılmıştır. Birden fazla termomekanik kısıt içeren ve tek bir kısıta sahip ortam için hareket denklemlerini oluşturmuştur. Başlangıçta deformasyonsuz olan mekanik kısıtlı elastik bir ortam için zayıf şok dalgası yayılma hızları hesaplanarak, kısıtlı ve kısıtsız ortamlarda yayılan zayıf şok dalgalarının hızları karşılaştırılmıştır.

Rooney ve Bechtel [22], sonlu deformasyonlar yapan elastik ortamlar için olabilecek bütün termomekanik kısıt tiplerini incelemişlerdir. Termomekanik kısıt ile, deformasyon gradyanı veya gerilme gibi mekanik bir değişken ile sıcaklık, entropi, iç enerji, Helmholtz serbest enerjisi, entalpi veya Gibbs serbest enerjisi gibi ısıl değişkenler arasındaki fonksiyonel ilişki anlaşılmaktadır. Kullanılan termo-mekanik kısıtlar; sıcaklık-deformasyon kısıtı, entropi-gerilme kısıtı, entalpi-gerilme kısıtı, Helmholtz serbest enerji-gerilme kısıtı, iç enerji-gerilme kısıtı, Gibbs serbest enerji-deformasyon kısıtıdır. Bu tip kısıtların ortam stabilitesine etkilerine bakılmıştır.

Kayma bandı ile ilgili çalışmalar arasında Needleman [23], dikdörtgen blok halindeki cismin düzlem gerilme koşulları altında sıkışma problemini ele alarak dinamik kayma bandı oluşumunu incelemiştir. Malzeme, von Mises elastik-viskoplastik katısı olarak modellenmiştir. Dinamik yükleme koşulları altında ve yarı statik yükleme şartlarında oluşacak kayma bandlarının pek çok özelliklerinin benzer olduğu söylenmektedir. Kayma bandı için sayısal bir metot da bulunmaktadır.

Batra [24], basit kayma etkisi altındaki viskoplastik malzemeden yapılmış izotrop bir ortam ele almıştır. Bu termomekanik problem, pekleşme parametresi, şekil değiştirme hızı parametresi, ısıl yumuşama katsayısı ve ısıl iletkenliğin adiyabatik kayma bandlarının oluşumu ve gelişimi üzerindeki etkilerini incelemek için ele alınmıştır. Kayma bandının oluşacağı kritik şekil değiştirme değeri ve çeşitli malzeme parametreleri ile ilişkisi araştırılmıştır.

Gültop [25], kayma bandlarını sıkışabilir hiperelastik ortamlar için durağan ivme dalgaları olarak modellemiştir. St Venant – Kirchhoff ve Green – Hadamard hiperelastik malzemelerini uniform uzama etkisi altında inceleyerek ve kayma bandı oluşturacak kritik uzama değerlerini elde etmiştir. İkinci mertebe tekillik yüzeylerinin hareket denklemi, doğrusal momentumun korunumu kullanılarak birinci Piola-Kirchhoff gerilme tansörü cinsinden elde edilmiştir. St Venant – Kirchhoff ve Green – Hadamard hiperelastik malzemeleri için gerilme ve deformasyon arasındaki ilişkiyi veren bünye denklemleri, bu malzemeler için elastik şekil değiştirme enerjileri kullanılarak oluşturulmuş ve hareket denklemi akustik tansör cinsinden yazılmıştır. Oluşturulan özdeğer problemi çözülerek kritik uzama değerleri bulunmuştur. Kayma bandlarının genel olarak elastik-plastik malzemelerde görülmesine rağmen, hiperelastik malzemelerin de elastik sınırlar içerisinde kayma bandı oluşturabileceğini ortaya konulmuştur.

Gültop ve Alyavuz [26], termoelastik cisimlerde kayma bandı oluşumunu ele alarak sıcaklık terimlerini de içeren değiştirilmiş St.Venant-Kirchhoff malzemelerinde zayıf şok dalgası hareket denklemini ve akustik tansörü tanımlamışlardır. Üç eksenli eşit çekme altındaki ortamda kayma bandı oluşturacak kritik uzama oranları elde edilmiştir.

Gültop ve Alyavuz [27], yaptıkları çalışmalarında termoelastik kısıtlı bir cisimde kayma bandı oluşumunu incelemişlerdir. Bu çalışmada kayma bandı oluşturacak deformasyon şekli ve kayma bandının yerleşimi düzlem şekil değiştirme yapan hiperelastik bir cisim için verilmektedir.

Osinov ve Wu [28] hipoplastik bünye denklemleri ile ifade edilebilen malzemeler için hareket denklemini bir özdeğer problemi şeklinde yazarak akustik tansörü tanımlamışlardır. İvme dalgası hızlarının akustik tansörün özdeğerleri ile elde edileceği belirtilerek kayma bandı oluşumunu da sıfır hıza sahip ivme dalgası olarak düşünmüşlerdir.

Alyavuz ve Gültop [29], [26]'da yaptıkları çalışmayı genişleterek termoelastik ortamda zayıf şok dalgası yayılma hızlarını ve kayma bandı oluşumunu bazı özel deformasyon durumları için incelemişlerdir. Tek eksenli, iki eksenli ve üç eksenli çekme altındaki termoelastik ortamdaki dalga hızları ortaya çıkan özdeğer probleminin çözümü ile bulunmuştur. Kayma bandı oluşturacak kritik uzama oranları ise durağan zayıf şok dalgası modeli kullanılarak hesaplanmıştır.

Burada sunulan çalışmanın amacı, zayıf şok dalgalarının yayılma şartlarını ve kayma bandı oluşumunu, doğrusal olmayan ve kısıtlı termoelastik bir cisim için araştırmaktır. Sürekli ortam, sıcaklık terimlerini içeren St. Venant – Kirchhoff malzeme modeli ile modellenmiştir. Bu model termomekanik ve saf mekanik kısıt fonksiyonunu da içermektedir. Mekanik dalga problemi, oluşan bir süreksizliğin yayılması olarak ele alınmış, bu doğrultuda hareketli tekillik yüzeyleri teorisi kullanılarak çözüm yapılmıştır. Öncelikli olarak, dalga yayılması öncesi şekil değiştirmemiş termormekanik kısıtlı ortamlarda yayılan enine ve boyuna dalga hızları bulunmuştur. Bu ortam için tek ve iki eksenli çekme deformasyonu altındayken zayıf şok dalgası yayılma hızları da hesaplanarak sunulmuştur. Saf mekanik kısıtlı malzemede deformasyonsuz ve deformasyonlu durumlarda enine ve boyuna zayıf şok dalgası hızları ve kısıtsız termoelastik malzemede yayılan zayıf şok dalgası hızları da bulunarak sürekli ortamlar mekaniği alanında yapılan çalışmalara katkı sağlanmaktadır. Ayrıca ele aldığımız dalga probleminin bir uzantısı olarak, kayma bandı oluşumu konusu durağan tekillikler çerçevesinde ele alınmıştır. Kısıtlı ve kısıtsız sürekli ortamda kayma bandı oluşturacak deformasyon limitleri de sunulmaktadır. Gerçekte pek çok malzeme sıkıştırılamaz veya uzamaz olarak nitelendirilir. Düşük ağırlık yüksek mukavemet oranına sahip olabilen uzamaz malzemelerde yayılacak dalgaların hızlarının tespiti ve deformasyon limitlerinin belirlenmesi oldukça önemli bir konudur.

Sunulan çalışmasının genel hatları şöyle özetlenebilir. Sonraki bölümde kısıtlı termoelastik malzemelerin bünye teorisi oluşturulacaktır. Bölüm 3’de tekillik yüzeyleri teorisi anlatılarak uygunluk şartları ve sıçrama ifadeleri oluşturulacaktır. Bölüm 4 ve 5’de sırasıyla zayıf şok dalgalarının yayılma şartları ve kayma bandı oluşumu, sıcaklığa bağlı uzama ve uzamazlık kısıtı altındaki termoelastik ortam ile kısıtsız termoelastik ortam için araştırılacaktır.

2. KISITLI TERMOELASTİK MALZEMELERİN BÜNYE TEORİSİ

Kütlenin, momentumun ve enerjinin korunumu gibi temel yasaların geçerliliği, ortamı oluşturan malzemenin cinsinden bağımsızdır. Bununla birlikte aynı dış etkilere maruz kalmış, aynı geometriye sahip farklı malzemelerin davranışları da farklı olmaktadır. Ayrıca, cisim değişik yükleme seviyeleri altında da farklı davranış gösterebilmektedir. Belirli bir yükleme seviyesine kadar elastik davranış sergilerken, bu yük seviyesinin aşıldığı durumda plastik davranış görülebilir. Yükün uygulanma süresi de bu davranış üzerinde etkili olabilen bir parametredir. İşte böyle farklılıkları ortaya çıkaran, ortamın iç yapısıdır. Oluşturulan modelde bu iç yapıyı dikkate alan bir hesaplama sürecine ihtiyaç vardır. Sürekli ortamlar mekaniğinde gerilme, birim şekil değiştirme, sıcaklık, iç enerji ve entropi gibi bünye değişkenlerinin birbirleriyle olan ilişkileri, yani bünye denklemleri, malzemenin iç yapısını tanımlamaya ve ortamın farklı şartlar altındaki deformasyonunu bulmamız için gerekli bir araç olarak karşımıza çıkmaktadır.

Bu bölümde termoelastik malzemelerin bünye teorisi özetlenecektir. Bu teori, doğrusal olmayan ve anizotrop termoelastik malzemeler için geçerlidir. Daha sonra bünyesinde mekanik ve sıcaklık etkilere karşı deformasyon kısıtlamaları bulunan malzemeler ele alınarak, bu malzemelerin termomekanik yükleme altındaki davranışının modellenmesinde kullanılabilecek bir bünye teorisi anlatılacaktır.

Deformasyon kısıtlamaları iç kısıt veya sadece kısıt olarak adlandırılacaktır. Bunlar bir veya birden fazla kısıtlama denklemi ile bünye denklemlerinde kendini göstermektedir. Kısıtlama denklemleri, $\phi(\mathbf{F},\theta)=0$ veya $\mathbf{z}^{\beta}(\mathbf{F},\theta)\bullet\mathbf{g}=0$ şeklinde olan denklemlerdir. Deformasyon gradyanının ve mutlak sıcaklığın bağımsız değişken olarak bulunduğu bu denklemler, *deformasyon–sıcaklık* kısıtı olarak adlandırılır. Bunun dışında *entropi–deformasyon*, *sıcaklık–gerilme*, *entropi–gerilme*, *enerji–deformasyon* ve *enerji–gerilme* gibi parametre çiftlerinin kullanıldığı kısıtlama formülasyonları da bulunmaktadır.

Elastik malzemelerde kullanılan en yaygın kısıtlama örneği sıkışmazlıktır. Bu tür cisimlerde malzeme yoğunluğu ve sonuç olarak toplam hacim sabit kalmaktadır. Sıkıştırılamaz cisimlerde deformasyon gradyan tansörünün determinantına bağlı saf mekanik kısıtlama denklemi mevcuttur. Ancak kısıtlama fonksiyonu sadece mekanik parametreye, yani deformasyon gradyan tansörüne bağlıdır. Bazı malzemelerde mekanik sıkışmazlık geçerli olsa bile sıcaklık etkisi altındaki hacim değişimi önemli ölçüdedir. Pek çok elastomerik malzeme izotermal koşullar altında neredeyse sıkışmaz olarak modellenirken, bu malzemelerde sıcaklık değişimi sonucunda gerçekleşecek hacimsel değişim mekanik etkilerin iki ya da üç katı kadar olabilmektedir [30, 31]. Bu nedenle sıcaklık etkilerini de göz önünde bulundurabilmek için bir sıcaklık parametresini, mutlak sıcaklığı da içeren bir formülasyon kullanılmalıdır.

Malzemede bulunabilecek diğer bir kısıtlama da uzamazlık veya sıcaklığa bağlı uzamadır. Belirli doğrultularda uzamaz lifler yerleştirilerek oluşturulmuş kompozit malzemelerin, kemik ve ahşap gibi doğal malzemelerin modellenmesinde kullanılabilecek olan kısıtlama denklemi, deformasyon gradyan tansörünün, mutlak sıcaklığın ve uzamazlık doğrultusundaki birim vektörün bir fonksiyonudur. Bu termomekanik kısıtlama fonksiyonu sıcaklık parametresinin denklemden çıkarılmasıyla bütünüyle mekanik hale getirilebilir.

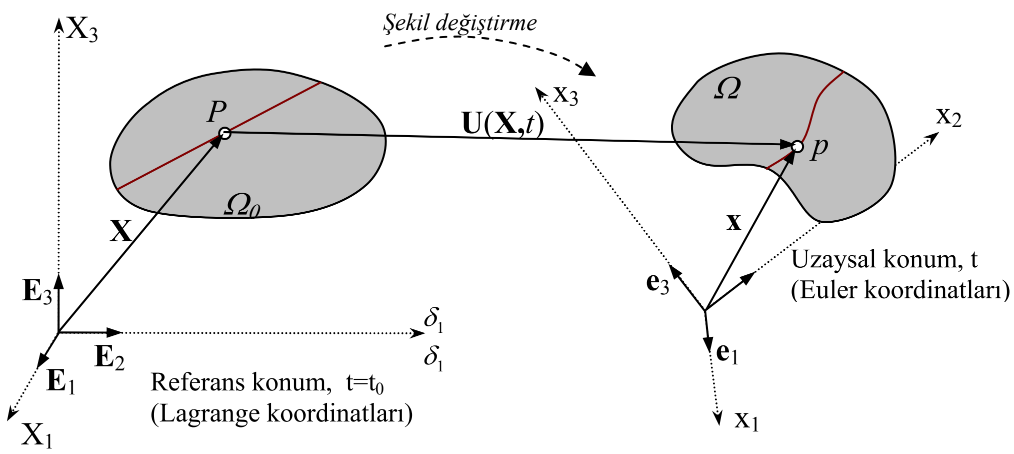
Bu aşamadan sonra termoelastik kısıtlı cisimlerin bünye teorisini oluşturmak için kullanılan sürekli ortamın hareketi, şekil değiştirmeler, gerilmeler ve korunum yasalarından bahsedilecektir. Sonrasında kısıtlı ve kısıtsız termoelastik cisimlerin bünye denklemleri verilecektir. Son olarak yaygın olarak kullanılan termomekanik kısıtlama fonksiyonları üzerinde durulacaktır.

2.1. Sürekli Ortamlar Kinematiği

Sürekli ortamlar mekaniğinde cismin hareket özelliklerinin bilindiği zaman ve mekân konumu, *referans konumu* olarak adlandırılmaktadır. Bu konumda bulunan sürekli ortamdaki herhangi bir P noktasının sabit kartezyen koordinat sistemindeki (referans koordinat sistemi) yeri **X** konum vektörüyle gösterilir. Bu konum, genellikle cismin hareketine ve şekil değiştirmesine başladığı zaman olarak kabul edildiğinden zaman için $t = t_0$ yazılmaktadır. Mekanik, termal, manyetik, kütle çekim kuvvetleri vb. dış etkiler altında oluşacak deformasyon sonrasında P noktasının yeni yeri $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ hareket denklemiyle belirlenmektedir. Bu yeni konum sürekli ortamın uzaysal konumudur. Bu konumdaki koordinat sistemi ise uzaysal koordinat sistemidir. Literatürde referans koordinatları *Lagrange* koordinatları, uzaysal koordinatlar da *Euler* koordinatları olarak da kullanılmaktadır (Şekil 2.1). Problemin türüne göre referans koordinat sistemi ve uzaysal koordinat sistemi ayrı ayrı seçilebileceği gibi çakışık olarak da seçilebilmektedir.

Bu çalışmada, referans koordinatlarında verilen skaler, vektör veya tansör büyüklükler büyük harf karakterlerle, uzaysal koordinatlarda verilen büyüklüklerse küçük harf karakterlerle belirtilecektir. Skaler büyüklükler normal karakterler ile, vektörler ve tansörler ise koyu harflerle verilecektir. Benzer şekilde kullanılacak alt ve üst indisler de referans koordinatlarındaki bir parametreye aitse büyük, uzaysal koordinatlardaki bir parametreye aitse küçük harf ile gösterilecektir.

Sürekli ortamdaki herhangi bir noktanın referans ve uzay konumundaki yer vektörleri, bileşenleri ve birim vektörler ile birlikte sırasıyla $\mathbf{X} = X_K \mathbf{E}_K$ ve $\mathbf{x} = x_k \mathbf{e}_k$



Şekil 2.1. Lagrange ve Euler koordinat sistemleri

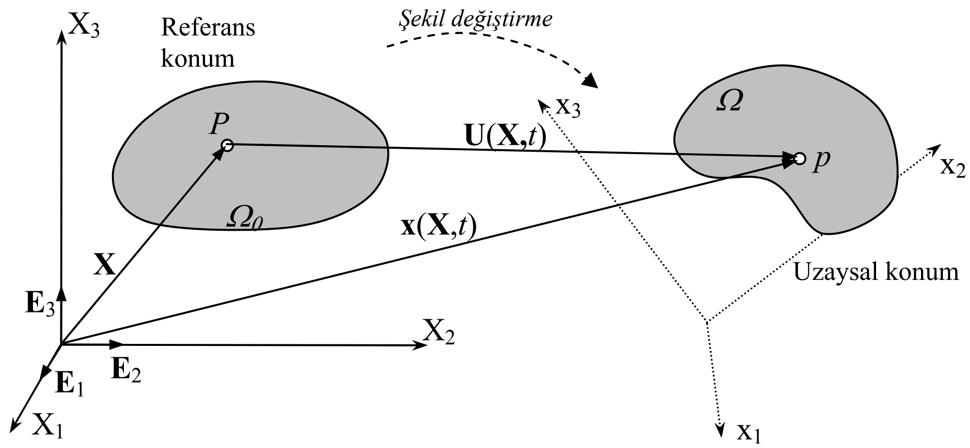
olarak verilmektedir. Bu ifadelerde K ve k indisleri toplama anlaşımına uygun olarak kullanılmıştır. Bundan sonra bu çalışmada aksi belirtilmediği durumlarda birbirini iki kere tekrar eden indisler Eş. 2.1'de belirtilen şekilde toplama anlaşımıyla kullanılacaktır.

$$a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \tag{2.1}$$

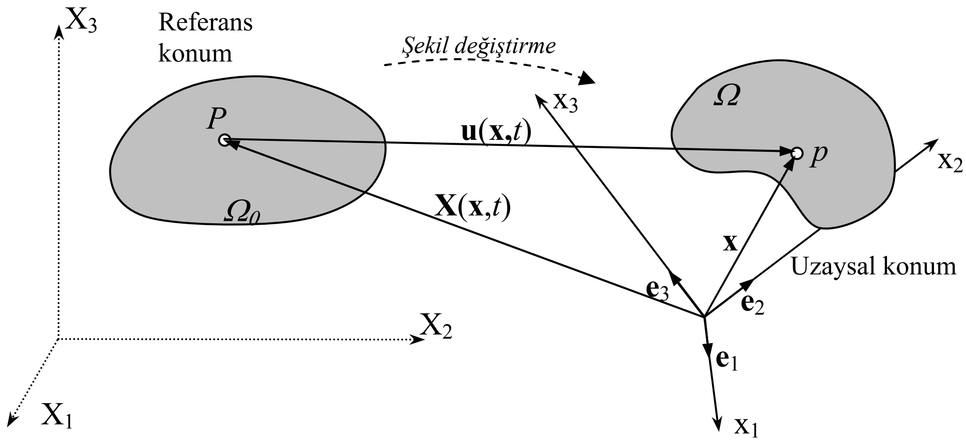
Şekil 2.2'de referans konumunda bulunan bir P noktasının deformasyon önceki ve sonraki konum vektörleri Lagrange tanımlarıyla gösterilmektedir. Bu tanımlamada yer değiştirme ve uzaysal konumdaki yer vektörü, referans koordinatlarının ve zamanın bir fonksiyonudur. Buna göre P noktasının yer değiştirmesi Eş. 2.2'deki gibi yazılır. Şekil 2.3'de gösterilen sistemde konum vektörü ve yer değiştirme vektörü uzaysal koordinatların ve zamanın bir fonksiyonudur. Bu gösterim hareketin Euler tanımıdır. Buna göre p noktasının yer değiştirme vektörü Eş. 2.3'deki gibi yazılır.

$$\mathbf{U}(\mathbf{X},t) = \mathbf{x}(\mathbf{X},t) - \mathbf{X} \tag{2.2}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \mathbf{x} - \mathbf{X}(\mathbf{x},t) \tag{2.3}$$



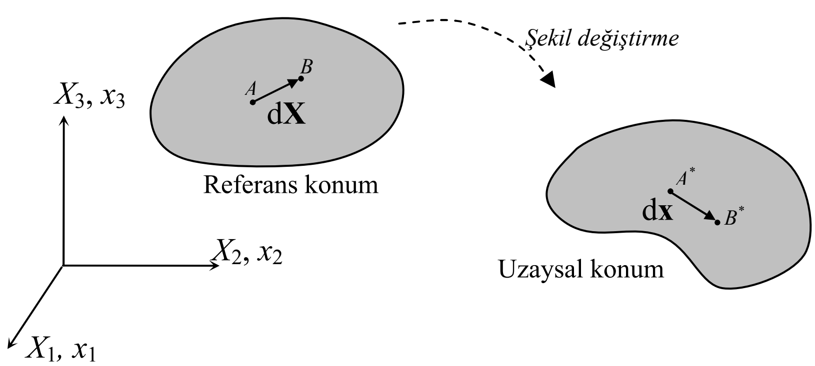
Şekil 2.2. Yer değiştirmenin Lagrange tanımı



Şekil 2.3. Yer değiştirmenin Euler tanımı

Yer değiştirmenin Euler ve Lagrange tanımlarında farklı parametreler kullanılmış olsa da, her ikisinin de aynı vektörü gösterdiği açıktır.

Sürekli ortamlar mekaniğinde hareket ve deformasyon bilgisini içeren en önemli tansör büyüklük, deformasyon gradyan tansörüdür. Bu aşamada yer değiştirme ile şekil değiştirmeyi birbirinden ayırt edebilmek için iki noktanın hareketi gözlenir. Şekil 2.4'deki referans konumunda bulunan A ve B noktaları arasındaki sonsuz küçük d$\mathbf{X}$ vektörü, deformasyon sonunda büyüklük ve yön değiştirerek A^* ve B^* noktaları arasındaki sonsuz küçük d$\mathbf{x}$ vektörü oluyorsa, bu iki vektör arasındaki ilişki Eş. 2.4'deki gibi yazılır.



Şekil 2.4. Sonsuz küçük vektör elemanının deformasyonu

$$\mathrm{d}\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{X},t)\mathrm{d}\mathbf{X} \quad \text{veya} \quad \mathrm{d}x_l = F_{lK}\mathrm{d}X_K \tag{2.4}$$

Burada **F** deformasyon gradyan tansörüdür ve zamanın ve referans koordinatlarının bir fonksiyonudur. Matematiksel olarak vektörel dönüşüm yapan deformasyon gradyan tansörünün tanımı Eş. 2.5'de verilmektedir.

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X},t)}{\partial \mathbf{X}} = \mathrm{Grad}\,\mathbf{x}(\mathbf{X},t) \quad \text{veya} \quad F_{iK} = \frac{\partial x_i}{\partial X_K} \tag{2.5}$$

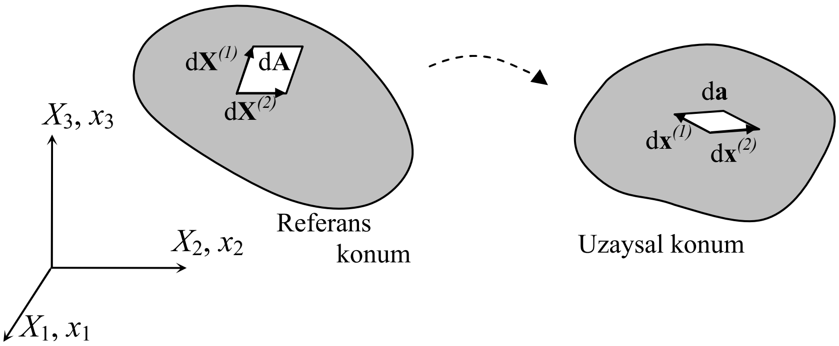
Eş. 2.5'den görüleceği gibi deformasyon gradyan tansörü hem referans koordinatlarında hem de uzaysal koordinatlarda tanımlanmış bir tansördür. Bu ikinci mertebeden tansörün dokuz adet elemanı bir kare matris oluşturmaktadır (Eş. 2.6).

$$\{\mathbf{F}\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

Sonsuz küçük vektör elemanının değişimi bütünüyle deformasyon gradyan tansörü ile gösterilmektedir. Eş. 2.4'de verilen bu değişime ek olarak, Şekil 2.5'de gösterilen ve referans koordinatlarında bulunan malzemedeki sonsuz küçük d**A** alan elemanının değişimi Eş. 2.7'deki gibidir.

$$\mathrm{d}\mathbf{a} = \det\mathbf{F}\,\mathbf{F}^{-T}\mathrm{d}\mathbf{A} \quad \text{veya} \quad \mathrm{d}a_k = JF_{kK}^{\ \ -1}\,\mathrm{d}A_K \tag{2.7}$$

Bunlarla birlikte Şekil 2.6'da gösterilen ve referans koordinatlarında bulunan sonsuz küçük dV hacim elemanının deformasyon sonrasındaki değişimi Eş. 2.8'de verilmektedir.



Şekil 2.5. Sonsuz küçük yüzey (alan) elemanının deformasyonu

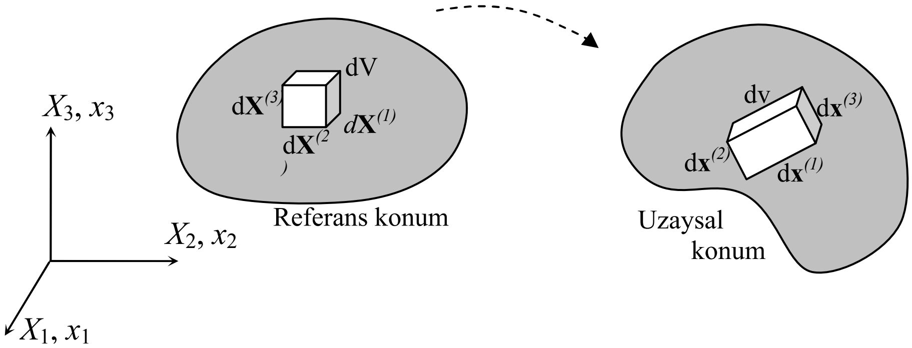
$$\mathrm{dv} = \det \mathbf{F}\, \mathrm{dV} \tag{2.8}$$

Eş. 2.8'den görüleceği üzere hacim değişimi deformasyon gradyan tansörünün determinantına (*J*, *Jacobian*) bağlıdır. Gerçek deformasyonların oluşabilmesi için yani deformasyon sonrası negatif bir hacim olmaması için Jacobian sıfırdan büyük olmalıdır. Matematiksel olarak sıfırdan küçük bir determinant olası olsa da, fiziksel olarak negatif hacim oluşamayacağı için Jacobian sıfırdan büyük olmak zorundadır. Bu nedenle deformasyon gradyan tansörünün eleman matrisi tekil olmayan bir matristir.

Deformasyon gradyan tansörüne ek olarak hareketi ve deformasyonu belirleyen başka tansörler de bulunmaktadır. Bunlardan ilki referans koordinatları kullanarak tanımlanmış sağ Cauchy – Green şekil değiştirme tansörüdür *(Green şekil değiştirme tansörü)*. Bu ikinci mertebe simetrik, pozitif tanımlı tansör ile bir **X** noktasında, belirli bir doğrultudaki uzama miktarı hesaplanabilmektedir.

Sağ Cauchy – Green şekil değiştirme tansörü, deformasyon gradyan tansörü cinsinden Eş. 2.9'daki gibi yazılabilir.

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F} \quad \text{veya} \quad C_{KL} = F_{iK}F_{iL} \tag{2.9}$$



Şekil 2.6. Sonsuz küçük hacim elemanının deformasyonu

Burada deformasyon gradyan tansörü **F** eşitlikte en sağ tarafta bulunmaktadır. Referans koordinatlarında tanımlı olan diğer bir sonlu deformasyon tansörü, çizgi elemanının uzunluğunun karesindeki değişimi tanımlayan Lagrange birim şekil değiştirme tansörüdür.

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad \text{veya} \quad E_{KL} = \frac{1}{2}(C_{KL} - \delta_{KL}) \tag{2.10}$$

Burada **E** Lagrange birim şekil değiştirme tansörü, **I** birim tansör ve δ Kronecker deltasıdır. **C** ve **I** simetrik olduğu için **E** de simetriktir.

Uzaysal koordinatlarda tanımlı diğer bir önemli şekil değiştirme tansörü sol Cauchy-Green şekil değiştirme tansörüdür *(Finger şekil değiştirme tansörü)*. Simetrik ve pozitif tanımlı bu ikinci mertebeden tansör, deformasyon gradyan tansörü cinsinden Eş. 2.11'deki gibi yazılır.

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T \quad \text{veya} \quad B_{ij} = F_{iK} F_{jK} \tag{2.11}$$

Eş. 2.4'de bulunan dönüşüm yardımıyla referans konumunda bulunan bir $\mathbf{k}_0$ birim vektörünün deformasyonu bize Eş. 2.12'de bulunan uzama vektörünü verecektir.

$$\boldsymbol{\lambda}_0 = \mathbf{F}\mathbf{k}_0 \quad \text{veya} \quad \lambda_{0i} = F_{iK} k_{0K} \tag{2.12}$$

Bu ifadede her iki tarafın kareleri alınarak skaler bir uzama değeri elde edilebilmektedir. Bu işlem sonucunda, referans koordinatları kullanarak bir **X** noktasındaki ve $\mathbf{n}_0$ birim vektörü doğrultusundaki uzama Eş. 2.13'deki gibi elde edilir.

$$\lambda^2 = \mathbf{k}_0 \bullet \mathbf{C}\mathbf{k}_0 \quad \text{veya} \quad \lambda^2 = F_{iK} F_{iL} k_{0L} k_{0K} \tag{2.13}$$

Benzer şekilde uzaysal koordinatlar kullanılarak bir **x** noktasında ve **k** doğrultusundaki uzama,

$$\lambda^{-2} = \mathbf{k} \bullet \mathbf{B}^{-1}\mathbf{k} \quad \text{veya} \quad \lambda^{-2} = k_i B_{ij}^{-1} k_j \tag{2.14}$$

olarak yazılabilir.

Bu aşamadan sonra, şimdiye kadar tanımladığımız bazı parametrelerin zamana göre değişimleri incelenecektir. Bu değişimler, malzeme zaman türevi kullanılarak elde edilecektir. Malzeme zaman türevi, herhangi bir skaler, vektör veya tansör büyüklüğün **X** parametresi zamana göre sabit tutulurken alınan zaman türevidir. Bu tanımlama doğrultusunda Şekil 2.2'de gösterilen *P* noktasına ait yer değiştirmenin malzeme zaman türevi yani *P* noktasının sahip olduğu hız Eş. 2.15'deki gibi yazılabilir.

$$\mathbf{V}(\mathbf{X},t) = \left.\frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{X},t)}{\partial t}\right|_{\mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X},t)}{\partial t} \quad \text{veya} \quad v_k = \frac{\partial x_k}{\partial t} \tag{2.15}$$

Eş. 2.15 ile verilen hız referans koordinatlarının ve zamanın bir fonksiyonudur ve $t = t_0$ zamanında **X** noktasında bulunan bir noktanın t anındaki hızını verir. Aynı şekilde *P* noktasının sahip olduğu ivmenin Lagrange tanımı malzeme zaman türevi alınarak Eş. 2.16'daki gibi yazılabilir.

$$\mathbf{A}(\mathbf{X},t)=\left.\frac{\partial^2\mathbf{U}(\mathbf{X},t)}{\partial t^2}\right|_{\mathbf{X}}=\frac{\partial^2\mathbf{x}(\mathbf{X},t)}{\partial t^2}\quad \text{veya}\quad a_k=\frac{\partial^2 x_k}{\partial t^2} \tag{2.16}$$

Deformasyon gradyan tansörünün malzeme zaman türevi,

$$\dot{\mathbf{F}}=\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}}\right)\mathbf{F}\quad \text{veya}\quad \dot{F}_{kL}=v_{k,l}\,F_{lL} \tag{2.17}$$

olarak yazılmaktadır. Burada $\mathbf{v}=\mathbf{v}(\mathbf{x},\mathrm{t})$ Eş. 2.15'de verilen hız vektörünün uzaysal koordinatlardaki tanımıdır.

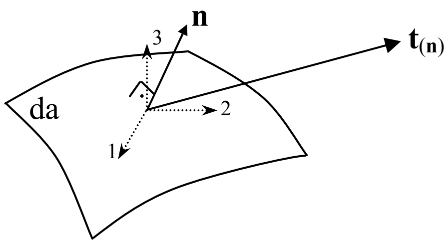
2.2. Gerilme

Cismin şekil değiştirmesine sebep olan dış etkiler (mekanik kuvvetler, kütle çekim kuvvetleri, sıcaklık etkileri vb.) cismin bünyesinde oluşan gerilmelerden de sorumludur. Benzer bir şekilde, oluşan gerilmelerin de şekil değiştirmelere yol açtığı söylenebilir. Şekil 2.7'de görülen sonsuz küçük alana etkiyen kuvvet $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$ ve bu yüzeyin birim normal vektörü **n** ise, bu gerilme kuvveti cismin o noktasındaki gerilme kuvvetinin bileşenleri cinsinden,

$$\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}=t_1\mathbf{e}_1+t_2\mathbf{e}_2+t_3\mathbf{e}_3 \tag{2.18}$$

olarak yazılabilir. t_1, t_2, t_3 sırasıyla 1, 2 ve 3 kartezyen koordinat eksenleri doğrultusundaki gerilme kuvveti bileşenlerini ifade etmektedir. Şekil 2.7'de verilen gerilme durumu sonsuz küçük üçgen prizma elemanına etkiyen kuvvetlerin dengesi haline getirilebilir (Şekil 2.8). Burada aşağıdaki denge eşitliği geçerlidir.

$$\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}\mathrm{da}=\mathbf{t}_{(1)}\mathrm{da}_1+\mathbf{t}_{(2)}\mathrm{da}_2+\mathbf{t}_{(3)}\mathrm{da}_3\quad \text{veya}\quad \mathbf{t}_{(\mathbf{n})}\mathrm{da}=\mathbf{t}_{(i)}\mathrm{da}_\mathrm{i} \tag{2.19}$$



Şekil 2.7. Sonsuz küçük da alanındaki yüzey gerilme kuvveti ve yüzey normali

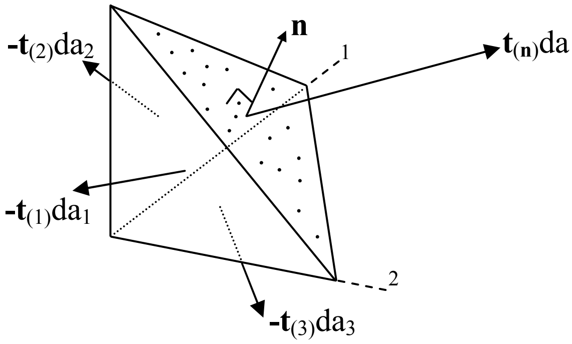
Burada $\mathbf{t}_{(1)}$, $\mathbf{t}_{(2)}$ ve $\mathbf{t}_{(3)}$ sırasıyla 1, 2 ve 3 yüzeylerine etkiyen gerilme kuvvetlerini göstermektedir. Sırasıyla 1, 2 ve 3 yüzeylerine karşılık gelen alanlar “da” alanı cinsinden aşağıdaki gibi yazılır.

$$\mathrm{da}_1 = \mathrm{da}\,\mathrm{n}_1 \ , \ \mathrm{da}_2 = \mathrm{da}\,\mathrm{n}_2 \ , \ \mathrm{da}_3 = \mathrm{da}\,\mathrm{n}_3$$

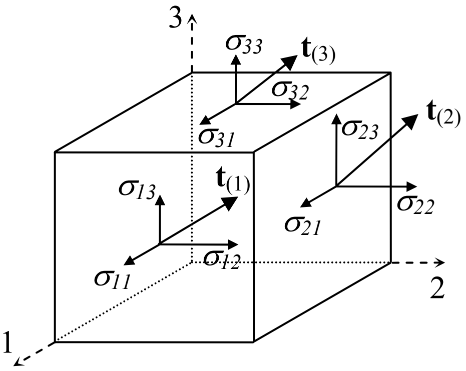
Bu alanlar, Eş. 2.19’da yerlerine yazılarak ve gerekli sadeleştirmeler yapılarak,

$$\mathbf{t}_{(\mathbf{n})} = \mathbf{t}_{(1)}\mathrm{n}_1 + \mathbf{t}_{(2)}\mathrm{n}_2 + \mathbf{t}_{(3)}\mathrm{n}_3 \quad \text{veya} \quad \mathbf{t}_{(\mathbf{n})} = \mathbf{t}_{(i)}\mathrm{n}_\mathrm{i} \qquad (2.20)$$

yazılabilir. Ayrıca, gerilme durumunu koordinat yüzeylerine etkiyen gerilmeler cinsinden Şekil 2.9’daki gibi gösterilebilir. Burada koordinat yüzeylerine etkiyen gerilme kuvvetleri ile gerilme tansörünün bileşenleri arasında aşağıdaki bağıntılar mevcuttur.



Şekil 2.8. Sonsuz küçük üçgen prizmaya etkiyen gerilme kuvvetleri



Şekil 2.9. Gerilme tansörünün bileşenleri ve koordinat yüzeylerine etkiyen gerilme kuvvetleri

$$\mathbf{t}_{(1)} = \sigma_{11}\mathbf{e}_1 + \sigma_{12}\mathbf{e}_2 + \sigma_{13}\mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{t}_{(2)} = \sigma_{21}\mathbf{e}_1 + \sigma_{22}\mathbf{e}_2 + \sigma_{23}\mathbf{e}_3 \tag{2.21}$$

$$\mathbf{t}_{(3)} = \sigma_{31}\mathbf{e}_1 + \sigma_{32}\mathbf{e}_2 + \sigma_{33}\mathbf{e}_3$$

veya

$$\mathbf{t}_{(i)} = \sigma_{ij}\mathbf{e}_j \tag{2.22}$$

Eş. 2.22'de σ_{ij}, Cauchy (gerçek) gerilme tansörünün bileşenlerini göstermektedir. Eş. 2.22, Eş. 2.20$^{(2)}$'de yerine yazılarak ve gerekli indis değiştirilmesi yapılarak,

$$\mathbf{t}_{(\mathbf{n})} = \sigma_{ij}\mathrm{n}_{\mathrm{j}}\mathbf{e}_i \tag{2.23}$$

elde edilir. Burada $\sigma_{ij}\mathrm{n}_{\mathrm{j}}$, $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$ yüzey gerileme vektörünün *i*. bileşenlerini göstermektedir. Bu bileşenler vektör ve indis notasyonuyla aşağıdaki gibi yazılırlar.

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} \quad \text{veya} \quad t_i = \sigma_{ij}n_j \tag{2.24}$$

Cauchy gerilme tansörü, uzaysal konumda bulunan cisimdeki şekil değiştirmiş alan ve bu konfigürasyondaki kuvvetler kullanılarak bulunacak gerilme tansörüdür. Bu gerilme tansörü simetrik bir tansördür.

Cauchy gerilme tansörünün dışında sadece referans koordinatlarında tanımlı ve hem referans hem de uzaysal koordinatlarda tanımlı iki gerilme tansörü daha mevcuttur. Bunlardan ilki, birinci Piola – Kirchhoff gerilme tansörü olarak adlandırılır (nominal gerilme). Bu tansör, hem uzaysal hem de referans koordinatlarında tanımlıdır. Yani, gerilmenin tanımında kullanılan alan referans konumundan bulunan alandır, kuvvetler ise uzaysal konumda yer alan kuvvetlerdir. Cauchy gerilmesi ve deformasyon gradyanı cinsinden birinci Piola – Kirchhoff gerilme tansörü,

$$\mathbf{T} = J\,\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma} \quad \text{veya} \quad T_{Kj} = JF_{Ki}{}^{-1}\sigma_{ij} \tag{2.25}$$

olarak tanımlıdır ve genellikle simetrik değildir. Sadece referans koordinatlarında tanımlı ve simetrik olan gerilme tansörü ikinci Piola – Kirchhoff gerilme tansörüdür. Referans koordinatlarında bulunan alan ve kuvvetler kullanarak hesaplanır. İkinci Piola – Kirchhoff gerileme tansörü, Cauchy gerilmesi ve deformasyon gradyanı cinsinden Eş. 2.26'daki gibi yazılmaktadır.

$$\mathbf{P} = J\,\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T} \quad \text{veya} \quad P_{KL} = JF_{Ki}{}^{-1}\sigma_{ij}F_{Lj}{}^{-1} \tag{2.26}$$

2.3. Korunum Yasaları

2.3.1. Kütlenin korunumu

Bu ilkeye göre, ortamın deformasyonu süresince toplam kütle değişmeden kalır. Buna göre toplam kütlenin zamana göre değişimi sıfıra eşit olmalıdır.

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\, dV = 0 \tag{2.27}$$

2.3.2. Doğrusal momentumun korunumu

Toplam doğrusal momentumun zamana göre değişimi, ortama etkiyen net kuvvete eşit olacaktır. Buna göre,

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\,\mathbf{v}dV = \mathrm{F} \quad \text{veya} \quad \frac{d}{dt}\int_V \rho\, v_k dV = F_k \tag{2.28}$$

2.3.3. Açısal momentumun korunumu

Toplam açısal momentumun zamana göre değişimi, ortama etkiyen net momente eşittir. Buna göre,

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\left(\mathbf{v}\times\mathbf{x}\right)dV = \mathbf{M} \quad \text{veya} \quad \frac{d}{dt}\int_V \rho\,\varepsilon_{klm}x_l v_m dV = M_k \tag{2.29}$$

2.3.4. Enerjinin korunumu

Enerjinin korunumu ilkesi, bir sürekli ortamın kinetik enerjisi ve iç enerjilerinin zamana göre değişimlerinin ortama etkiyen dış kuvvetlerin birim zamanda yaptıkları iş ve birim zamanda ortama giren veya çıkan tüm enerjilerin toplamına eşit olduğunu ifade eder. Buna göre aşağıdaki enerji eşitliği yazılabilir.

$$\frac{d}{dt}\left(K+E\right)=W+Q \tag{2.30}$$

Burada K ortamın toplam kinetik enerjisi, E toplam iç enerji, W yüzey ve kütle kuvvetlerin birim zamanda yapılan iş ve Q ortama dışarıdan sağlanan ısı enerjisidir. Burada ortama giren ve çıkan tüm enerjiler ısı enerjisiyle sınırlanmıştır ve bu ısı enerjisi yüzeyden geçen enerji olabileceği gibi ortamın içindeki kaynaklardan da sağlanabilir. Ortamda sağlanan toplam ısı enerjisi aşağıdaki yüzey ve hacim integrallerinin toplamı şeklindedir.

$$Q = \oint_S \mathbf{q} \bullet \mathbf{n}\, da + \int_V \rho\, h\, dV \quad \text{veya} \quad Q = \oint_S q_i n_i\, da + \int_V \rho\, h\, dV \tag{2.31}$$

Burada birim alana etkiyen **q** ısı akısı vektörünün normal bileşenlerinin tüm yüzey için toplamı ve *h* iç ısı enerji kaynağının hacim toplamı toplam ısı enerjisini verir.

Dış kuvvetlerin birim zamanda yaptıkları iş, yüzey kuvvetlerinin ve kütle kuvvetlerinin yaptıkları işlerin toplamına eşittir. Yüzey ve hacim integralleri kullanarak

$$W = \oint_S \mathbf{t}_{(\mathbf{n})} \bullet \mathbf{v}\, da + \int_V \rho \mathbf{f} \bullet \mathbf{v}\, dV \quad \text{veya} \quad W = \oint_S t_{(\mathbf{n})i} v_i\, da + \int_V \rho f_j v_j\, dV \tag{2.32}$$

ifadesi yazılabilir. Burada **t** sonsuz küçük alana etkiyen kuvvet yani yüzey gerilme kuvveti, **f** birim hacme etkiyen kütle kuvveti ve **v** hızdır. Ortamın toplam kinetik enerjisi,

$$K = \frac{1}{2}\int_V \rho\, \mathbf{v} \bullet \mathbf{v}\, dV \quad \text{veya} \quad K = \frac{1}{2}\int_V \rho\, v_i v_i\, dV \tag{2.33}$$

ve toplam iç enerjisi

$$E = \int_V \rho\, e\, dV \tag{2.34}$$

olarak yazılabilir. Burada *e* birim kütledeki iç enerji yoğunluğudur. Eş. 2.30'da global formda verilen enerjinin korunumu ilkesi yerel formda aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\rho\, \dot{e} = \sigma_{kl} v_{l,k} + q_{k,k} + \rho\, h \tag{2.35}$$

Burada σ_{kl} Cauchy gerilme tansörünün bileşenleri, v_k hız vektörünün bileşenleri, q_k ısı akı vektörünün bileşenleri ve h ısı kaynağıdır. *Yerel form* teriminin kullanılmasının sebebi yazılan eşitliğin sonsuz küçük hacim elemanı için geçerli olmasıdır. Toplam hacim için yazılacak denklikler, *global form* olarak adlandırılmaktadır.

Deformasyon gradyan tansörünün zaman türevi ve Cauchy gerilme tansörünün birinci Piola – Kirchhoff gerilme tansörü cinsinden tanımı kullanılarak enerjinin korunumu, yerel formda Eş. 2.36'daki gibi yazılabilir.

$$\rho_0\, \dot{e} - \mathbf{T} \bullet \dot{\mathbf{F}} - J\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{x}} - \rho_0\, h = 0 \tag{2.36}$$

2.3.5. Entropi ilkesi

Bu ilkeye göre ortamın toplam entropisinin zamana göre değişimi, ortamda cisim yüzeyinden ve iç kaynaklardan sağlanacak entropinin toplamından az olamaz. Clausius – Duhem eşitsizliği olarak da bilinen ilkeye göre toplam entropi üretimi,

$$\Gamma \equiv \frac{dH}{dt} - B - \oint_V \mathbf{S} \bullet d\mathbf{a} dV \geq 0 \tag{2.37}$$

Burada H cismin toplam entropisi, B cisim içerisindeki enerji kaynaklarından sağlanan entropi, $\mathbf{S}$ entropi akı vektörüdür. Cismin bünyesinde bulundurabileceği enerji kaynaklarından oluşan entropi, birim kütledeki lokal entropi kaynağı b kullanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$B = \int_V \rho\, b\, dV \tag{2.38}$$

Cisim yüzeyinden sağlanan ısı enerjisi sonucunda oluşacak entropi akısı,

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{q}}{\theta} \tag{2.39}$$

ve birim kütledeki lokal entropi kaynağı, ısı kaynağı ve mutlak sıcaklık cinsinden,

$$b = \frac{h}{\theta} \tag{2.40}$$

olarak yazılır. Eş. 2.37'de verilen entropi üretimi eşitsizliği yerel formda Eş. 2.41'deki gibi yazılabilir.

$$\rho\gamma \equiv \rho\dot{\eta} - \rho\frac{h}{\theta} - \frac{\operatorname{div}\mathbf{q}}{\theta} \geq 0 \tag{2.41}$$

2.4. Kısıtlı Doğrusal Olmayan Termoelastik Cisimler

Yükleme ve ısı girişi sonrasında sıcaklık ve şekil değiştiren, uygulanan dış etkiler kaldırıldığında başlangıç durumuna geri dönen cisimler, termoelastik olarak kabul edilir. Ortamda, bu etkiler sonrasında oluşacak şekil değişimini sınırlayan kısıtlar mevcut olabilir. Böyle malzemeler için oluşturulan ilk bünye teorisi Green, Naghdi ve Trapp'in kullandıkları teoridir [32]. Sonrasında Gurtin ve Podio-Guidugli [33] ve bazı değişikliklerle Reddy [34] bu tip malzemeler için bünye teorileri oluşturmuşlardır. Gurtin ve Podio-Guidugli'nin oluşturdukları teoride bünye denklemleri, serbest ve kısıtlı bölümlerin toplamları olarak aşağıdaki gibi yazılmıştır.

$$\psi = \psi_0(\mathbf{F}, \theta, \mathbf{g}) \tag{2.42}$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^0(\mathbf{F}, \theta, \mathbf{g}) + \mathbf{T}^k \tag{2.43}$$

$$\eta = \eta_0(\mathbf{F}, \theta, \mathbf{g}) + \eta_k \tag{2.44}$$

Burada ψ Helmholtz serbest enerji fonksiyonu, **T** birinci Piola - Kirchhoff gerilme tansörü ve η ise ortamın entropisidir. θ mutlak sıcaklığı ve **g** ise sıcaklık gradyanını göstermektedir. Sırasıyla, $\mathbf{T}^0$ ve $\mathbf{T}^k$ birinci Piola – Kirchhoff gerilme tansörünün serbest ve kısıtlı tamamlayıcı bölümleri, η_0 ve η_k ise entropinin serbest ve kısıtlı tamamlayıcı bölümleridir.

Reddy, oluşturduğu bünye teorisinde, [32]'de önerilen kısıtlama fonksiyonunu ayrıştırarak aşağıdaki formda iki tip kısıtlama fonksiyonu yazmıştır.

$$\phi^\alpha(\mathbf{F},\theta) = 0\,, \quad \alpha = 1\cdots n \tag{2.45}$$

$$\mathbf{z}^\beta(\mathbf{F},\theta)\bullet\mathbf{g} = 0\,, \quad \beta = 1\cdots m \tag{2.46}$$

Reddy, Eş. 2.45 ve Eş. 2.46'da verilen kısıtlama fonksiyonlarının geçerli olduğu malzemeler için [33]'da verilen teoriye benzer, kısıtsız ve kısıtlı kısımların toplamların oluşan bünye denklemlerini aşağıdaki gibi yazmıştır.

$$\psi = \psi_0(\mathbf{F},\theta,\mathbf{g}) + p\psi_k(\mathbf{F},\theta) \tag{2.47}$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^0(\mathbf{F},\theta,\mathbf{g}) + p\mathbf{T}^k(\mathbf{F},\theta) \tag{2.48}$$

$$\eta = \eta_0(\mathbf{F},\theta,\mathbf{g}) + p\eta_k(\mathbf{F},\theta) \tag{2.49}$$

Burada *p* herhangi bir değeri alabilen skaler Lagrange çarpanıdır. Bu teoride ψ_k, $\mathbf{T}^k$ ve η_k kısıtlı parametrelerini kısıtlama denklemleriyle ilişkilendirmek için Clausius – Duhem eşitsizliği kullanılmıştır. Bu doğrultuda Helmholtz serbest enerji fonksiyonu Eş. 2.41'de yerine yazılarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$-\rho_0\dot{\psi}_0 - p\rho_0\dot{\psi}_k - \rho_0\eta_0\dot{\theta} + \mathbf{T}^0\bullet\dot{\mathbf{F}} + p\left(-\rho_0\eta_k\dot{\theta} + \mathbf{T}^k\bullet\dot{\mathbf{F}}\right) \geq 0 \tag{2.50}$$

Burada p Lagrange çarpanının ‘herhangi bir değeri alabileceği’ özelliğini kullanarak ve eşitsizliğin her durumda korunacağını düşünerek Eş. 2.51 ve Eş. 2.52’deki sonuçlara ulaşılabilir.

$$\psi_k = 0 \tag{2.51}$$

$$-\rho_0 \eta_k \dot{\theta} + \mathbf{T}^k \bullet \dot{\mathbf{F}} = 0 \tag{2.52}$$

Burada Eş. 2.51’den Helmholtz serbest enerji fonksiyonunun kısıtlı kısmının sıfıra eşit olmak durumunda oluğu ortaya çıkmıştır. Diğer parametrelerden gerilme ve entropinin kısıtlı kısımlarını yazabilmek için Eş. 2.45’in birinci zaman türevini alarak,

$$\frac{d\phi^\alpha(\mathbf{F},\theta)}{dt} = \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial \mathbf{F}} \bullet \frac{d\mathbf{F}}{dt} + \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial \theta}\frac{d\theta}{dt} = 0 \tag{2.53}$$

$$\frac{\partial \phi^\alpha}{\partial \mathbf{F}} \bullet \dot{\mathbf{F}} + \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial \theta}\dot{\theta} = 0 \tag{2.54}$$

ve Eş. 2.54’ün her iki tarafını $p_\alpha \rho_0$ ile çarparak aşağıdaki eşitlik yazılır.

$$p_\alpha \rho_0 \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial \mathbf{F}} \bullet \dot{\mathbf{F}} + p_\alpha \rho_0 \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial \theta}\dot{\theta} = 0 \tag{2.55}$$

Eş. 2.52 ve Eş. 2.55 benzer formda olan eşitliklerdir. Bu benzerlik kullanılarak birinci Piola – Kirchhoff gerilme tansörü ve entropinin kısıtlı kısımlarının kısıt fonksiyonuyla olan ilişkisini aşağıdaki gibi yazılır.

$$\mathbf{T}^k = p_\alpha \rho_0 \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial \mathbf{F}} \tag{2.56}$$

$$\eta_k = -p_\alpha \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial \theta} \tag{2.57}$$

Yukarıda elde edilen kısıtlı bölüme ait eşitlikler kullanılarak, serbest enerji fonksiyonu, gerilme tansörü ve entropinin toplam halleri sırasıyla aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\psi = \psi_0 \tag{2.58}$$

$$\mathbf{T} = \rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial \mathbf{F}} + \sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha \rho_0 \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial \mathbf{F}} \tag{2.59}$$

$$\eta = -\frac{\partial \psi_0}{\partial \theta} - \sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial \theta} \tag{2.60}$$

Helmholtz serbest enerji fonksiyonu, kısıtsız bölümün sıfıra eşit olması nedeniyle kısıt fonksiyonundan bağımsız halde bulunmaktadır. Kısıt fonksiyonu ile ilişkilendirmek için aşağıdaki serbest enerji fonksiyonu önerilmektedir.

$$\psi = \psi_0(\mathbf{F}, \theta) + \sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha \phi^\alpha(\mathbf{F}, \theta) \tag{2.61}$$

Buradaki eşitlikte de kısıtlı kısım sıfıra eşittir ve Eş. 2.58’de verilen form bozulmamış olur. Bu aşamadan sonra serbest enerji fonksiyonu ile kısıt fonksiyonu aşağıdaki gibi ilişkilendirilebilir.

$$\phi^\alpha = \frac{\partial \psi}{\partial p_\alpha} \tag{2.62}$$

2.5. Kısıtsız Doğrusal Olmayan Termoelastik Cisimler

Eş. 2.47 - Eş. 2.49’da kısıtlı ve kısıtsız bölümlerin toplamı olarak yazılan bünye denklemleri, malzeme özelliklerinin koordinat sistemi hareketlerinden bağımsız olduğunu ifade eden objektivite ilkesine uygun olarak, doğrusal olmayan, anizotrop kısıtsız termoelastik malzemede aşağıdaki gibidir.

$$\psi = \psi(\mathbf{F}, \theta) \tag{2.63}$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{F}, \theta) \tag{2.64}$$

$$\eta = \eta(\mathbf{F}, \theta) \tag{2.65}$$

Oluşturulacak denklemler bünye teorisinin aksiyomlarına uygun olmalıdır. Örnek olarak, uygunluk aksiyomu sağlanmalıdır. Buna göre, bünye denklemleri mekanik uygunluk şartı olan kütlenin, momentumun ve enerjinin korunumunu sağlamalıdır. Termoelastik malzemeler için, deformasyon sonrasında oluşacak süreçte Clausius-Duhem eşitsizliğinin sağlanması ve sıfırdan büyük sıcaklık değerinin oluşması $(\theta > 0)$ beklenir. Bu da termodinamik uygunluğu ifade etmektedir.

Eğer gerilme, iç enerji ve entropi bir potansiyel fonksiyondan türetilebiliyorsa, termoelastik malzeme yukarıda bahsettiğimiz termodinamik uygunluk şartını sağlamış olur. Bu şartın sağlanması düşünülerek, gerilme Eş. 2.66'da verilen şekliyle bir potansiyelden oluşturulabilir. Genellikle büyük deformasyon yapan cisimlerin bulunduğu problemlerde kullanılan birinci Piola – Kirchhoff gerilme tansörü,

$$\mathbf{T} = \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial \mathbf{F}} \quad \text{veya} \quad T_{iR} = \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial F_{iR}} \tag{2.66}$$

olarak sıcaklığın bir fonksiyonu olan W gerilme potansiyelinin **F** deformasyon gradyan tansörüne göre türevi alınarak hesaplanır. Cismin bünyesinde bulunan ve dış etkiler sonucunda değişim gösteren iç enerji ise,

$$e = \frac{1}{\rho_0}\left(\mathrm{W} - \theta \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial \theta}\right) \tag{2.67}$$

olarak yazılır. Benzer şekilde, ortamın mikro boyutlarda rasgele dağılımının ve düzensizliğinin ölçüsü olan entropi de gerilme potansiyelinden aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\eta = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial \theta} \tag{2.68}$$

Son olarak serbest enerji fonksiyonu, gerilme potansiyelinden Eş. 2.69'daki gibi yazılır.

$$\psi = \frac{1}{\rho_0}\mathrm{W} - \theta\eta \tag{2.69}$$

Elastik cisimler için gerilme potansiyeliyle çalışmak uygun olsa da, mutlak sıcaklık ve entropi gibi sıcaklık parametrelerinin de kullanılması gereken bir malzemede serbest enerji fonksiyonunu kullanmak daha uygun olmaktadır [39]. Bu doğrultuda, Eş. 2.66'da verilen birinci Piola – Kirchhoff gerilme tansörü, Eş. 2.67 ve Eş. 2.69'un yardımıyla ve entropi ile sıcaklığın deformasyon gradyanından bağımsız olduğu düşünülerek Eş. 2.70'deki gibi yazılabilir.

$$\mathbf{T} = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}} \quad \text{veya} \quad T_{iR} = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial F_{iR}} \tag{2.70}$$

Aynı şekilde, iç enerji ve entropi de Helmholtz serbest enerji fonksiyonu kullanılarak sırasıyla aşağıdaki gibi gösterilirler.

$$e = \psi + \theta\eta \tag{2.71}$$

$$\eta = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \tag{2.72}$$

2.6. Geliştirilmiş St. Venant – Kirchhoff Malzemeleri İçin Serbest Enerji Fonksiyonu

Serbest enerji fonksiyonu, Eş. 2.73'de görüldüğü gibi deformasyon gradyan tansörünün veya şekil değiştirme tansörlerinin bir fonksiyonu olarak yazılabilir. Bu durumda yazılacak serbest enerji fonksiyonları aynı fonksiyonu ifade eder.

$$\psi = \psi(\mathbf{F}) = \psi(\mathbf{C}) = \psi(\mathbf{E}) \tag{2.73}$$

Bünye denklemini, denklemin parametresinin yani **F**, **C** veya **E** tansörlerinin değişmezleri cinsinden ifade edilebilir. Bu doğrultuda, parametresi sağ Cauchy – Green şekil değiştirme tansörü olan serbest enerji fonksiyonunun asal değişmezler cinsinden ifadesi,

$$\psi = \psi(I_1(\mathbf{C}), I_2(\mathbf{C}), I_3(\mathbf{C})) \tag{2.74}$$

olarak yazılır. Burada **C** sağ Cauchy – Green şekil değiştirme tansörünün değişmezleri aşağıdaki gibidir.

$$I_1(\mathbf{C}) = \operatorname{tr}\mathbf{C} = C_{11} + C_{22} + C_{33} \tag{2.75}$$

$$I_2(\mathbf{C}) = \frac{1}{2}\left[(\operatorname{tr}\mathbf{C})^2 - tr(\mathbf{C}^2)\right] = \operatorname{tr}\mathbf{C}^{-1}\det\mathbf{C} \tag{2.76}$$

$$I_3(\mathbf{C}) = \det\mathbf{C} \tag{2.77}$$

Buna ek olarak şekil değiştirme enerjisi fonksiyonu asal uzamalar cinsinden de ifade edilebilir.

$$\psi = \psi(\mathbf{C}) = \psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \tag{2.78}$$

Gerilmesiz durumda serbest enerji fonksiyonu aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\psi = \psi\left(1,1,1\right) = 0 \tag{2.79}$$

Sonlu deformasyon yapan kauçuk türü malzemeler için Ogden modeli, izotrop kauçuk türü malzemelerin modellenmesinde oldukça kullanışlı olan ve Ogden modelinin özel bir hali olan Mooney – Rivlin, Neo-Hookean ve Varga modelleri, karbon dolgulu sentetik kauçuk türleri için Yeoh modeli, istatistiksel yaklaşımla oluşturulmuş, polimer ortamı tanımlamada zincir modellerini kullanan Arruda ve Boyce Modeli, köpük kauçuk türü malzemeler için Blatz ve Ko modeli sıklıkla kullanılan hiperelastik malzeme modelleri arasında yer almaktadırlar. Bunlara ek olarak sıkıştırılabilir hiperelastik ortamların modellenmesinde fazlaca kullanılan Hadamard – Green malzemeleri ve St. Venant – Kirchhoff malzemeleri doğrusal olmayan malzeme modelleri arasında yer almaktadır.

Bu aşamada, sıkıştırılabilir hiperelastik malzemeler için oluşturulmuş, doğrusal olmayan bir modelin parçası olan Duhamel-Neumann formunda gerilme potansiyel fonksiyonu (ş*ekil değiştirme enerjisi fonksiyonu*) yardımıyla Helmholtz serbest enerji fonksiyonunu elde edeceğiz. Duhamel-Neumann formunda gerilme potansiyel fonksiyonu,

$$W(\mathbf{E}) = \frac{1}{2}\lambda\left(\mathrm{tr}\mathbf{E}\right)^2 + \mu\,\mathrm{tr}\left(\mathbf{E}^2\right) - \kappa_T\beta_0\left(\theta-\theta_0\right)\left(\mathrm{tr}\mathbf{E}\right) \tag{2.80}$$

olarak yazılır. Burada serbest enerji fonksiyonunun parametresi $\mathbf{E}=(\mathbf{C}-\mathbf{I})/2$ Lagrange birim şekil değiştirme tansörü, λ ve μ Lamé sabitleri, $\kappa_T = \lambda + 2\mu/3$ izotermal elastik hacim modülü, β_0 hacimsel ısıl genleşme katsayısı ve θ_0 referans mutlak sıcaklık değeridir. Verilen gerilme potansiyel fonksiyonundan Helmholtz serbest enerji fonksiyonunu elde etmek için bir dizi matematiksel işleme gerek olacaktır. Buna göre, ilk olarak gerilme tansörü yeniden yazılacak ve bir takım integral işlemleri uygulanacaktır. Bu doğrultuda Eş. 2.26’da verilen ikinci Piola-

Kirchhoff gerilme tansörü, Eş. 2.66'ya benzer şekilde gerilme potansiyeli cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\mathbf{P} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}} = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}} \tag{2.81}$$

Eş. 2.80'de verilen gerilme potansiyel fonksiyonunun Lagrange birim şekil değiştirme tansörüne göre türevini alarak ikinci Piola – Kirchhoff gerilme tansörü aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\mathbf{P} = \lambda\left(\mathrm{tr}\mathbf{E}\right)\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E} - \kappa_T \beta_0 \left(\theta - \theta_0\right)\mathbf{I} \tag{2.82}$$

Bu aşamadan sonra Helmholtz serbest enerji fonksiyonunda gerçekleşecek sonsuz küçük bir artış değeri yazılmalıdır. Serbest enerji fonksiyonunun **E** ve θ parametrelerine bağlı olduğu düşünülerek aşağıdaki açılım yazılabilir [42].

$$\mathrm{d}W = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}} \bullet \mathrm{d}\mathbf{E} + \frac{\partial W}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta \tag{2.83}$$

Eş. 2.83, Eş. 2.68 ve Eş. 2.81 yardımıyla aşağıdaki formda yeniden yazılabilir.

$$\mathrm{d}W = \mathbf{P} \bullet \mathrm{d}\mathbf{E} - \rho_0 \eta \mathrm{d}\theta \tag{2.84}$$

Bu artım ifadesinin Maxwell eşitliği aşağıdaki gibidir.

$$\left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \theta}\right)_{\mathbf{E}} = -\rho_0 \left(\frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{E}}\right)_{\theta} \tag{2.85}$$

Eş. 2.82'de verilen ikinci Piola – Kirchhoff gerilme tansörünün sabit sıcaklık altında **E** tansörüne göre türevini alarak ve Eş. 2.85'nın yardımıyla aşağıdaki türev ifadesi elde edilebilir.

$$\rho_0\left(\frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{E}}\right)_\theta = \kappa_T \beta_0 \mathbf{I} \tag{2.86}$$

Entropinin sabit **E** altında sıcaklığa göre türevi,

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial \theta}\right)_\mathbf{E} = \frac{c_{v0}}{\theta_0} \tag{2.87}$$

olacaktır. Eş. 2.86 ve Eş. 2.87'in birlikte integralleri alınarak aşağıdaki entropi ifadesi elde edilir.

$$\eta = \frac{\kappa_T}{\rho_0}\beta_0(\mathrm{tr}\mathbf{E}) + \frac{c_{v0}}{\theta_0}(\theta - \theta_0) + \eta_0 \tag{2.88}$$

Eş. 2.72'ün ve Eş. 2.81'nin ortak olarak integrallerinin alınması ile Helmholtz serbest enerji fonksiyonu, aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\psi(\mathbf{E},\theta) = \frac{1}{2}\frac{\lambda}{\rho_0}(\mathrm{tr}\mathbf{E})^2 + \frac{\mu}{\rho_0}\mathrm{tr}(\mathbf{E}^2) - \frac{\kappa_T \beta_0}{\rho_0}(\theta - \theta_0)(\mathrm{tr}\mathbf{E}) - \frac{c_{v0}}{2\theta_0}(\theta - \theta_0)^2 - \eta_0 \theta \tag{2.89}$$

2.7. Kısıtlama Fonksiyonları

2.7.1. Bir hacim elemanındaki değişim ve sıcaklığa bağlı sıkışma kısıtı

Hacim değişimi ve deformasyon gradyanı ilişkisini gösteren Eş. 2.8, sıcaklığa bağlı sıkışabilirlik kısıtlama fonksiyonunu elde etmemizi sağlayacaktır. Bu fonksiyonla malzeme, sıcaklığın bir fonksiyonu olarak hacim değiştirir. Buna göre hacim değişimi Eş. 2.90'daki gibi ifade edilebilir.

$$\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dV}} = g(\theta) \tag{2.90}$$

Bu durumda, deformasyon gradyan tansörünün ve mutlak sıcaklığın bir fonksiyonu olan kısıtlama eşitliği, aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\det \mathbf{F} = g(\theta) \quad \text{veya} \quad \phi(\mathbf{F},\theta) = \det \mathbf{F} - g(\theta) = 0 \tag{2.91}$$

Burada $g(\theta)$ sıfırdan büyük olacak şekilde seçilen ve malzemede sıcaklık değişimiyle birlikte hacim değişimini veren fonksiyondur. $\mathrm{g}(\theta)$ fonksiyonu için sıcaklığa bağlı bir yoğunluk değişmesi düşünülebilir. Eğer $\rho = \rho(\theta)$ ise, kısıtlama denklemimiz,

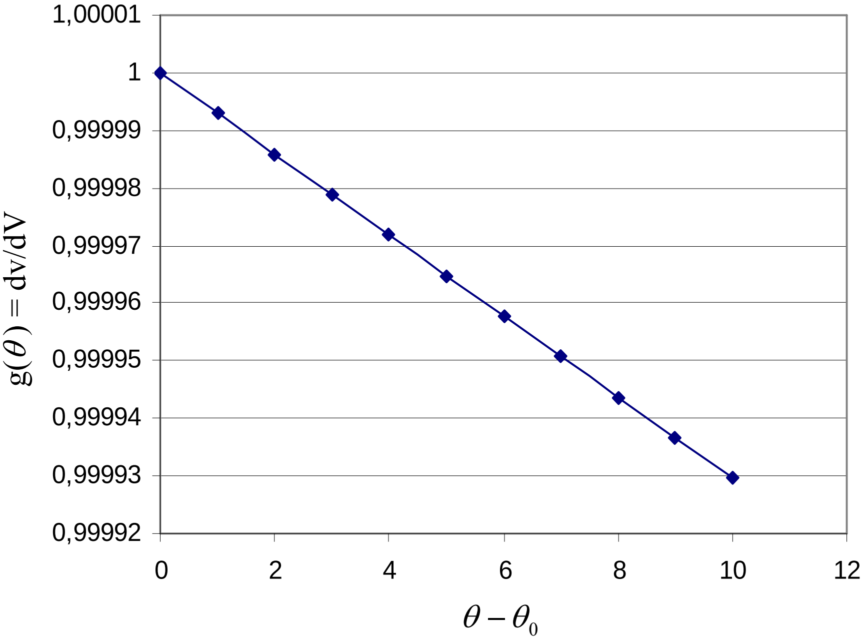
$$\phi(\mathbf{F},\theta) = \rho_0 - \rho(\theta)\det \mathbf{F} = 0 \tag{2.92}$$

halini alır. Böyle bir yaklaşım, [35] de verilen çalışmada da karşımıza çıkmaktadır. Burada yoğunluk, mutlak sıcaklığın lineer bir fonksiyonu olarak düşünülmüştür. Buna göre,

$$\rho = \rho_0\left(1 + \alpha\frac{\theta - \theta_0}{\theta_0}\right) \tag{2.93}$$

ve kısıt fonksiyonunda yer alan $\mathrm{g}(\theta)$ fonksiyonu Eş. 2.94'deki hali almaktadır.

$$g(\theta) = \left(1 + \alpha\frac{\theta - \theta_0}{\theta_0}\right)^{-1} \quad \text{ve} \quad \phi = \det \mathbf{F} - \left(1 + \alpha\frac{\theta - \theta_0}{\theta_0}\right)^{-1} \tag{2.94}$$



Şekil 2.10. Eş. 2.94$_1$'de verilen hacim değişimi

Bu fonksiyona göre referans konumunda ($\theta = \theta_0$) mekanik sıkışmaz olan bir cisim için ortam sıcaklığı arttıkça doğrusal azalan bir yoğunluk fonksiyonu kullanılmıştır (Şekil 2.10). Diğer bir $g(\theta)$ fonksiyonu [36]'da verilmektedir. Burada sıcaklık ile artan bir yoğunluk fonksiyonu kullanılmıştır. Buna göre,

$$g(\theta) = e^{\alpha(\theta-\theta_0)} \quad \text{ve} \quad \phi = \det \mathbf{F} - e^{\alpha(\theta-\theta_0)} \tag{2.95}$$

olarak seçilebilmektedir.

2.7.2. Bir çizgi elemanındaki değişim ve sıcaklığa bağlı uzama kısıtı

Bir çizgi elemanında **e** birim vektörü doğrultusundaki uzama oranı $\lambda = l/l_0$ ve uzama vektörü Eş. 2.12'ye benzer şekilde,

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{F}\,\mathbf{e} \quad \text{veya} \quad \lambda_k = F_{iK} e_K \tag{2.96}$$

olarak yazılabilir. Burada **e** referans konumundaki birim vektörü ve kısıtlamanın bulunduğu doğrultuyu göstermektedir. Skaler bir büyüklük elde etmek için uzama oranının kendisiyle nokta çarpımı aşağıdaki sonucu verecektir.

$$\lambda^2 = \mathbf{Fe} \bullet \mathbf{Fe} \quad \text{veya} \quad \lambda^2 = F_{iK} F_{iR} e_K e_R \tag{2.97}$$

Sıcaklığa bağlı sıkışma kısıtlama fonksiyonunda olduğu gibi, sıcaklığa bağlı uzamada da oluşturulacak kısıt denklemi sıcaklığın ve deformasyon gradyanın bir fonksiyonudur. Sıcaklığa bağlı uzama oranı,

$$\lambda^2 = h(\theta) \tag{2.98}$$

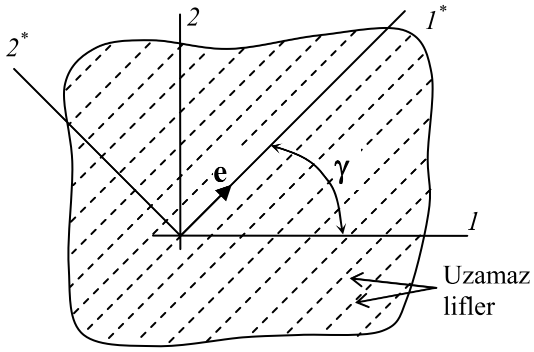
ve sıcaklığa bağlı uzama kısıtlama fonksiyonu deformasyon gradyanı cinsinden aşağıdaki gibi yazılır.

$$\mathbf{Fe} \bullet \mathbf{Fe} = h(\theta) \quad \text{veya} \quad \phi(\mathbf{F}) = \mathbf{Fe} \bullet \mathbf{Fe} - h(\theta) = 0 \tag{2.99}$$

Burada $h(\theta)$ fonksiyonu, sıfırdan büyük değer alan bir fonksiyondur. Ortam, **e** birim vektörü doğrultusunda sadece sıcaklığa bağlı olarak uzama yapacak, diğer doğrultularda da bu kısıtlamaya bağlı olarak şekil değiştirme yapacaktır. Yapılan zayıf şok dalgası hız hesaplamalarında kullanılan örnek $h(\theta)$ fonksiyonu Bölüm 4.1'de verilmektedir.

2.7.3. Saf mekanik kısıtlama fonksiyonları

Saf mekanik kısıtlamalar, sıcaklığın etkisinin olmadığı, sadece mekanik etkiler sonucunda malzemenin uymak zorunda olduğu sınırlamalardır. Yazılacak kısıtlama fonksiyonu yalnızca deformasyon gradyan tansörüne bağlıdır. Eş. 2.91'de sıcaklık etkilerini kaldırarak sıkışmaz bir malzeme için kısıtlama fonksiyonunu aşağıdaki gibi yazabiliriz.



Şekil 2.11. γ açısıyla yerleştirilmiş uzamaz liflerle kuvvetlendirilmiş ortam

$$\det \mathbf{F} = 1 \quad \text{veya} \quad \phi(\mathbf{F}) = \det \mathbf{F} - 1 = 0 \tag{2.100}$$

Ayrıca, Şekil 2.11'de gösterilen ve **e** doğrultusunda uzamaz liflerle oluşturulmuş bir malzeme için Eş. 2.99'da bulunan sıcaklık parametresi kaldırılarak aşağıdaki kısıt fonksiyonu yazılabilir.

$$\mathbf{Fe} \bullet \mathbf{Fe} = 1 \quad \text{veya} \quad \phi(\mathbf{F}) = \mathbf{Fe} \bullet \mathbf{Fe} - 1 = 0 \tag{2.101}$$

Eş. 2.101 bir doğrultuda uzamaz malzeme için kısıt fonksiyonudur.

3. TEKİLLİK YÜZEYLERİ VE DALGA YAYILMASI

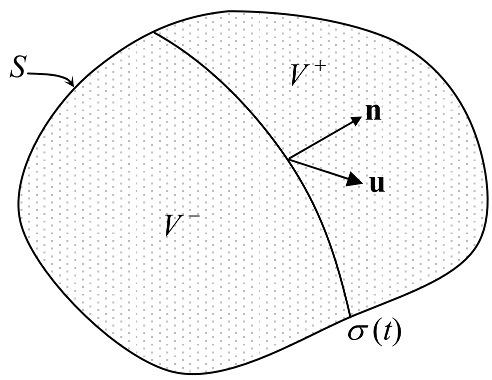
3.1. Tekillik Yüzeyleri

Tekillik yüzeyi, ortamda sürekli olan bir fonksiyonun bu yüzey üzerinde sonlu bir sıçrama yaptığı ve sürekli ortamı ikiye ayıran yüzey olarak tanımlanabilir. Bu yüzey referans koordinat sisteminde $\Sigma(\mathbf{X}, t) = 0$ ve uzaysal koordinat sisteminde $\sigma(\mathbf{x},t) = 0$ eşitlikleriyle gösterilebilir. Herhangi bir şekle sahip olabilecek bu yüzey, sürekli ve türevi alınabilir bir fonksiyon ile gösterilebilmelidir.

Şekil 3.1'de verilen $\sigma(t)$ tekillik yüzeyinin ilerisinde bulunan bölge (V^+) ve gerisinde bulunan bölge (V^-) içerisinde sürekli bir $\varphi(\mathbf{x},t)$ fonksiyonun, $\sigma(t)$ yüzeyinin sonsuz küçük ilerisindeki değeri φ^+ ve sonsuz küçük gerisindeki değeri φ^- olarak gösterilmektedir. Bu fonksiyon için, yüzey ilerisindeki ve gerisindeki değerler arasındaki fark,

$$[[\varphi]] = \varphi^+ - \varphi^- \tag{3.1}$$

olarak ifade edilmektedir. Bu değerin sıfırdan farklı olması durumunda, $\sigma(t)$ yüzeyi *tekillik yüzeyi* adını alır. Buradaki sıçrama fonksiyonun kendisinde veya türevlerinde



Şekil 3.1. **n** yüzey normal vektörü, **u** yayılma hızı ile sürekli ortamı ikiye ayıran σ(t) tekillik yüzeyi

gerçekleşebilir. Bu doğrultuda sıçramanın mertebesine göre bir sınıflandırma yapmak mümkün olmaktadır. Bu sınıflandırmaya göre, $[\![\varphi]\!] \neq 0$ ise sıfırıncı mertebeden tekillik yüzeyi, $[\![\dot{\varphi}]\!] \neq 0$ olduğu durumda birinci mertebeden tekillik yüzeyi ve $[\![\ddot{\varphi}]\!] \neq 0$ ise ikinci mertebeden tekillik yüzeyi olmaktadır. Yapılan bu sınıflandırmaya örnek teşkil edecek şekil değiştirme durumları Bölüm 3.2'de verilmektedir.

Tekillik yüzeyinin durağan olmadığı durumda, sürekli ortamda ilerleme hızları $\Sigma(\mathbf{X},t)$ ve $\sigma(\mathbf{x},t)$ yüzeyleri için sırasıyla,

$$U_{\mathrm{N}} = \mathbf{U} \bullet \mathbf{N} = -\frac{1}{|\mathrm{Grad}\,\Sigma|}\frac{\partial \Sigma}{\partial t} \tag{3.2}$$

$$u_{\mathrm{n}} = \mathbf{u} \bullet \mathbf{n} = -\frac{1}{|\mathrm{Grad}\,\sigma|}\frac{\partial \sigma}{\partial t} \tag{3.3}$$

ifadeleriyle elde edilebilir. Burada U_N ve u_n , referans ve uzay konumlarında yüzey normali doğrultusunda yayılma hızlarıdır. Bu yüzey normalleri birim normal vektörler olarak sırasıyla,

$$\mathbf{N} = \frac{\mathrm{Grad}\,\Sigma}{|\mathrm{Grad}\,\Sigma|} \tag{3.4}$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathrm{Grad}\,\sigma}{|\mathrm{Grad}\,\sigma|} \tag{3.5}$$

ifadeleriyle verilmektedir. Referans ve uzay konumundaki yüzeyler aynı yüzey oldukları için Eş. 3.6 geçerlidir ve bu ifadenin zaman türevleri alınarak Eş. 3.7 aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$\Sigma(\mathbf{X}, t) = \sigma(\mathbf{x}(\mathbf{X},\mathrm{t}), t) \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \quad \text{veya} \quad \Sigma_{,K} = \sigma_k x_{k,K} \tag{3.8}$$

Burada $\partial \mathbf{x} / \partial t$, yüzey üzerine rast gelen herhangi bir maddesel noktanın hızıdır ve $\mathbf{v}$ ile gösterilir. Eş. 3.7, Eş. 3.2'de yerine yazılarak

$$U_{\mathrm{N}} = \frac{|\mathrm{Grad}\sigma|}{|\mathrm{Grad}\,\Sigma|}\left(u_{\mathrm{n}} - v_{\mathrm{n}}\right) \tag{3.9}$$

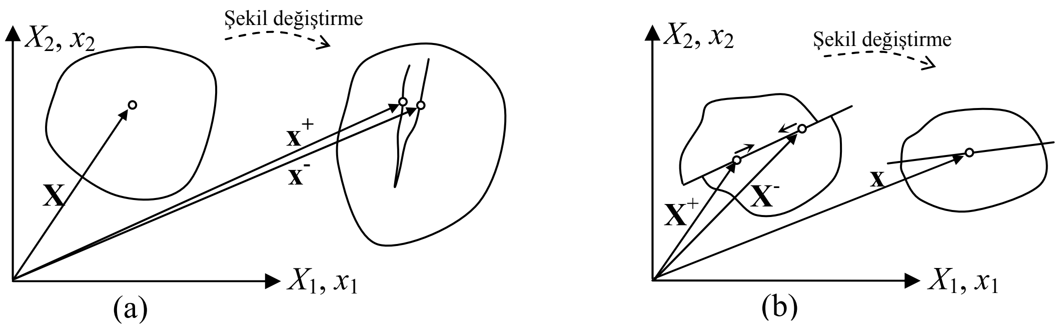
elde edilebilir. Burada $v_{\mathrm{n}} = \mathbf{v} \bullet \mathbf{n}$ yukarıda bahsedilen maddesel noktanın hızının normal bileşenidir. Yerel yayılma hızı,

$$U \equiv u_{\mathrm{n}} - v_{\mathrm{n}} \tag{3.10}$$

olarak tanımlıdır. Durağan tekillik yüzeyi olmaması durumunda yani U_{N} veya U hızı sıfırdan farklı bir değere sahip olması halinde yüzey *dalga* adını almaktadır.

3.2. Tekillik Yüzeylerinin Sınıflandırılması

Tekillik yüzeyleri teorisi içerisinde dalga yayılma problemi ele alındığında, yüzey hareketin oluşturduğu süreksizliğe göre sınıflandırma yapılmaktadır. Burada $\varphi \equiv \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ olarak kabul ederek devam edilecek olursa, dalga eşiği yani ilerleyen tekillik yüzeyi, geçtiği noktada ortamda bir etki oluşturur. Oluşabilecek etkilerden ilki, ortam noktalarının konum vektörlerinde yani $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ fonksiyonunun kendisinde oluşabilecek bir sıçramadır. Sıfırıncı mertebeden tekillik yüzeyine karşılık gelen bu durumda deformasyonlar süreksizdir. Şekil 3.2'de gösterilen ve başlangıçta $\mathbf{X}$ konum vektörü ile gösterilen bir nokta, t anında tekillik yüzeyi üzerinde $\mathbf{x}^{+}$ ve $\mathbf{x}^{-}$ olarak iki



Şekil 3.2. Sıfırıncı mertebeden tekillik yüzeyi örnekleri, a) çatlak b) birbiri üzerinde kayan yüzeyler

ayrı yer işgal eder. Örnek olarak; çatlak, birbiri üzerinde kayan yüzeyler, kaynak ve yırtılma verilebilir.

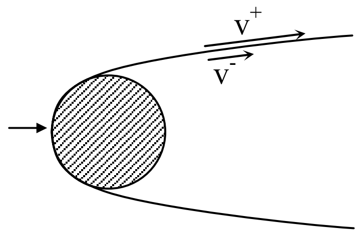
$$[\![\mathbf{x}]\!] \neq 0 \quad \textit{(çatlak)} \tag{3.11}$$

Sürekli ortam içerisinde ilerleyen tekillik yüzeyinin ortamda yaratabileceği diğer bir etki olarak, ortam noktasının hızında gerçekleşen bir sıçrama düşünülebilir. Bu durum ise birinci mertebe tekillik yüzeyine karşılık gelmektedir. Bu yüzeyler, tekillik yüzeyi üzerine rast gelen ortam noktalarının deformasyonunun birinci zaman türevinin süreksiz olduğu yüzeylerdir. Vorteks yüzeyleri ve şok dalgaları bu grup tekilliklerdendir. Şekil 3.3'de gösterilen vorteks yüzeyi için tekillik yüzeyi üzerinde hızın normal bileşeni sürekli, ancak teğetsel doğrultudaki bileşeninde sonlu bir sıçramanın oluşmaktadır. Şok dalgalarında ise hızın her iki bileşeni de süreksizdir.

$$[\![\mathbf{x}]\!] = 0\,,\ [\![\dot{x}_{\mathrm{n}}]\!] = 0\,,\ [\![\dot{\mathbf{x}}]\!] \neq 0 \quad \textit{(vorteks yüzeyi üzerinde)} \tag{3.12}$$

Eringen ve Şuhubi [39], şok dalgalarını ve vorteks yüzeylerini birbirleriden ayırmadan ele almışlardır. Bu iki örnek, birinci mertebe tekillikler olarak şok dalgaları adı altında toplanmıştır.

$$[\![\mathbf{x}]\!] = 0\,,\ [\![\dot{\mathbf{x}}]\!] \neq 0 \quad \textit{(şok dalgası eşiğinde)} \tag{3.13}$$



Şekil 3.3. Birinci mertebe tekillik yüzeyi örneği, vorteks yüzeyi [38]

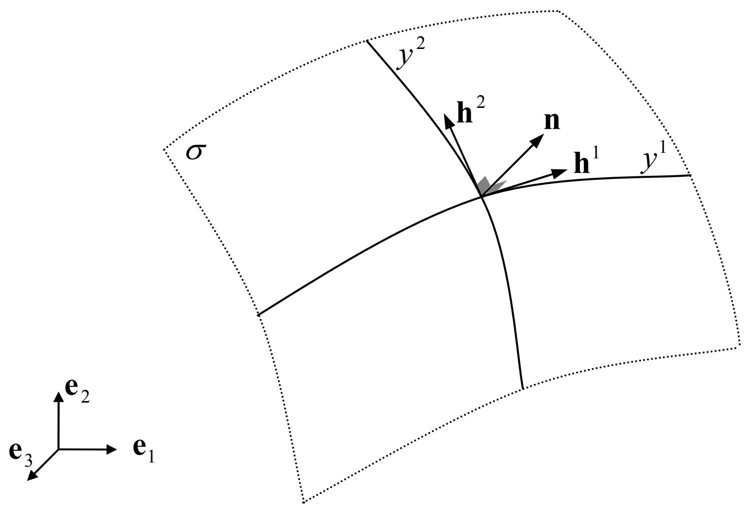
Burada örneklenecek son etki ise, deformasyon ve hızın sürekli olduğu ancak ortamı oluşturan noktaların ivmelerinde sıçramaların bulunduğu tekillik yüzeyleridir. İkinci mertebe tekillik yüzeyleri olarak isimlendirilen bu tekillik yüzeylerine deformasyonların ikinci zaman türevinde sonlu bir sıçrama oluşmaktadır. İkinci mertebeden hareketli tekillik yüzeyleri akustik tekilliklerdir ve ses dalgaları veya ivme dalgaları olarak da adlandırılır. Ayrıca bu tür tekillikler, zayıf tekilliklerdir ve kuvvetli şok dalgalarının zayıflamasıyla da oluşmaktadır.

$$[\![\mathbf{x}]\!] = 0\,,\ [\![\dot{\mathbf{x}}]\!] = 0\,,\ [\![\ddot{\mathbf{x}}]\!] \neq 0 \ \textit{(ivme dalgası eşiğinde)} \tag{3.14}$$

3.3. Tekillik Yüzeyleri İçin Uygunluk Şartları

Tekillik yüzeyleri teorisinin oluşturulmasında önemli bir başlangıç noktası Hadamard önermesidir. Buna göre, σ yüzeyi ile ayrılan V^+ ve V^- bölgelerinin her birinde sürekli olarak tanımlanan bir $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$ fonksiyonunun yüzeyin hemen ilerisinde ve gerisinde sırasıyla $\varphi^+, (\partial\varphi/\partial\mathbf{x})^+$ ve φ^-, $(\partial\varphi/\partial\mathbf{x})^-$ limitlerinin var olduğunu düşünelim. Bu yüzey üzerinde bulunan ve $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ fonksiyonu ile tanımlı bir eğri üzerinde φ^+ ve φ^- fonksiyonlarının s parametresine göre türevi alınabilir olduğu kabulüyle, fonksiyonun limit değerleri için aşağıdaki türevler zincir kuralı kullanılarak yazılabilir.

$$\frac{d\varphi^+}{ds} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^+ \frac{dx_i}{ds} \tag{3.15}$$



Şekil 3.4. σ tekillik yüzeyi üzerinde tanımlanmış y^α eğrisel koordinatları ve $\mathbf{h}^\alpha$ teğet vektörleri ($\mathbf{n}\bullet\mathbf{h}^1=0$ ve $\mathbf{n}\bullet\mathbf{h}^2=0$)

$$\frac{d\varphi^-}{ds}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^-\frac{dx_i}{ds} \tag{3.16}$$

Eş. 3.16'dan Eş. 3.15 çıkarılarak aşağıdaki sıçrama eşitliği elde edilebilir.

$$\frac{d}{ds}[\![\varphi]\!]=[\![\varphi_{,i}]\!]\frac{dx_i}{ds} \tag{3.17}$$

Tekillik yüzeyi üzerinde bulunan bir eğrisel koordinat sistemi Şekil 3.4'de gösterilen y^1 ve y^2 koordinat eksen takımı ile tanımlanabilir. Bu koordinat sistemine ait olan teğet vektörlerimiz $\mathbf{h}^1$ ve $\mathbf{h}^2$ vektörleri yüzey normal vektörüne dik olacaktır. Bu vektörler birim vektör olmak ve birbirine dik olmak durumunda değildir. Eş. 3.17'de verilen sıçrama eşitliğinde bulunan ve tekillik yüzeyi üzerindeki her hangi bir eğriye ait olan s parametresini eğrisel koordinat ekseni parametresi olan y^α ile değiştirerek aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$[\![\varphi]\!]_{,\alpha}=[\![\varphi_{,i}]\!]\,h^\alpha_{\ i} \tag{3.18}$$

Burada, $h^{\alpha}_{i} = \dfrac{dx_i}{dy^{\alpha}}$ Şekil 3.4'de gösterilen y^1 ve y^2 eğrisel koordinatları üzerinde yer alan $\mathbf{h}^{\alpha}$ (α = 1,2) teğet vektörünün i. kartezyen bileşenidir (i=1,2,3). $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$ skaler fonksiyonunun gradyanının, normal ve teğetsel bileşenlerinin toplamı cinsinden ifadesini veren geometrik uygunluk şartı aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$[\![\varphi_{,i}]\!] = [\![\varphi_{,k} n_k]\!] n_i + [\![\varphi]\!]_{,\alpha} h^{\alpha}_{i} \tag{3.19}$$

$$[\![Grad\varphi]\!] = [\![Grad\varphi \bullet \mathbf{n}]\!]\mathbf{n} + \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial [\![\varphi]\!]}{\partial y^{\alpha}} \mathbf{h}^{\alpha} \tag{3.20}$$

Buradaki $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$ fonksiyonunun tekillik yüzeyi üzerinde sürekli olması halinde Maxwell denklemine ulaşılmaktadır.

$$[\![\varphi]\!] = 0 \rightarrow [\![\varphi_{,i}]\!] = [\![\varphi_{,k} n_k]\!] n_i \tag{3.21}$$

İkinci mertebe geometrik uygunluk şartı ise aşağıdaki gibi yazılabilir. Bu eşitliğin çıkarılışı için Ekler bölümüne bakılabilir.

$$\begin{aligned}[\![Grad(Grad\varphi)]\!] = {} & [\![\mathbf{n} \bullet Grad(Grad\varphi)\mathbf{n}]\!]\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + [\![Grad\varphi \bullet \mathbf{n}]\!]_{,\alpha} \mathbf{h}^{\alpha} \otimes \mathbf{n} \\ & + [\![Grad\varphi \bullet \mathbf{n}]\!]_{,\alpha} \mathbf{n} \otimes \mathbf{h}^{\alpha} - [\![Grad\varphi \bullet \mathbf{n}]\!]\mathbf{n} \bullet \frac{\partial \mathbf{h}^{\gamma}}{\partial y^{\alpha}} \left(\mathbf{h}^{\gamma} \otimes \mathbf{h}^{\alpha}\right)\end{aligned} \tag{3.22}$$

φ skaler fonksiyonu yerine v vektörü kullanarak Eş. 3.19 ve Eş. 3.20 aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$[\![v_{i,j}]\!] = [\![v_{i,k} n_k]\!] n_j + [\![v_i]\!]_{,\alpha} h^{\alpha}_{j} \tag{3.23}$$

$$[\![Grad\ \mathbf{v}]\!] = [\![(Grad\mathbf{v})\,\mathbf{n}]\!] \otimes \mathbf{n} + [\![\varphi]\!]_{,\alpha} \otimes \mathbf{h}^{\alpha} \tag{3.24}$$

Benzer şekilde Eş. 3.22, **v** vektörü için aşağıdaki hali alır.

$$\begin{aligned}[\![Grad(Grad\ \mathbf{v})]\!] &= [\![Grad(Grad\ \mathbf{v})(\mathbf{n},\mathbf{n})]\!] \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \\ &+ [\![(Grad\mathbf{v})\,\mathbf{n}]\!]_{,\alpha} \otimes \mathbf{h}^{\alpha} \otimes \mathbf{n} + [\![(Grad\mathbf{v})\,\mathbf{n}]\!]_{,\alpha} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{h}^{\alpha} \\ &- [\![(Grad\mathbf{v})\,\mathbf{n}]\!]\left(\mathbf{n} \bullet \frac{\partial \mathbf{h}^{\gamma}}{\partial y^{\alpha}}\right) \otimes \mathbf{h}^{\gamma} \otimes \mathbf{h}^{\alpha}\end{aligned} \tag{3.25}$$

Bu aşamaya kadar elde edilen eşitlikler, hareketin geometrisi ve tekillik yüzeyi üzerindeki sıçramaları veren eşitliklerdir. Bundan sonra zamanla değişim ve sıçrama eşitlikleri elde edilecektir. Skaler, vektör veya tansör tanımlı bir fonksiyonun tekillik yüzeyi üzerinde zaman türevindeki sıçrama ifadesini oluşturmak için tekillik yüzeyi üzerinde hareket eden bir gözlemcinin fonksiyonun zaman türevini nasıl ölçtüğüne bakmak gerekir [32]. Gözlemci tekillik yüzeyinin hızıyla aynı hızda hareket ettiği durumda hızı u_n olacaktır ve aşağıdaki zaman değişimini ölçecektir.

$$\frac{\delta\varphi}{\delta t} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + u_n \frac{\partial\varphi}{\partial \mathbf{x}} \bullet \mathbf{n} \tag{3.26}$$

Burada $\delta/\delta t$, delta türevi veya yer değiştirme türevi olarak adlandırılır [31] ve yüzey normal hızında hareket eden bir gözlemciye göre ölçülen zaman türevini verir.

Eş. 3.26'nın tekillik yüzeyi üzerindeki sıçrama eşitliği ise aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{\delta}{\delta t}[\![\varphi]\!] = [\![\dot{\varphi}]\!] + u_n [\![Grad\varphi]\!] \bullet \mathbf{n} \tag{3.27}$$

φ skaler fonksiyonu yerine **v** vektörü yazarak,

$$\frac{\delta}{\delta t}[\![\mathbf{v}]\!] = [\![\dot{\mathbf{v}}]\!] + u_n [\![Grad\mathbf{v}]\!]\mathbf{n} \tag{3.28}$$

elde edilebilir. Eş. 3.28 kinematik uygunluk şartı olarak adlandırılır. φ skaler fonksiyonu, tekillik yüzeyi üzerinde sürekli bir fonksiyonsa, zamanla değişim için aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$[\![\dot{\varphi}]\!] = -u_n [\![Grad\varphi]\!] \bullet \mathbf{n} \tag{3.29}$$

Benzer şekilde, **v** vektör fonksiyonunun tekillik yüzeyi üzerinde sürekli olması durumunda Eş. 3.28 yardımıyla,

$$[\![\dot{\mathbf{v}}]\!] = -u_n [\![Grad\mathbf{v}]\!]\mathbf{n} \tag{3.30}$$

elde edilir. Böylece u_n normal hızıyla yayılan bir yüzey üzerinde fonksiyonun zaman türevindeki sıçrama, hız, gradyan ve birim normal vektör cinsinden elde edilmiş olmaktadır. Eş. 3.27 ve Eş. 3.28'de φ ve **v** fonksiyonu yerine sırasıyla $\dot{\varphi}$ ve $\dot{\mathbf{v}}$ yazacak olursak tekrarlı kinematik uygunluk şartını elde ederiz.

$$\frac{\delta}{\delta t}[\![\dot{\varphi}]\!] = [\![\ddot{\varphi}]\!] + u_n [\![Grad\dot{\varphi}]\!] \bullet \mathbf{n} \tag{3.31}$$

$$\frac{\delta}{\delta t}[\![\dot{\mathbf{v}}]\!] = [\![\ddot{\mathbf{v}}]\!] + u_n [\![Grad\,\dot{\mathbf{v}}]\!]\mathbf{n} \tag{3.32}$$

$\dot{\varphi}$ ve $\dot{\mathbf{v}}$'nin σ tekillik yüzeyi üzerinde sürekli olması halinde sırasıyla aşağıdaki sıçrama ifadelerine ulaşılır.

$$[\![\ddot{\varphi}]\!] = -u_n [\![Grad\dot{\varphi}]\!] \bullet \mathbf{n} \tag{3.33}$$

$$[\![\ddot{\mathbf{v}}]\!] = -u_n [\![Grad\,\dot{\mathbf{v}}]\!]\mathbf{n} \tag{3.34}$$

Benzer şekilde Eş. 3.17'de φ yerine $\dot{\varphi}$ yazacak olursak,

$$[[\dot{\varphi}_{,i}]] = [[\dot{\varphi}_{,k} n_k]] n_i + [[\dot{\varphi}]]_{,\alpha} h^{\alpha}_{\ i} \tag{3.35}$$

veya

$$[[Grad\,\dot{\varphi}]] = [[(Grad\,\dot{\varphi}) \bullet \mathbf{n}]]\mathbf{n} + \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial [[\dot{\varphi}]]}{\partial y^{\alpha}} \mathbf{h}^{\alpha} \tag{3.36}$$

elde edilebilir. Eş. 3.35 ve Eş. 3.36 da tekrarlı kinematik uygunluk şartlarıdır. Eş. 3.31'e alternatif olarak aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$[[\ddot{\varphi}]] = -2u_n \frac{\delta [[Grad\varphi]] \bullet \mathbf{n}}{\delta t} + u_n^{\ 2} [[\mathbf{n} \bullet Grad(Grad\varphi)\mathbf{n}]] - [[Grad\varphi]] \bullet \mathbf{n} \frac{\delta u_n}{\delta t} \tag{3.37}$$

Bu ifade Thomas tekrarlı kinematik uygunluk şartıdır. Tekillik yüzeyleri teorisinde kullanılacak diğer bir eşitlik de sürekli bir φ skaler fonksiyonu için Eş. 3.27 yardımıyla aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$[[Grad\varphi]] \bullet \mathbf{n} = \frac{1}{u_n} [[\dot{\varphi}]] \tag{3.38}$$

3.4. Tekillik Yüzeyi İçeren Sürekli Ortamlarda Temel Denge Denklemleri

Denge denklemlerinin teşkilinde aşağıda verilen *integral teoremleri* sıklıkla kullanılmaktadır. Hacmi V olan ve bünyesinde $\mathbf{u}$ hızıyla ilerleyen $\sigma(t)$ tekillik yüzeyi bulunan bir ortamda herhangi bir ϕ alanı için hacim integralinin zaman türevi [41],

$$\frac{d}{dt} \int_{V\text{-}\sigma} \phi\, dV = \int_{V-\sigma} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathrm{div}(\phi\, \mathbf{v}) \right) dV + \int_{\sigma} [[\phi(\mathbf{v} - \mathbf{u})]] \bullet \mathbf{n} da \tag{3.39}$$

ifadesiyle hesaplanabilir. Aynı ortam için *Gauss İntegral Teoremi*,

$$\frac{d}{dt}\int_{S\text{-}\sigma}\tau_k d\mathrm{a}_k = \int_{V-\sigma}\tau_{k,k}dV + \int_{\sigma}[[\tau_k]]\, n_k\, da \tag{3.40}$$

Bu iki integral teoremi kullanarak yerel denge denklemleri oluşturulacaktır.

3.4.1. Kütlenin korunumu

Eş. 2.27'de verilen kütlenin korunumu denklemi, bünyesinde süreksizlik yüzeyi bulunan bir ortamda aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$\frac{d}{dt}\int_{V\text{-}\sigma}\rho\, dV = 0 \tag{3.41}$$

Eş. 3.39'da verilen integral teoremi kullanılarak kütlenin korunumu yerel formda aşağıdaki gibi yazılır.

$$\frac{d}{dt}\int_{V\text{-}\sigma}\rho\, dV = \int_{V-\sigma}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\,\mathbf{v})\right]dV + \int_{\sigma}[[\rho(\mathbf{v}-\mathbf{u})]]\bullet\mathbf{n}\, da \tag{3.42}$$

Sürekli ortamlar mekaniğindeki tüm denge denklemleri ortamı oluşturan her noktada ve süreksizlik yüzeyi üzerinde geçerlidir. Eş. 3.42'de yazılan yerel formda kütlenin korunumu ifadesinden tekillik yüzeyi üzerinde geçerli olan ve ortamın diğer bölgesi için ayrı ayrı aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\,\mathbf{v}) = 0 \quad (V-\sigma\ \ \textit{hacminde}) \tag{3.43}$$

$$[[\rho(\mathbf{v}-\mathbf{u})]]\bullet\mathbf{n} = 0 \quad (\sigma\ \ \textit{yüzeyinde üzerinde}) \tag{3.44}$$

Eş. 3.43 ve Eş. 3.44 süreksizlik yüzeyi içeren bir ortam için kütlenin korunumu ve yüzey üzerindeki sıçrama şartını veren eşitliklerdir.

3.4.2. Momentumun korunumu

Toplam momentumun zamanla değişimi, ortama etki eden net kuvvete eşit olacaktır. Bunu tekillik yüzeyi içeren bir ortam için yazacak olursak,

$$\frac{d}{dt}\int_{V\text{-}\sigma} \rho\,\mathbf{v}\,dV = \int_{S-\sigma} \mathbf{t}_k da_k + \int_{V-\sigma} \rho\,\mathbf{f}\,dV \tag{3.45}$$

Burada $\mathbf{t}_k$ vektörü ortamın dış yüzeyine etkiyen yüzey gerilme kuvveti ve $\mathbf{f}$ ortamda bulunan kütle kuvvetlerini temsil etmektedir. Eş. 3.40'da verilen Gauss integral teoremini kullanarak $(S-\sigma)$ yüzey integralini, hacim ve (σ) yüzey integrallerine ayrıştıracak olursak,

$$\frac{d}{dt}\int_{\text{S-}\sigma} \mathbf{t}_k d\mathrm{a}_k = \int_{V-\sigma} \mathbf{t}_{k,k} dV + \int_{\sigma} [[\mathbf{t}_k]]\, n_k da \tag{3.46}$$

$$\frac{d}{dt}\int_{V\text{-}\sigma} \rho\,\mathbf{v}\,dV = \int_{V-\sigma} \left(\mathbf{t}_{k,k} + \rho\,\mathbf{f}\right) dV + \int_{\sigma} [[\mathbf{t}_k]]\, n_k da \tag{3.47}$$

Eş. 3.39'da verilen integral teoremini kullanarak, Eş. 3.47'nin sol tarafındaki zaman türevi aşağıdaki gibi oluşturulabilir.

$$\frac{d}{dt}\int_{\text{V-}\sigma} (\rho\,\mathbf{v}) d\mathrm{V} = \int_{\text{V}-\sigma} \left[\frac{\partial(\rho\,\mathbf{v})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\,\mathbf{v}\,\mathbf{v})\right] d\mathrm{V} + \int_{\sigma} [[(\rho\,\mathbf{v})(\mathbf{v}-\mathbf{u})]] \bullet \mathbf{n}\, da \tag{3.48}$$

$$\int_{\text{V}-\sigma} \left[\frac{\partial(\rho\,\mathbf{v})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\,\mathbf{v}\,\mathbf{v})\right] d\mathrm{V} + \int_{\sigma} [[\rho\,\mathbf{v}(\mathbf{v}-\mathbf{u})]] \bullet \mathbf{n}\,\mathrm{da} = \int_{\text{V}-\sigma} \left(\mathbf{t}_{k,k} + \rho\,\mathbf{f}\right) d\mathrm{V} + \int_{\sigma} [[\mathbf{t}_k]]\, n_k da$$

$$\int_{V-\sigma}\left[\frac{\partial(\rho\,\mathbf{v})}{\partial t}+\left(\rho\,\mathbf{v}\,v_k\right)_{,k}\right]d\mathrm{V}+\int_{\sigma}[[\rho\,\mathbf{v}(v_k-u_k)]]n_{\mathrm{k}}\ \mathrm{da}=\int_{V-\sigma}\left(\mathbf{t}_{k,k}+\rho\,\mathbf{f}\right)d\mathrm{V}+\int_{\sigma}[[\mathbf{t}_k]]\,n_k da$$

$$\int_{V-\sigma}\left[\frac{\partial(\rho\,\mathbf{v})}{\partial t}+\left(\rho\,\mathbf{v}\,v_k\right)_{,k}-\mathbf{t}_{k,k}-\rho\,\mathbf{f}\right]d\mathrm{V}+\int_{\sigma}[[\rho\,\mathbf{v}(v_k-u_k)-\mathbf{t}_k]]n_{\mathrm{k}}\ \mathrm{da}=0 \qquad (3.49)$$

$$\frac{\partial(\rho\,\mathbf{v})}{\partial t}+\left(\rho\,\mathbf{v}\,v_k\right)_{,k}-\mathbf{t}_{k,k}-\rho\,\mathbf{f}=0 \quad (\mathrm{V}-\sigma\ \ hacminde) \qquad (3.50)$$

$$[[\rho\,\mathbf{v}(v_k-u_k)-\mathbf{t}_k]]n_k=0 \quad (\sigma\ \ yüzeyi\ üzerinde) \qquad (3.51)$$

Eş. 3.50 ve Eş. 3.51, süreksizlik yüzeyi içeren ortam için momentumun korunumu ifadesi ve tekillik yüzeyi üzerindeki sıçrama şartını veren ifadelerdir. Eş. 3.50'de verilen terimleri daha açık olarak yazarak,

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho}{\partial x_k}v_k+\rho\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\right)\mathbf{v}+\rho\left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x_k}v_k\right)-\frac{\partial\,\mathbf{t}_k}{\partial x_k}-\rho\,\mathbf{f}=0$$

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x_k}v_k=\dot{\mathbf{v}}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho}{\partial x_k}v_k+\rho\frac{\partial\,u_k}{\partial x_k}=0$$

$$\rho\,\dot{\mathbf{v}}-\mathbf{t}_{k,k}-\rho\,\mathbf{f}=0$$

veya

$$\mathbf{t}_{k,k}+\rho(\mathbf{f}-\dot{\mathbf{v}})=0 \quad (\mathrm{V}-\sigma\ \ hacminde) \qquad (3.52)$$

elde edilir. Eş. 3.52, ortamın $(V-\sigma)$ hacminde geçerli olan *yerel momentumun korunumu* ifadesidir ve *Cauchy' nin birinci yasası* olarak da adlandırılır.

Açısal momentumun dengesi, gerilme tansörünün simetrik olması ile sağlanmaktadır. Bölüm 2.3'de verilen denge denklemleri bünyesinde bir süreksizlik yüzeyi bulunduran ortamın uzaysal konumu için tekrar yazılmıştır. Üzerinde çalışılan probleme göre Eş. 3.44 ve Eş. 3.52'nin ortamın referans konumunda oluşturulması çözüme kolay ulaşmak için daha uygun olabilir.

Eş. 3.44'de verilen ve kütlenin korunumu yasasından bulunan $\sigma(t)$ tekillik yüzeyi üzerindeki sıçrama şartını $\Sigma(t)$ tekillik yüzeyi üzerinde, yani referans konumunda aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$[\![\rho_0 J^{-1}(v_k - u_k)n_k]\!] = 0$$

$n_k = JX_{K,k}N_K dA/da$ eşitliğini kullanarak,

$$[\![\rho_0(v_k - u_k)X_{K,k}]\!]N_K dA/da = 0$$

$$[\![\rho_0(v_k - u_k)X_{K,k}]\!]N_K = 0 \quad (\Sigma(t)\ \textit{yüzeyi üzerinde}) \tag{3.53}$$

Eş. 3.51'de verilen ve yerel formda momentum korunumu denkliğinde elde edilen sıçrama eşitliğini $\Sigma(t)$ yüzeyi üzerinde oluşturacak olursak,

$$[\![\rho_0 J^{-1}\,\mathbf{v}(v_k - u_k) - J^{-1}x_{k,K}T_K]\!]n_k = 0$$

$n_k = JX_{K,k}N_K dA/da$ eşitliğini kullanarak,

$$[\![\rho_0\, J^{-1}\mathbf{v}(v_k - u_k)J\,X_{K,k} - J^{-1}x_{k,R}T_R J\,X_{K,k}]\!]N_K = 0$$

ve gerekli sadeleştirmeler yapılarak,

$$[\![\rho_0 \mathbf{v}(v_k - u_k)X_{K,k} - T_K]\!]N_K = 0 \qquad (\Sigma(t)\ \textit{yüzeyi üzerinde}) \tag{3.54}$$

elde edilir.

3.5. Tekillik Yüzeyi Üzerinde Enerji Sıçraması

Bünyesinde süreksizlik yüzeyi bulunduran bir ortam için Eş. 2.34'de verilen toplam iç enerji aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$E = \int_{\mathrm{V}-\sigma} \rho\, e\, d\mathrm{V} \tag{3.55}$$

Toplam iç enerjinin zaman türevi, Eş. 3.39 kullanılarak

$$\dot{E} = \frac{d}{dt}\int_{\mathrm{V}-\sigma} \rho\, e\, d\mathrm{V} = \int_{\mathrm{V}-\sigma}\left[\rho\frac{\partial e}{\partial t} + e\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\, v_{k,k}\right)\right]d\mathrm{V} + \int_{\sigma}\rho\, e[\![\, \mathbf{v} - \mathbf{u}]\!]\bullet \mathbf{n}da$$

$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\, v_{k,k}\right) = 0$ kullanılarak,

$$\dot{E} = \frac{d}{dt}\int_{\mathrm{V}-\sigma} \rho\, e\, d\mathrm{V} = \int_{\mathrm{V}-\sigma} \rho\, \dot{e}\, d\mathrm{V} + \int_{\sigma}\rho\, e[\![\, \mathbf{v} - \mathbf{u}]\!]\bullet \mathbf{n}da \tag{3.56}$$

yazılabilir. $\sigma(t)$ tekillik yüzeyi üzerinde iç enerji sıçraması Eş. 3.56'nın en sağındaki integral ifadesidir.

$$[\![\dot{E}]\!] = \int_{\sigma}\rho\, e[\![\, \mathbf{v} - \mathbf{u}]\!]\bullet \mathbf{n}da \tag{3.57}$$

Aynı şekilde süreksizlik yüzeyi bulunan bir ortam için kinetik enerjideki değişim aşağıdaki şekilde oluşturulabilir.

$$\frac{dK}{dt}=\frac{1}{2}\int_{V-\sigma}\left(\frac{\partial(\rho v_k v_k)}{\partial t}+(\rho v_k v_k)v_{l,l}\right)dV-\frac{1}{2}\int_{\sigma}[[(\rho v_k v_k)(v_n-u_n)]]da$$

$$\frac{dK}{dt}=\frac{1}{2}\int_{V-\sigma}\left[\rho\,{\partial(v_k v_k)}\big/_{\partial t}+v_k v_k\left({\partial\rho}\big/_{\partial t}+\rho v_{l,l}\right)\right]dV-\frac{1}{2}\int_{\sigma}[[(\rho v_k v_k)(v_n-u_n)]]da$$

$$\frac{dK}{dt}=\frac{1}{2}\int_{V-\sigma}\rho\frac{\partial(v_k v_k)}{\partial t}dV-\frac{1}{2}\int_{\sigma}[[(\rho v_k v_k)(v_n-u_n)]]da$$

$$\frac{dK}{dt}=\frac{1}{2}\int_{V-\sigma}\rho(v_k a_k+a_k v_k)dV-\frac{1}{2}\int_{\sigma}[[(\rho v_k v_k)(v_n-u_n)]]da$$

$$\dot{K}=\frac{dK}{dt}=\int_{V-\sigma}\rho v_k a_k dV-\frac{1}{2}\int_{\sigma}[[(\rho v_k v_k)(v_n-u_n)]]da \tag{3.58}$$

$\sigma(t)$ tekillik yüzeyi üzerinde gerçekleşen kinetik enerjideki sıçrama,

$$[[\dot{K}]]=\frac{1}{2}\int_{\sigma}[[(\rho v_k v_k)(v_n-u_n)]]da \tag{3.59}$$

olarak yazılır. Birim zamanda yapılan iş için tekillik yüzeyi üzerindeki sıçrama

$$[[W]]=\int_{\sigma}[[t_{kl}v_l]]n_k da \tag{3.60}$$

ve tekillik yüzeyi üzerinde ısı enerjisindeki sıçrama,

$$[[Q]]=\int_{\sigma}[[q_k]]n_k da \tag{3.61}$$

olarak yazılır. Eş. 2.30'da verilen enerjinin korunumu denkliğinin sıçrama ifadesinden,

$$[\![\dot{K}]\!] + [\![\dot{E}]\!] - [\![W]\!] - [\![Q]\!] = 0 \tag{3.62}$$

yazılabilir. Eş. 3.57 ve Eş. 3.59-Eş. 3.61, Eş. 3.62'de yerlerine yazılarak,

$$[\![\rho\left(\tfrac{1}{2}(v_l v_l) + \varepsilon\right)(v_k - u_k) - t_{kl} v_l - q_k]\!] n_k = 0 \quad (\sigma(t)\, \textit{yüzeyi üzerinde}) \tag{3.63}$$

olarak $\sigma(t)$ tekillik yüzeyi üzerinde geçerli *enerji sıçrama şartı* elde edilir. Bu sıçrama şartı referans konumu için,

$$[\![\left(\rho_0\left(\tfrac{1}{2}(v_k v_k) + \varepsilon\right)(v_k - u_k) - x_{k,K} T_{Kl} v_l - x_{k,K} Q_K\right) X_{K,k}]\!] N_K = 0$$

$$[\![\left(\rho_0\left(\tfrac{1}{2}(v_k v_k) + \varepsilon\right)(v_k - u_k) X_{K,k} - x_{k,K} X_{K,k} T_{Kl} v_l - x_{k,K} X_{K,k} Q_K\right)]\!] N_K = 0$$

$$[\![\left(\rho_0\left(\tfrac{1}{2}(v_l v_l) + \varepsilon\right)(v_l - v_l) X_{K,l} - T_{Kl} v_l - Q_K\right)]\!] N_K = 0 \quad (\Sigma(t)\, \textit{üzerinde}) \tag{3.64}$$

yazılır. Şimdiye kadar elde ettiğimiz sıçrama şartlarını birlikte yazarsak, Uzay konumunda;

$$[\![\rho(v_k - u_k)]\!] n_k = 0 \tag{3.65}$$

$$[\![\rho v_l (v_k - u_k) - t_{kl}]\!] n_k = 0 \tag{3.66}$$

$$[\![\rho\left(\tfrac{1}{2}(v_k v_k) + \varepsilon\right)(v_k - u_k) - t_{kl} v_l - q_k]\!] n_k = 0 \tag{3.67}$$

Referans konumunda;

$$[\![\rho_0 (v_k - u_k) X_{K,k}]\!] N_K = 0 \tag{3.68}$$

$$[\![\rho_0 \mathbf{v}(v_k - u_\mathrm{k}) X_{K,k} - T_K]\!] N_K = 0 \tag{3.69}$$

$$[\![(\rho_0 (1/2 (v_k v_k) + \varepsilon)(v_\mathrm{k} - u_\mathrm{k}) X_{K,k} - T_{Kl} v_l - Q_K)]\!] N_K = 0 \tag{3.70}$$

Yukarıda yazılan sıçrama eşitlikleri, Eş. 3.8-Eş. 3.10 kullanılarak aşağıdaki gibi tekrar yazılabilirler.

$$[\![\rho_0 U_N]\!] = 0 \ , \ \Sigma(t) \text{ yüzeyi üzerinde} \tag{3.71}$$

$$\rho_0 U_N [\![v_k]\!] + [\![T_{Kk}]\!] N_K = 0 \ , \ \Sigma(t) \text{ yüzeyi üzerinde} \tag{3.72}$$

$$[\![\rho_0 U_N (1/2 (v_k v_k) + \varepsilon)]\!] + [\![T_{Kk} v_k]\!] N_K = 0 \ , \ \Sigma(t) \text{ yüzeyi üzerinde} \tag{3.73}$$

$$\rho_0 U_N [\![\eta]\!] \leq 0 \ , \ \Sigma(t) \text{ yüzeyi üzerinde} \tag{3.74}$$

Burada verilen denklemler dinamik uygunluk şartları olarak adlandırılmaktadır.

4. TERMOELASTİK CİSİMLERDE ZAYIF ŞOK DALGALARININ YAYILMASI

Şok dalgası yüzeyi üzerinde ortam deformasyonu süreklidir ve oluşan hareketin tersi de her zaman mevcuttur. Ancak, Şekil 4.1'de $\sigma(t)$ fonksiyonu ile gösterilen tekillik yüzeyi üzerinde bulunan ortam noktaların hızlarında sonlu sıçramalar bulunmaktadır. Ayrıca, deformasyon gradyanı da sürekli değildir ve aşağıdaki sıçrama ifadeleri geçerlidir.

$$[\![\mathbf{x}]\!] = 0\,,\ \ [\![\dot{\mathbf{x}}]\!] \neq 0\,,\ \ [\![F_{kK}]\!] \neq 0 \qquad \sigma(t)\,\textit{yüzeyi üzerinde} \tag{4.1}$$

Deformasyon gradyanı ve hızdaki sıçramalar bazı geometrik uygunluk şartlarını sağlayacak şekildedir. Bu uygunluk şartları,

$$[\![x_{k,K}]\!] = s_k N_K \tag{4.2}$$

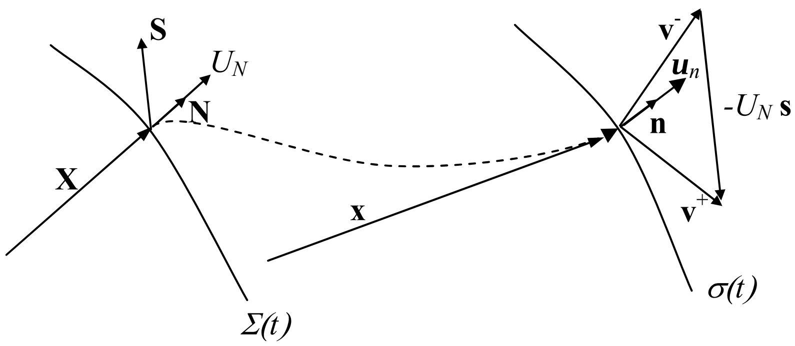
$$[\![\mathrm{v}_k]\!] = -U_N s_k \tag{4.3}$$

olarak verilmektedir. Burada $s_k = [\![x_{k,K}]\!] N_K$ şok tekillik vektörüdür ve malzeme hızındaki sıçramayla aynı doğrultudadır. Eş. 4.3'ün her iki tarafını N_K ile çarparak ve Eş. 4.2 burada yerine yazılarak aşağıdaki denklem elde edilir.

$$[\![\mathrm{v}_k]\!] N_K + U_N [\![x_{k,K}]\!] = 0 \tag{4.4}$$

Eş. 4.4 tekillik yüzeyi üzerinde ortamı oluşturan noktanın hızındaki sıçrama ile deformasyon gradyanındaki sıçramayı birbirleriyle ilişkilendiren bir denklemdir.

Şok dalgalarında olduğu gibi, tekillik yüzeyi üzerindeki ortamı oluşturan noktaların hızlarında sıçrama oluyorsa, yerel yayılma hızında da sıçrama olacaktır. Bu durumda



Şekil 4.1. Tekillik vektörü **s** ve ortam noktasının hızındaki sıçrama $[\![\mathbf{v}]\!] = \mathbf{v}^+ - \mathbf{v}^-$

U, $\sigma(t)$ tekillik yüzeyi üzerinde süreksizdir. Yerel yayılma hızındaki sıçrama aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$U^+ = \mathrm{u}_n - \mathrm{v}_n^{\,+} \tag{4.5}$$

$$U^- = \mathrm{u}_n - \mathrm{v}_n^{\,-} \tag{4.6}$$

$$[\![U]\!] = -[\![\mathrm{v}_n]\!] = -[\![\mathbf{v}]\!] \bullet \mathbf{n} \tag{4.7}$$

Ancak şok dalgalarının tersine, vorteks yüzeylerinde yerel yayılma hızı tekillik yüzeyi üzerinde süreklidir. Şok dalgası eşiği üzerinde geçerli olan ve malzemenin şok dalgasına verdiği tepkiyi belirlemeye yardımcı olan Hugoniot ifadesi bir termoelastik malzeme için aşağıdaki gibi yazılır [21].

$$\frac{1}{2}\left(2\mathbf{T}^+ - [\![\mathbf{T}]\!]\right) \bullet [\![\mathbf{F}]\!] = \rho_0 [\![e]\!] = \rho_0 [\![\psi + \eta\theta]\!] \tag{4.8}$$

Eş. 4.8, aşağıda verilen özelliğin kullanılmasıyla yeni bir halde yazılır.

$$[\![AB]\!] = A^+ [\![B]\!] + [\![A]\!] B^+ - [\![A]\!][\![B]\!] \tag{4.9}$$

$$\frac{1}{2}\left(2\mathbf{T}^{+} - [\![\mathbf{T}]\!]\right) \bullet [\![\mathbf{F}]\!] = \rho_0\left([\![\psi]\!] + \eta^{+}[\![\theta]\!] + [\![\eta]\!]\theta^{+} - [\![\eta]\!][\![\theta]\!]\right) \tag{4.10}$$

4.1. Termomekanik Kısıtlı Termoelastik Cisimler

Bu bölümde, bir doğrultuda sıcaklığa bağlı uzama yapan lifler ile kuvvetlendirilmiş cisim içinde yayılan zayıf şok dalgası hızları verilecektir. Ancak, liflerin sadece sıcaklık değişimi sonucu uzayacağı kabulü yapılmaktadır. Termomekanik kısıt örneği olarak $h(\theta)=1+\xi(\theta-\theta_0)$ fonksiyonu kullanılmıştır. Bu fonksiyona ve örnek olarak seçilen ξ=0,03 parametresine bağlı olarak hesaplanan **e** doğrultusundaki uzama değerleri Çizelge 4.1'de gösterilmektedir.

4.1.1. Zayıf şok dalgası hareket denkleminin elde edilmesi

Zayıf tekillikler konusu ele alındığı durumda, tekillik yüzeyi üzerinde oluşan sıçramaların küçük olduğu düşünülür. Bu durumda kullanılan matematiksel ifadelerde ikinci ve daha yüksek mertebeden sıçrama ifadeleri ihmal edilebilecek kadar küçük değerler alır. Eş. 4.10'da verilen Hugoniot eşitliği zayıf şok dalgaları için sadeleştirilmiş halde aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\rho_0\left([\![\psi]\!] + \eta^{+}[\![\theta]\!] + [\![\eta]\!]\theta^{+}\right) = \frac{1}{2}\left(2\mathbf{T}^{+} - [\![\mathbf{T}]\!]\right) \bullet [\![\mathbf{F}]\!] \tag{4.11}$$

Zayıf şok dalgaları için serbest enerji fonksiyonu, bu fonksiyonun deformasyon gradyanına ve sıcaklığa göre türevleri ve kısıtlama fonksiyonu gibi alan değişkenlerinde oluşan sıçramaların matematiksel ifadeleri Taylor serisi açılımı yapılarak yazılabilir [21, 39, 40]. Bu açılımlar, alan değişkenin tekillik yüzeyinin hemen gerisindeki değerinin, tekillik yüzeyinin hemen ilerisindeki değerinin etrafında açılmasıyla elde edilir. Helmholtz serbest enerji fonksiyonu için Taylor serisi açılımı Eş. 4.12'deki gibi yazılabilir.

$$\psi^{-} = \psi^{+} + \frac{\partial \psi^{+}}{\partial \mathbf{F}} \bullet \left(\mathbf{F}^{-} - \mathbf{F}^{+}\right) + \frac{\partial \psi^{+}}{\partial \theta}\left(\theta^{-} - \theta^{+}\right) + \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \psi^{+}}{\partial p_{\alpha}}\left(p_{\alpha}{}^{-} - p_{\alpha}{}^{+}\right) + \ldots \tag{4.12}$$

Eş. 2.62'de görüldüğü gibi serbest enerji fonksiyonunun Lagrange çarpanına göre türevi kısıt fonksiyonunu vermektedir. Bu durumda, Eş. 4.12'nin en sağında yer alan toplam ifadesi sıfıra eşit olacaktır. Serbest enerji fonksiyonundaki sıçrama, gerekli düzenlemeler yapılarak deformasyon gradyanındaki ve sıcaklıktaki sıçramaya bağlı olarak aşağıdaki gibi elde edilir.

$$[\![\psi]\!] = \frac{\partial \psi^{+}}{\partial \mathbf{F}} \bullet [\![\mathbf{F}]\!] + \frac{\partial \psi^{+}}{\partial \theta}[\![\theta]\!] \tag{4.13}$$

Serbest enerji fonksiyonunun deformasyon gradyan tansörüne göre türevi için Taylor serisi açılımı aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}}\right)^{-} = & \left(\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}}\right)^{+} + \frac{\partial^{2} \psi^{+}}{\partial \mathbf{F} \partial \mathbf{F}}\left(\mathbf{F}^{-} - \mathbf{F}^{+}\right) + \frac{\partial^{2} \psi^{+}}{\partial \mathbf{F} \partial \theta}\left(\theta^{-} - \theta^{+}\right) \\ & + \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial^{2} \psi^{+}}{\partial \mathbf{F} \partial p_{\alpha}}\left(p_{\alpha}{}^{-} - p_{\alpha}{}^{+}\right) + \ldots \end{aligned} \tag{4.14}$$

Benzer şekilde gerekli matematiksel düzenlemeleri yaparak sırçama ifadesi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$[\![\partial \psi / \partial \mathbf{F}]\!] = \frac{\partial^{2} \psi}{\partial \mathbf{F} \partial \mathbf{F}} \bullet [\![\mathbf{F}]\!] + \frac{\partial^{2} \psi}{\partial \mathbf{F} \partial \theta}[\![\theta]\!] \tag{4.15}$$

Çizelge 4.1. Çeşitli $\Delta\theta$ sıcaklık artımları için h(θ) fonksiyonunun değerleri ve **e** doğrultusunda uzama oranları

	$\Delta\theta = 10°\text{K}$	$\Delta\theta = 20°\text{K}$	$\Delta\theta = 30°\text{K}$	$\Delta\theta = 40°\text{K}$	$\Delta\theta = 50°\text{K}$
$\mathbf{Fe} \bullet \mathbf{Fe} = h(\theta)$	1,30	1,60	1,90	2,20	2,50
$\delta_{\mathrm{e}} = \sqrt{\mathbf{Fe} \bullet \mathbf{Fe}}$	1,14	1,26	1,38	1,48	1,58

Helmholtz serbest enerji fonksiyonunun mutlak sıcaklığa göre türevi için yazılacak olan Taylor serisi açılımı,

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)^{-} &= \left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)^{+} + \frac{\partial^2\psi^{+}}{\partial\theta\partial\mathbf{F}}\left(\mathbf{F}^{-}-\mathbf{F}^{+}\right)+\frac{\partial^2\psi^{+}}{\partial\theta\partial\theta}\left(\theta^{-}-\theta^{+}\right) \\ &\quad+\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial^2\psi^{+}}{\partial\theta\partial p_\alpha}\left(p_\alpha{}^{-}-p_\alpha{}^{+}\right)+\ldots\end{aligned} \tag{4.16}$$

olarak yazılır. Sıçrama ifadesini elde etmek için yapılacak düzenlemeden sonra aşağıdaki sıçrama eşitliği elde edilir.

$$[\![\partial\psi/\partial\theta]\!]=\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta\,\partial\mathbf{F}}\bullet[\![\mathbf{F}]\!]+\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta\,\partial\theta}[\![\theta]\!]+\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial^2\psi^{+}}{\partial\theta\,\partial p_\alpha}[\![p_\alpha]\!] \tag{4.17}$$

$\phi(\mathbf{F},\theta)$ kısıt fonksiyonunun tekillik yüzeyinin hemen gerisindeki değerinin (ϕ^{-}), hemen ilerisindeki değeri (ϕ^{+}) etrafında Taylor serisi açılımı,

$$\phi^{-}=\phi^{+}+\frac{\partial\phi^{+}}{\partial\mathbf{F}}\bullet\left(\mathbf{F}^{-}-\mathbf{F}^{+}\right)+\frac{\partial\phi^{+}}{\partial\theta}\left(\theta^{-}-\theta^{+}\right)+\ldots \tag{4.18}$$

olarak yazılır. Burada da yapılacak düzenlemeden sonra aşağıdaki sıçrama eşitliği elde edilir.

$$[\![\phi]\!]=\frac{\partial\phi^{+}}{\partial\mathbf{F}}\bullet[\![\mathbf{F}]\!]+\frac{\partial\phi^{+}}{\partial\theta}[\![\theta]\!] \tag{4.19}$$

Eş. 2.59’da verilen 1. Piola-Kirchhoff gerilme tansörünün sıçrama ifadesi zayıf şok dalgası eşiği üzerinde,

$$[\![\mathbf{T}]\!]=\rho_0[\![\partial\psi/\partial\mathbf{F}]\!]+\sum_{\alpha=1}^{n}[\![p_\alpha]\!]\rho_0\frac{\partial\phi^{\alpha}}{\partial\mathbf{F}} \tag{4.20}$$

olarak yazılabilir. Eş. 4.15, Eş. 4.20'de yerine yazılarak,

$$[\![\mathbf{T}]\!] = \rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{F}\, \partial \mathbf{F}} \bullet [\![\mathbf{F}]\!] + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta\, \partial \theta} [\![\theta]\!] + \sum_{\alpha=1}^{n} \rho_0 \frac{\partial \phi^{\alpha}}{\partial \mathbf{F}} [\![p_\alpha]\!] \tag{4.21}$$

veya

$$[\![\mathbf{T}]\!] = \mathbf{A} \bullet [\![\mathbf{F}]\!] + \mathbf{B} [\![\theta]\!] + \sum_{\alpha=1}^{n} \mathbf{C}^{\alpha} [\![p_\alpha]\!] \tag{4.22}$$

elde edilir. Burada dördüncü mertebeden elastisite tansörü **A**,

$$\mathbf{A} = \rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{F} \partial \mathbf{F}} \tag{4.23}$$

ikinci mertebeden sıcaklık-deformasyon tansörü **B**,

$$\mathbf{B} = \rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{F} \partial \theta} \tag{4.24}$$

ve ikinci mertebeden tansör $\mathbf{C}^{\alpha}$,

$$\mathbf{C}^{\alpha} = \rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{F} \partial p_\alpha} = \rho_0 \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial \mathbf{F}} \tag{4.25}$$

olarak yazılır. Entropideki sıçramayı elde etmek için Eş. 2.60'da verilen entropi eşitliğinin her iki tarafının sıçrama ifadesi yazılır.

$$[\![\eta]\!] = -[\![\partial \psi_0 / \partial \theta]\!] - \sum_{\alpha=1}^{n} [\![p_\alpha]\!] \frac{\partial \phi^{\alpha}}{\partial \theta} \tag{4.26}$$

$$[\![\eta]\!] = -[\![\partial\psi/\partial\theta]\!] \tag{4.27}$$

Eş. 4.17, Eş. 4.27'de yerine yazılacak olursa,

$$[\![\eta]\!] = -\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta\,\partial\mathbf{F}} \bullet [\![\mathbf{F}]\!] - \frac{\partial^2\psi}{\partial\theta\,\partial\theta}[\![\theta]\!] - \sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial^2\psi^+}{\partial\theta\,\partial p_\alpha}[\![p_\alpha]\!] \tag{4.28}$$

veya

$$[\![\eta]\!] = -\frac{1}{\rho_0}\mathbf{B} \bullet [\![\mathbf{F}]\!] - \chi[\![\theta]\!] - \sum_{\alpha=1}^{n}\omega^\alpha[\![p_\alpha]\!] \tag{4.29}$$

Burada, $\chi = \dfrac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}$ ve $\omega^\alpha = \dfrac{\partial^2\psi^+}{\partial\theta\,\partial p_\alpha} = \dfrac{\partial\phi^{\alpha+}}{\partial\theta}$ olarak tanımlıdır.

Eş. 4.13, Eş. 4.22 ve Eş. 4.29, Eş. 4.11'de yerine yazılarak ve zayıf şok dalgası için yaptığımız iki veya daha çok sıçrama parametresinin çarpımlarının ihmal edileceği kabulünü kullanarak,

$$\rho_0\theta^+[\![\eta]\!] = 0 \tag{4.30}$$

elde edilir. Bu sonuç zayıf şok dalgalarının izentropik olduğunu, dalga geçişi sonrasında ortamın entropisinde bir sıçrama olmadığını göstermektedir. Sıcaklıktaki sıçramayı elde etmek için Eş. 4.19'da yer alan kısıt fonksiyonundaki sıçramanın sıfıra eşit olduğu gerçeği kullanılacaktır. Bu durumda Eş. 4.19 aşağıdaki hali alacaktır.

$$\frac{1}{\rho_0}\mathbf{C}^\alpha \bullet [\![\mathbf{F}]\!] + \omega_\alpha[\![\theta]\!] = 0 \tag{4.31}$$

Bu eşitlikte her iki tarafı ρ_0 ile çarparak ve deformasyon gradyan tansöründeki sıçrama için yazılan Eş. 4.2 yukarıda yerine yazılarak sıcaklıktaki sıçrama aşağıdaki gibi elde edilir.

$$[\![\theta]\!] = -\frac{\mathbf{c}^{\alpha} \bullet \mathbf{s}}{\rho_0 \omega_{\alpha}}, \qquad \alpha = 1,\ldots,n \tag{4.32}$$

Burada, $\mathbf{c}^{\alpha}$ vektörü,

$$c_k^{\alpha} = C_{kL}^{\alpha} N_L \tag{4.33}$$

olarak tanımlıdır ve Eş. 4.32, her bir α değeri için geçerlidir. Bu durumda birinci ve sonuncu α değerleri için aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$[\![\theta]\!] = -\frac{\mathbf{c}^{1} \bullet \mathbf{s}}{\rho_0 \omega_1} = -\frac{\mathbf{c}^{n} \bullet \mathbf{s}}{\rho_0 \omega_n} \tag{4.34}$$

Burada yapılacak düzenlemeden sonra aşağıdaki kısıt fonksiyonu elde edilir.

$$\mathbf{m}^{\beta} \bullet \mathbf{s} = 0 \tag{4.35}$$

Burada, $\mathbf{m}^{\beta} = \dfrac{\mathbf{c}^{\beta}}{\omega_{\beta}} - \dfrac{\mathbf{c}^{n}}{\omega_n}$, $\beta = 1,\ldots,n-1$ olarak verilmektedir.

Eş. 4.28'de verilen entropideki sıçrama eşitliği kullanılarak Lagrange çarpanındaki sıçrama elde edilebilir. Bu doğrultuda Eş. 4.2, Eş. 4.29'da yerine yazılarak aşağıdaki eşitliğe ulaşılabilir.

$$\frac{1}{\rho_0}\mathbf{b} \bullet \mathbf{s} + \chi[\![\theta]\!] + \sum_{\alpha=1}^{n} \omega_{\alpha} [\![p_{\alpha}]\!] = 0 \tag{4.36}$$

Burada **b** vektörü,

$$b_k = B_{kL} N_L \tag{4.37}$$

olarak tanımlıdır. Eş. 4.34, Eş. 4.36'da yerine yazılacak olursa Lagrange çarpanındaki sıçrama elde edilmiş olur.

$$\omega_n [\![p_n]\!] = -\frac{\mathbf{b} \bullet \mathbf{s}}{\rho_0} + \chi \frac{\mathbf{c}^n \bullet \mathbf{s}}{\rho_0 \omega_n} - \sum_{\beta=1}^{n-1} \omega_\beta [\![p_\beta]\!] \tag{4.38}$$

Referans koordinatlarını kullanarak yazılan dinamik uygunluk şartı olan Eş. 3.72'nin ve şok dalgası geçişi sonrasında ortamı oluşturan maddesel noktanın hızındaki sıçrama ifadesi olan Eş. 4.3'ün kullanılmasıyla şok dalgası için hareket denklemi aşağıdaki gibi yazılır.

$$[\![\mathbf{T}]\!] \mathbf{N} = \rho_0 {U_N}^2 \mathbf{s} \tag{4.39}$$

Eş. 4.22'de verilen gerilme tansöründeki sıçrama yukarıdaki ifadede yerine yazılarak ve deformasyon gradyanındaki sıçrama ifadesi olan Eş. 4.2'nin de yardımıyla aşağıdaki hareket denklemi oluşturulur.

$$\mathbf{Q}\mathbf{s} + \mathbf{b} [\![\theta]\!] + \sum_{\alpha=1}^{n} \mathbf{c}^\alpha [\![p_\alpha]\!] = \rho_0 {U_N}^2 \mathbf{s} \tag{4.40}$$

Burada, **Q** ikinci mertebe elastik akustik tansördür ve bileşenleri

$$Q_{kl} = A_{kKlL} N_K N_L \tag{4.41}$$

olarak **A** elastisite tansörü ve **N** birim normal vektörü cinsinden yazılır. Eş. 4.38'de verilen Lagrange çarpanındaki sıçrama ifadesinde eşitliğin her iki tarafı $\mathbf{c}^n / \omega_n$ ile çarpılarak Eş. 4.40 içinde yerine yazılırsa aşağıdaki ifadeye ulaşılabilir.

$$\mathbf{Qs}+\mathbf{b}[[\theta]]-\frac{1}{\rho_0\omega_n}\mathbf{c}^n(\mathbf{b}\bullet\mathbf{s})+\frac{\chi}{\rho_0{\omega_n}^2}\mathbf{c}^n(\mathbf{c}^n\bullet\mathbf{s})+\sum_{\alpha=1}^{n-1}\left(\frac{\mathbf{c}^\alpha}{\omega_\alpha}-\frac{\mathbf{c}^n}{\omega_n}\right)\omega_\alpha[[p_\alpha]] \\ =\rho_0{U_N}^2\mathbf{s} \tag{4.42}$$

Eş. 4.34'de bulunan sıcaklık parametresindeki sıçrama yukarıda yerine yazılırsa

$$\mathbf{Qs}-\frac{1}{\rho_0\omega_n}\left[\mathbf{b}(\mathbf{c}^n\bullet\mathbf{s})+\mathbf{c}^n(\mathbf{b}\bullet\mathbf{s})\right]+\frac{\chi}{\rho_0{\omega_n}^2}\mathbf{c}^n(\mathbf{c}^n\bullet\mathbf{s})+\sum_{\alpha=1}^{n-1}\left(\frac{\mathbf{c}^\alpha}{\omega_\alpha}-\frac{\mathbf{c}^n}{\omega_n}\right)\omega_\alpha[[p_\alpha]] \\ =\rho_0{U_N}^2\mathbf{s} \tag{4.43}$$

ifadesi elde edilir. Burada yer alan skaler çarpımı içeren ifadeler diyadik çarpımlarıyla yer değiştirilerek aşağıdaki hareket denklemi bulunur.

$$\mathbf{Qs}-\frac{1}{\rho_0\omega_n}(\mathbf{b}\otimes\mathbf{c}^n+\mathbf{c}^n\otimes\mathbf{b})\mathbf{s}+\frac{\chi}{\rho_0{\omega_n}^2}(\mathbf{c}^n\otimes\mathbf{c}^n)\mathbf{s}+\sum_{\alpha=1}^{n-1}\mathbf{m}^\alpha\omega_\alpha[[p_\alpha]]=\rho_0{U_N}^2\mathbf{s} \tag{4.44}$$

Yukarıdaki ifadede elastik akustik tansörü de içeren yeni bir akustik tansör tanımı yaparak Eş. 4.44 yeniden aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\mathbf{Q}^*\mathbf{s}+\sum_{\alpha=1}^{n-1}\mathbf{m}^\alpha\omega_\alpha[[p_\alpha]]=\rho_0{U_N}^2\mathbf{s} \tag{4.45}$$

Burada $\mathbf{Q}^*$ termoelastik akustik tansördür ve tanımı aşağıdaki gibidir.

$$\mathbf{Q}^*=\mathbf{Q}-\frac{1}{\rho_0\omega_n}(\mathbf{b}\otimes\mathbf{c}^n+\mathbf{c}^n\otimes\mathbf{b})+\frac{\chi}{\rho_0{\omega_n}^2}(\mathbf{c}^n\otimes\mathbf{c}^n) \tag{4.46}$$

$\mathbf{m}^\beta\bullet\mathbf{l}^\gamma=\delta^{\beta\gamma}$ (*Kronecker deltası*) eşitliğini sağlayacak bir $\mathbf{l}^\gamma$ vektörü tanımlanarak ve bu vektör Eş. 4.45'de verilen hareket denklemine skaler çarpan olarak yazılırsa aşağıdaki eşitlik bulunur.

$$\mathbf{Q}^{*}\mathbf{s}\bullet\mathbf{l}^{\gamma}+\sum_{\alpha=1}^{n-1}\mathbf{m}^{\alpha}\bullet\mathbf{l}^{\gamma}\omega_{\alpha}[\![p_{\alpha}]\!]=\rho_{0}U_{N}{}^{2}\mathbf{s}\bullet\mathbf{l}^{\gamma} \tag{4.47}$$

$\mathbf{m}^{\beta}$ ve $\mathbf{l}^{\gamma}$ vektörleriyle ilgili olarak aşağıdaki çarpım ifadeleri yazılabilir.

$$\beta=\gamma\rightarrow\mathbf{m}^{\beta}\bullet\mathbf{l}^{\gamma}=1\rightarrow\mathbf{m}^{\beta}=\mathbf{l}^{\gamma}\rightarrow\mathbf{l}^{\gamma}\bullet\mathbf{s}=0 \tag{4.48}$$

$$\beta\neq\gamma\rightarrow\mathbf{m}^{\beta}\bullet\mathbf{l}^{\gamma}=0\rightarrow\mathbf{m}^{\beta}\perp\mathbf{l}^{\gamma} \tag{4.49}$$

$\beta=\gamma$ olması durumunda, Eş. 4.47 aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\mathbf{Q}^{*}\mathbf{s}\bullet\mathbf{l}^{\gamma}+\omega_{\gamma}[\![p_{\gamma}]\!]=0\rightarrow\omega_{\alpha}[\![p_{\alpha}]\!]=-\mathbf{Q}^{*}\mathbf{s}\bullet\mathbf{l}^{\alpha} \tag{4.50}$$

Eş. 4.50'de sağ tarafta bulunan ifade Eş. 4.45'de yerine yazılırsa,

$$\mathbf{Q}^{*}\mathbf{s}-\sum_{\alpha=1}^{n-1}\mathbf{m}^{\alpha}\left(\mathbf{Q}^{*}\mathbf{s}\bullet\mathbf{l}^{\alpha}\right)=\rho_{0}U_{N}{}^{2}\mathbf{s} \tag{4.51}$$

veya

$$\left[\mathbf{I}-\sum_{\alpha=1}^{n-1}\left(\mathbf{m}^{\alpha}\otimes\mathbf{l}^{\alpha}\right)\right]\mathbf{Q}^{*}\mathbf{s}=\rho_{0}U_{N}{}^{2}\mathbf{s} \tag{4.52}$$

burada $\mathbf{Q}^{*}$, Eş. 4.46'da tanımlanan termoelastik akustik tansördür. Bu eşitlik, birden fazla termomekanik kısıt içeren termoelastik malzeme için zayıf şok dalgalarının yayılma denklemidir. Sürekli ortamda bir adet termomekanik kısıt fonksiyonunun olması durumda Eş. 4.45'de verilen hareket denklemi aşağıdaki forma dönüşür.

$$\mathbf{Qs}-\frac{1}{\rho_{0}\omega}[\mathbf{c}\otimes\mathbf{b}+\mathbf{b}\otimes\mathbf{c}]\mathbf{s}+\frac{\chi}{\rho_{0}\omega^{2}}(\mathbf{c}\otimes\mathbf{c})\mathbf{s}=\rho_{0}U_{N}{}^{2}\mathbf{s} \tag{4.53}$$

Bu denklemin yazılmasında Eş. 4.35'de verilen $\mathbf{m}^{\beta}$ teriminin β=1 için sıfıra eşit olacağı unutulmamalıdır. Denklemde yer alan **c** vektörü, Eş. 4.25 ve Eş. 4.33 yardımıyla (α = 1 için) aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\mathbf{c} = 2\rho_0\left(\mathbf{F}^{+}\mathbf{e}\otimes\mathbf{e}\right)\mathbf{N} = 2\rho_0\left(\mathbf{e}\bullet\mathbf{N}\right)\mathbf{F}^{+}\mathbf{e} \tag{4.54}$$

Eş. 4.24 ve Eş. 4.37 kullanılarak **b** vektörü ise

$$\mathbf{b} = -\kappa_T\beta_0\left(\mathbf{FN}\right) \tag{4.55}$$

olarak bulunur.

4.1.2. Zayıf şok dalgası yayılma şartları

Eş. 4.53'de verilen ve bir adet termomekanik kısıt fonksiyonunun bulunduğu termoelastik ortam için oluşturulmuş hareket denkleminde Eş. 2.89'da verilen serbest enerji fonksiyonu kullanılarak, doğrusal olmayan St.Venant - Kirchhoff malzemelerinde zayıf şok dalgası yayılma hızları bu bölümde oluşturulacaktır. Bu doğrultuda, Eş. 4.41'de verilen **Q** akustik tansörü, Eş. 2.89 ve Eş. 4.23 yardımıyla aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\mathbf{Q} = (\lambda+\mu)(\mathbf{FN}\otimes\mathbf{FN}) + \{\lambda\, tr\mathbf{E} + 2\mu(\mathbf{EN}\bullet\mathbf{N}) - \kappa_T\beta_0(\theta-\theta_0)\}\mathbf{I} + \mu\mathbf{FF}^T \tag{4.56}$$

Eş. 4.53 ile verilen hareket denkleminde yer alan iki adet skaler çarpım, Eş. 4.33 ve Eş. 4.37 kullanılarak aşağıdaki gibi oluşturulur.

$$\mathbf{c}\bullet\mathbf{s} = 2\rho_0\left(\mathbf{e}\bullet\mathbf{N}\right)\left[(\mathbf{Fe})\bullet\mathbf{s}\right] \tag{4.57}$$

$$\mathbf{b}\bullet\mathbf{s} = -\kappa_T\beta_0\left(\mathbf{FN}\right)\bullet\mathbf{s} \tag{4.58}$$

Eş. 4.56, **s** vektörü ile çarpılarak Eş. 4.57 ve Eş. 4.58 ile birlikte hareket denkleminde yerine yazılarsa,

$$
\begin{aligned}
&(\lambda+\mu)(\mathbf{FN}\otimes\mathbf{FN})\mathbf{s}+\lambda\, tr(\mathbf{E})\mathbf{s}+2\mu(\mathbf{EN}\bullet\mathbf{N})\mathbf{s}+\mu\left(\mathbf{FF}^{T}\right)\mathbf{s}\\
&-\kappa_T\beta_0(\theta-\theta_0)\mathbf{s}+\frac{2\kappa_T\beta_0(\mathbf{e}\bullet\mathbf{N})}{\omega}\left[\left((\mathbf{Fe})\bullet\mathbf{s}\right)\mathbf{FN}+\left((\mathbf{FN})\bullet\mathbf{s}\right)(\mathbf{Fe})\right]\\
&+\frac{4\chi\rho_0(\mathbf{e}\bullet\mathbf{N})^2\left((\mathbf{Fe})\bullet\mathbf{s}\right)}{\omega^2}(\mathbf{Fe})=\rho_0 {U_N}^2\mathbf{s}
\end{aligned}
\tag{4.59}
$$

olarak St.Venant - Kirchhoff malzemeleri için zayıf şok dalgası hareket denklemi elde edilmiş olur.

<u>Başlangıçta şekil değiştirmemiş ortam için yayılma hızları</u>

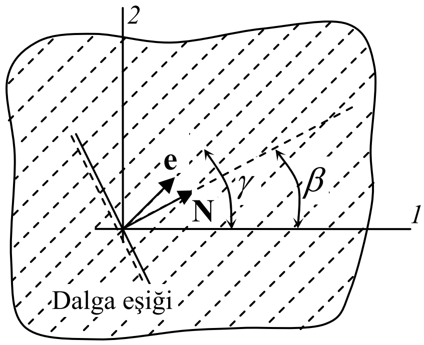
Şekil 4.2'de gösterilen örnek ortam dalga geçişi öncesi herhangi bir dış yükleme altında bulunmamaktadır. Deformasyonsuz ortam için deformasyon gradyan tansörü,

$$
\mathbf{F}=\mathbf{I}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}
\tag{4.60}
$$

ve buna bağlı olarak, Eş. 2.10 ile verilen Lagrange birim şekil değiştirme tansörü sıfıra eşit olacaktır. Eş. 4.59'da verilen hareket denklemi, deformasyon gradyan tansörünün ve Lagrange birim şekil değiştirme tansörünün yerine yazılmasıyla,

$$
\begin{aligned}
&(\lambda+\mu)\mathbf{N}+\mu\,\mathbf{s}-\kappa_T\beta_0(\theta-\theta_0)\mathbf{s}+\frac{2\kappa_T\beta_0 Cos^{2}\Omega}{\omega}\left[|\mathbf{s}|\mathbf{N}+\mathbf{e}\right]\\
&+\frac{4\chi\rho_0 Cos^{3}\Omega}{\omega^2}|\mathbf{s}|\mathbf{e}=\rho_0 {U_N}^2\mathbf{s}
\end{aligned}
\tag{4.61}
$$

halini alır. Burada $\Omega=\beta-\gamma$ olarak alınmıştır. Bu ifadenin her iki tarafını **s** vektörü ile çarparak,



Şekil 4.2. Zayıf şok dalgası eşiği. (β dalga yayılma doğrultusu açısı ve γ sıcaklığa bağlı uzama kısıtının bulunduğu doğrultu açısı)

$$
\begin{aligned}
&(\lambda+\mu)(\mathbf{N}\bullet\mathbf{s})^2+\mu(\mathbf{s}\bullet\mathbf{s})-\kappa_T\beta_0(\theta-\theta_0)(\mathbf{s}\bullet\mathbf{s})+\frac{4\kappa_T\beta_0(\mathbf{e}\bullet\mathbf{N})(\mathbf{e}\bullet\mathbf{s})(\mathbf{N}\bullet\mathbf{s})}{\omega}\\
&+\frac{4\chi\rho_0(\mathbf{e}\bullet\mathbf{N})^2(\mathbf{e}\bullet\mathbf{s})^2}{\omega^2}=\rho_0{U_N}^2(\mathbf{s}\bullet\mathbf{s})
\end{aligned}
\tag{4.62}
$$

ve $\mathbf{s}=s\mathbf{v}$ ifadesini yerine yazarak,

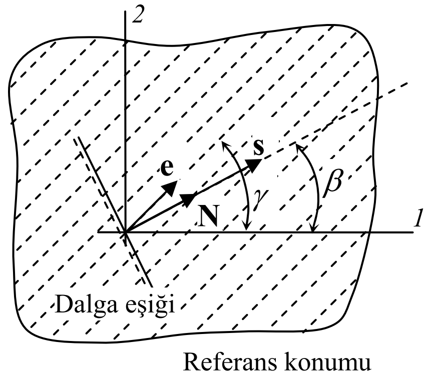
$$
\begin{aligned}
&(\lambda+\mu)(\mathbf{N}\bullet\mathbf{v})^2+\mu-\kappa_T\beta_0(\theta-\theta_0)+\frac{4\kappa_T\beta_0(\mathbf{e}\bullet\mathbf{N})(\mathbf{e}\bullet\mathbf{v})(\mathbf{N}\bullet\mathbf{v})}{\omega}\\
&+\frac{4\chi\rho_0(\mathbf{e}\bullet\mathbf{N})^2(\mathbf{e}\bullet\mathbf{v})^2}{\omega^2}=\rho_0{U_N}^2
\end{aligned}
\tag{4.63}
$$

elde edilir. Burada $\mathbf{v}$, **s** doğrultusundaki birim vektörü ifade etmektedir.

a. Boyuna zayıf şok dalgası yayılma hızı

Şekil 4.3'de verilen boyuna şok dalgası için dalga yayılma doğrultusundaki birim vektör ile şok tekillik vektörü **s** doğrultusundaki birim vektör $\mathbf{v}$ arasında aşağıdaki ilişki mevcuttur.

$$
\mathbf{N}=\mathbf{v}\rightarrow\mathbf{N}\bullet\mathbf{v}=1 \tag{4.64}
$$



Şekil 4.3. Boyuna zayıf şok dalgası yayılma ve şok vektörü doğrultuları

Sıcaklığa bağlı uzama doğrultusundaki birim vektör ile dalga yayılma doğrultusu arasındaki bağıntı,

$$\mathbf{e} \bullet \mathbf{N} = \mathbf{e} \bullet \mathbf{v} = Cos(\gamma - \beta) \tag{4.65}$$

olarak yazılarak, boyuna zayıf şok dalgası yayılma hızı aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\lambda + 2\mu - \kappa_T \beta_0 (\theta - \theta_0) + \frac{4\kappa_T \beta_0 Cos^2(\gamma - \beta)}{\omega} + \frac{4\chi\rho_0 Cos^4(\gamma - \beta)}{\omega^2} = \rho_0 {U_N}^2 \tag{4.66}$$

$$U_N = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu - \kappa_T \beta_0 (\theta - \theta_0)}{\rho_0} + \frac{4\kappa_T \beta_0 Cos^2(\gamma - \beta)}{\rho_0\, \omega} + \frac{4\chi Cos^4(\gamma - \beta)}{\omega^2}} \tag{4.67}$$

Sıcaklığa bağlı uzama doğrultusunda yayılan boyuna zayıf şok dalgası hızı,

$$U_N = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu - \kappa_T \beta_0 (\theta - \theta_0)}{\rho_0} + \frac{4\kappa_T \beta_0}{\rho_0\, \omega} + \frac{4\chi}{\omega^2}} \tag{4.68}$$

ve sıcaklığa bağlı uzama doğrultusuna dik doğrultuda yayılan boyuna zayıf şok dalgası hızı,

$$U_N = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu - \kappa_T \beta_0 (\theta - \theta_0)}{\rho_0}} \tag{4.69}$$

olarak yazılabilir.

b. Enine zayıf şok dalgası yayılma hızı

Enine zayıf şok dalgası için dalga yayılma doğrultusu **N** ve şok tekillik vektörü **s** arasında,

$$\mathbf{N} \bullet \mathbf{s} = 0 \text{ ve } \mathbf{N} \perp \mathbf{s} \tag{4.70}$$

ifadesi yazılabilir. Ayrıca şok yayılma doğrultusu ile uzamazlık doğrultusu **e** arasında Şekil 4.4'de verilen doğrultu açıları kullanılarak,

$$\mathbf{e} \bullet \mathbf{N} = Cos(\gamma - \beta) \text{ ve } \mathbf{e} \bullet \mathbf{v} = Cos\left(\frac{\pi}{2} - (\gamma - \beta)\right) \tag{4.71}$$

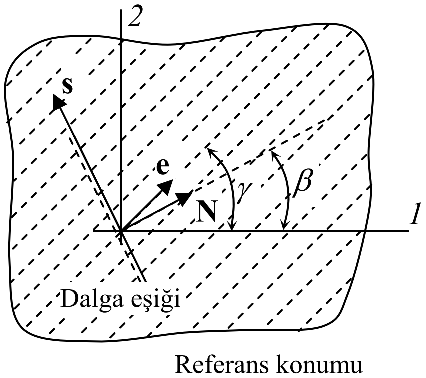
yazılabilir. Eş. 4.71'de verilenler yardımıyla Eş. 4.63'den,

$$\mu - \kappa_T \beta_0 (\theta - \theta_0) + \frac{4\chi\rho_0 Cos^2(\gamma - \beta) Cos^2\left(\frac{\pi}{2} - (\gamma - \beta)\right)}{\omega^2} = \rho_0 U_N{}^2 \tag{4.72}$$

ve

$$U_N = \sqrt{\frac{\mu - \kappa_T \beta_0 (\theta - \theta_0)}{\rho_0} + \frac{4\chi Cos^2(\gamma - \beta) Cos^2\left(\frac{\pi}{2} - (\gamma - \beta)\right)}{\omega^2}} \tag{4.73}$$

olarak enine zayıf şok dalgası yayılma hızı bulunur. Sıcaklığa bağlı uzama doğrultusunda yayılan enine zayıf şok dalgası hızı,



Şekil 4.4. Enine zayıf şok dalgası yayılma ve şok vektörü doğrultuları

$$U_N = \sqrt{\frac{\mu - \kappa_T \beta_0 (\theta - \theta_0)}{\rho_0}} \tag{4.74}$$

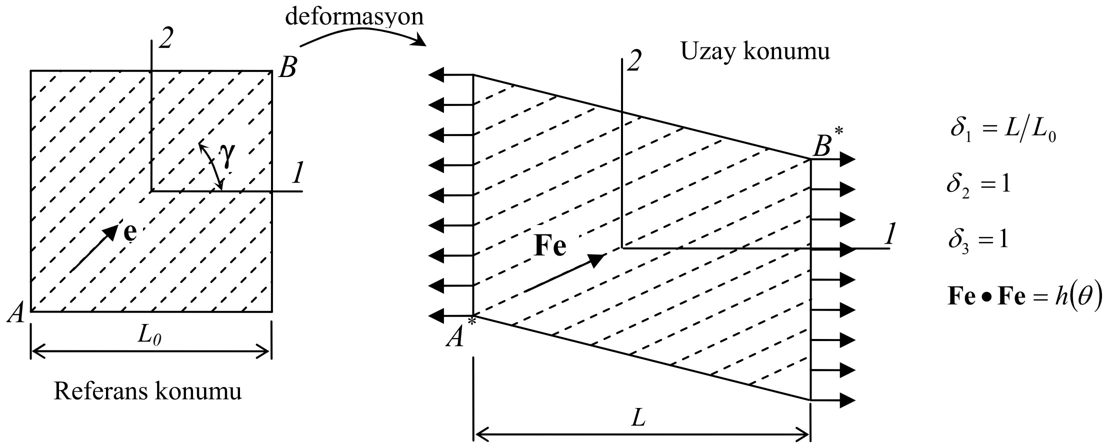
ve sıcaklığa bağlı uzama doğrultusuna dik doğrultuda yayılan enine zayıf şok dalgası hızı,

$$U_N = \sqrt{\frac{\mu - \kappa_T \beta_0 (\theta - \theta_0)}{\rho_0}} \tag{4.75}$$

olarak bulunur.

Tek eksenli çekme altındaki ortam için yayılma hızları

Bu bölümde yapılan sayısal hesaplamalarda örnek kauçuk türü cisim için elastisite modülü 2 MPa olarak alınmıştır [41]. Malzeme sıkıştırılabilir olup Poisson oranı 0,485'dir. Lamé sabitleri $\lambda = E\nu/[(1+\nu)(1-2\nu)]$ ve $\mu = E/[2(1+\nu)]$ eşitlikleriyle hesaplanacaktır. Elastik hacim modülü ise $\kappa = \lambda + 2\mu/3$ eşitliği ile belirlidir. Hacimsel ısıl genleşme katsayısı $\beta_0 = 2{,}1 \times 10^{-3} 1/°K$, özgül ısı c_v = 703 J/(kg°K) ve yoğunluk ρ_0 = 2000 kg/m^3 olarak alınmıştır. Sıcaklığa bağlı uzayan lifler doğrultusunda birim vektör **e** ve dalga birim normal vektörü **N** aşağıdaki gibi seçilmiştir.



Şekil 4.5. *1*-ekseni doğrultusunda δ_1 uzaması yapan termomekanik kısıtlı cisim

$$\mathbf{e} = \begin{Bmatrix} Cos\gamma \\ Sin\gamma \\ 0 \end{Bmatrix}, \ \mathbf{N} = \begin{Bmatrix} Cos\,\beta \\ Sin\,\beta \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{4.76}$$

Dalga yayılması öncesi tek eksenli çekme altındaki termomekanik kısıtlı ortamın deformasyon durumu Şekil 4.5'de görüldüğü gibi olacaktır. Burada *1*-ekseni doğrultusunda δ_1 kadar uzayan cisim, *2*- ve *3*-ekseni doğrultularında uzamadan kalmaktadır. Cisim, **e** doğrultusunda ise $\delta_{\mathbf{e}} = \sqrt{h(\theta)}$ kadar uzama yapacaktır. **e** doğrultusunda sıcaklığa bağlı uzama kısıtı bulunan ortam için tek eksenli çekme halinde *1*-ekseni doğrultusunda çekmeye ek olarak bir kayma deformasyonu gerçekleşecektir. Bu tip şekil değiştirmeye ait deformasyon gradyan tansörü aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 & 0 \\ \tan\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} \delta_1 & \tan\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{F}^{-T} = \begin{bmatrix} 1/\delta_1 & 0 & 0 \\ -\tan\alpha/\delta_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.77}$$

Sıcaklığa bağlı uzamazlık kısıtı, yukarıda verilen deformasyon gradyan tansörü ve **e** vektörü yardımıyla,

$$\phi = \delta_1^{\,2} Cos^2\gamma + \left(\tan\alpha\, Cos\gamma + Sin\gamma\right)^2 - h(\theta) = 0 \tag{4.78}$$

olarak yazılır. Kısıt fonksiyonunun sıcaklığa göre türevi olan ω terimi aşağıdaki gibidir.

$$\omega = \frac{\partial\phi}{\partial\theta} = -\frac{\partial h(\theta)}{\partial\theta} \tag{4.79}$$

Eş. 4.78'de bilinmeyen olarak karşımıza çıkan $\tan\alpha$, $h(\theta)$ fonksiyonuna bağlı olarak aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\tan\alpha = \sqrt{\frac{h(\theta)}{\cos^2\gamma} - \delta_1^{\,2}} - \tan\gamma \tag{4.80}$$

1-ekseni doğrultusunda gerçekleşen uzama oranı için limit durum ise Eş. 4.80'den $\delta_1 \leq 1/\cos\gamma$ olarak bulunur. Hareket denkleminde gerekli olan vektör ve tansör çarpımları aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$\mathbf{FN} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \cos\beta \\ \tan\alpha\ \cos\beta + \sin\beta \\ 0 \end{Bmatrix},\ \mathbf{Fe} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \cos\gamma \\ \tan\alpha\ \cos\gamma + \sin\gamma \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{4.81}$$

$$\mathbf{FN} \otimes \mathbf{FN} = \begin{bmatrix} \delta_1^{\,2} \cos^2\beta & \delta_1 \cos\beta\left(\tan\alpha\ \cos\beta + \sin\beta\right) & 0 \\ \delta_1 \cos\beta\left(\tan\alpha\ \cos\beta + \sin\beta\right) & \left(\tan\alpha\ \cos\beta + \sin\beta\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.82}$$

$$\mathbf{Fe} \otimes \mathbf{Fe} = \begin{bmatrix} \delta_1^{\,2} \cos^2\gamma & \delta_1 \cos\gamma\left(\tan\alpha \cos\gamma + \sin\gamma\right) & 0 \\ \delta_1 \cos\gamma\left(\tan\alpha \cos\gamma + \sin\gamma\right) & \left(\tan\alpha \cos\gamma + \sin\gamma\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.83}$$

Sol Cauchy-Green deformasyon tansörü,

$$\mathbf{B}=\mathbf{F}\mathbf{F}^T=\begin{bmatrix}\delta_1^{\ 2} & \delta_1\tan\alpha & 0\\ \delta_1\tan\alpha & 1+\tan^2\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{4.84}$$

Sağ Cauchy-Green deformasyon tansörü,

$$\mathbf{C}=\mathbf{F}^T\mathbf{F}=\begin{bmatrix}\delta_1^{\ 2}+\tan^2\alpha & \tan\alpha & 0\\ \tan\alpha & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{4.85}$$

şekil değiştirme tansörü,

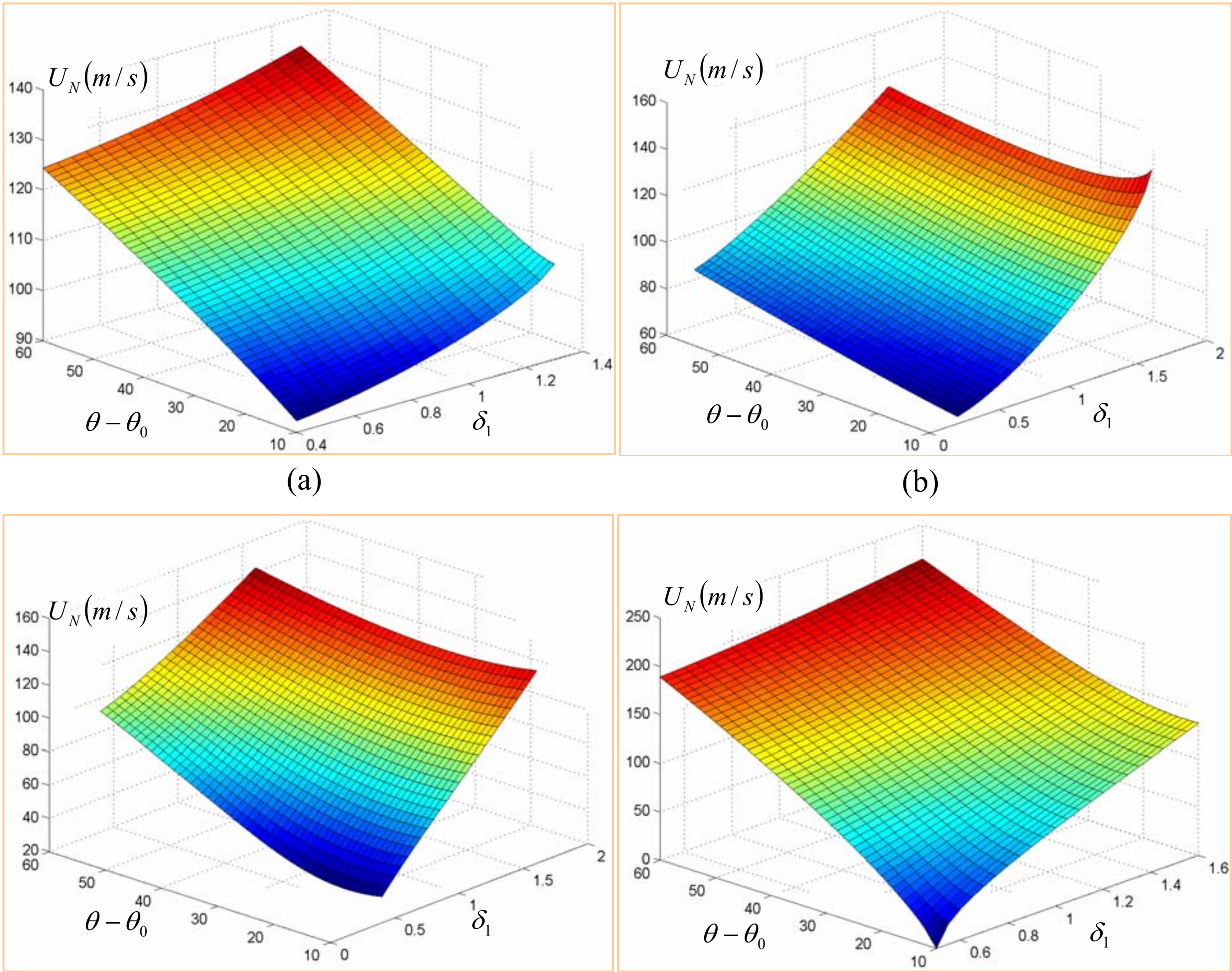
$$\mathbf{E}=\frac{1}{2}(\mathbf{C}-\mathbf{I})=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\delta_1^{\ 2}+\tan^2\alpha-1 & \tan\alpha & 0\\ \tan\alpha & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{4.86}$$

şekil değiştirme tansörünün izi,

$$tr\mathbf{E}=\frac{1}{2}\left(\delta_1^{\ 2}+\tan^2\alpha-1\right) \tag{4.87}$$

$$\mathbf{EN}\bullet\mathbf{N}=\frac{1}{2}\cos\beta\sin\beta\tan\alpha+\cos\beta\left(\frac{1}{2}\sin\beta\tan\alpha+\frac{1}{2}\cos\beta\left(\delta_1^{\ 2}+\tan^2\alpha-1\right)\right) \tag{4.88}$$

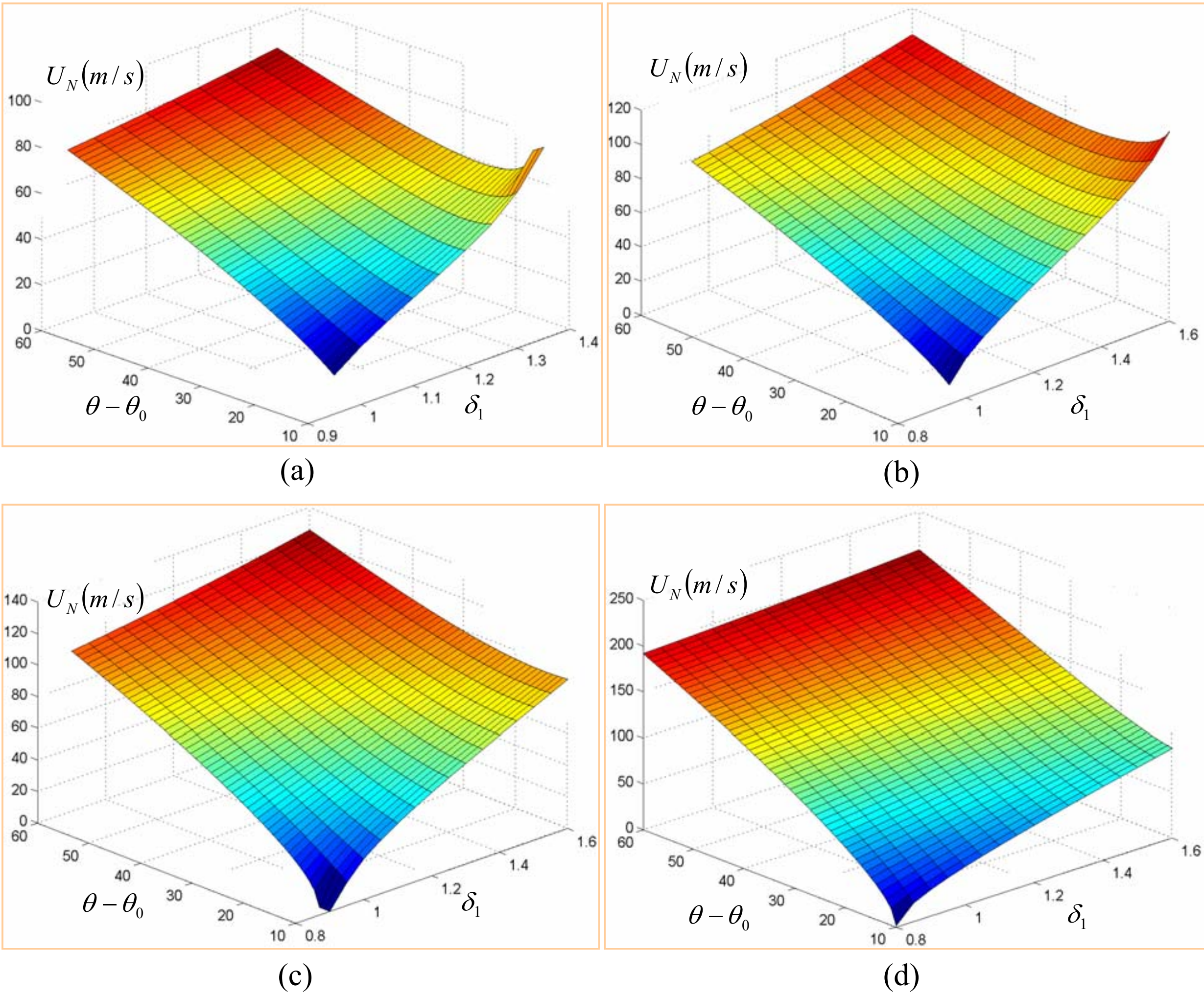
Eş. 4.81-Eş. 4.88 arasında verilen skaler ve tansörel çarpımların yardımıyla, Eş. 4.53 ile verilen özdeğer problemi çözülerek tek eksenli çekme altındaki termomekanik kısıtlı termoelastik cisim için zayıf şok dalgası yayılma hızları elde edilmiştir. Seçilen farklı **e** vektörü doğrultu açıları ve farklı dalga yayılma doğrultu açıları için elde edilen hızların *1*-ekseni doğrultusundaki uzama ve sıcaklık artımına göre değişimini gösteren grafikler ise Şekil 4.6-Şekil 4.13 arasında verilmektedir.



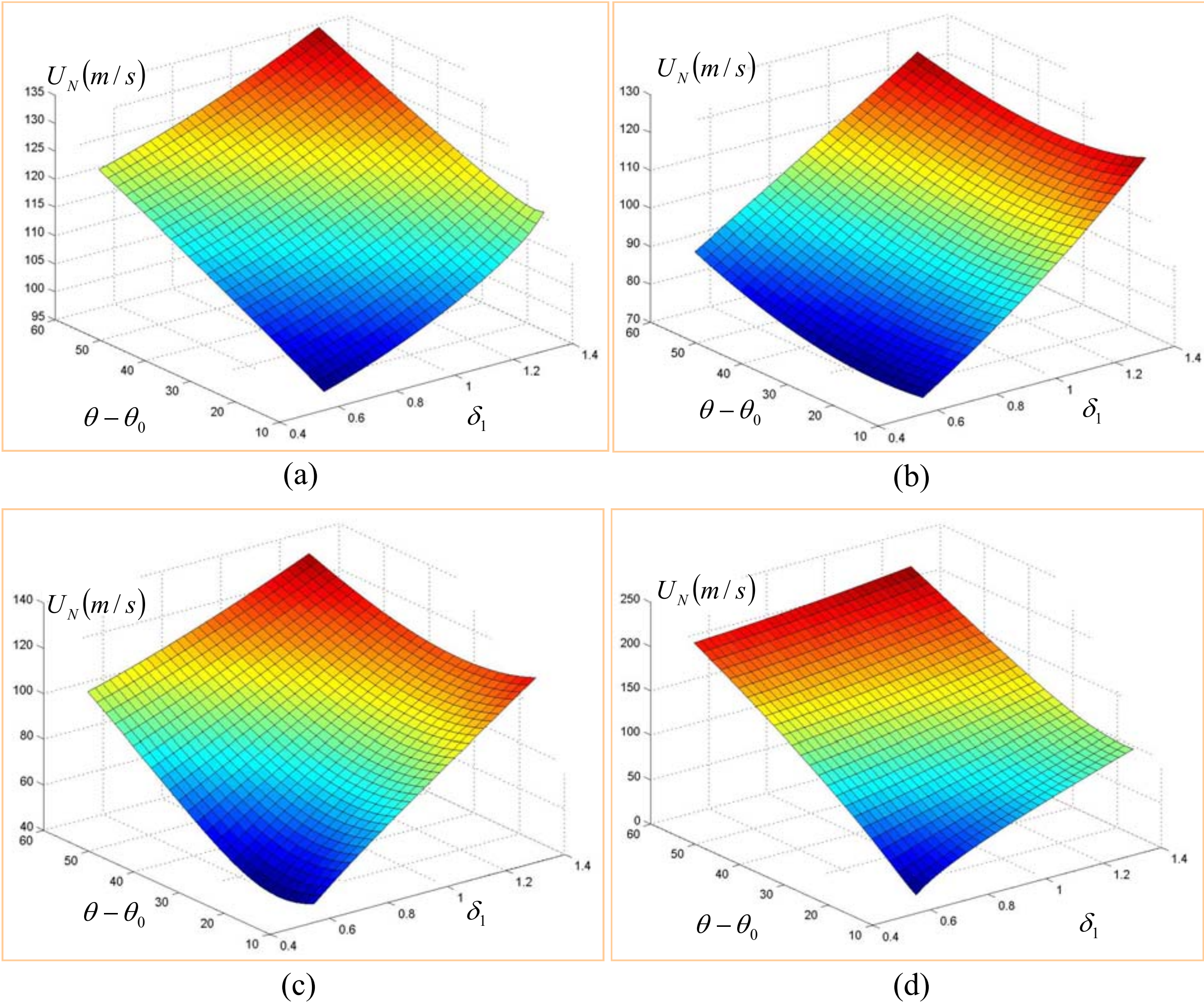
(a) (b)

(c) (d)

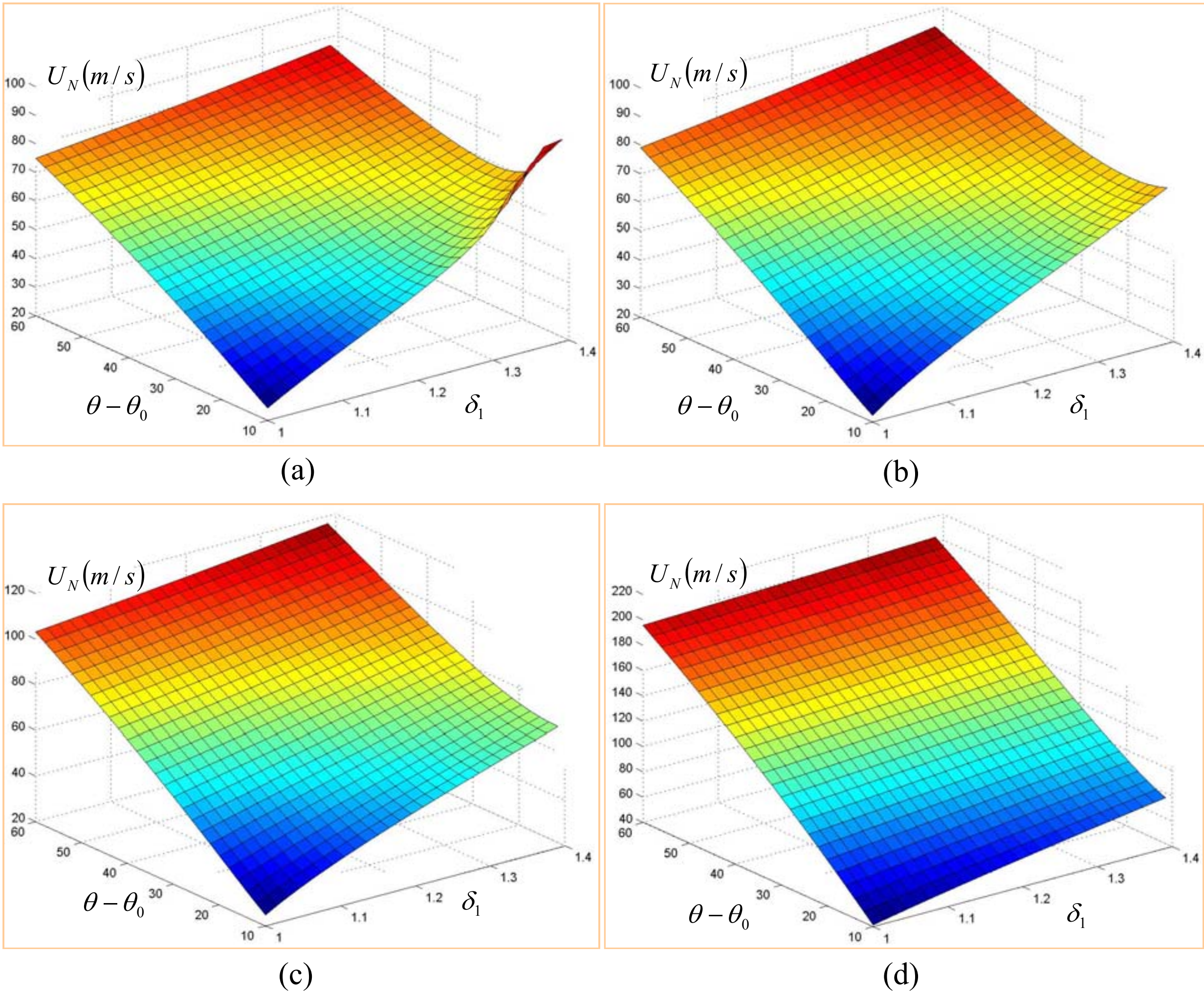
Şekil 4.6. Boyuna şok dalgalarının sıcaklık ve uzama oranıyla değişimi, lif doğrultu açısı γ a) 30 °, b) 45 °, c) 60 °, d) 75 °, β-γ=30 °



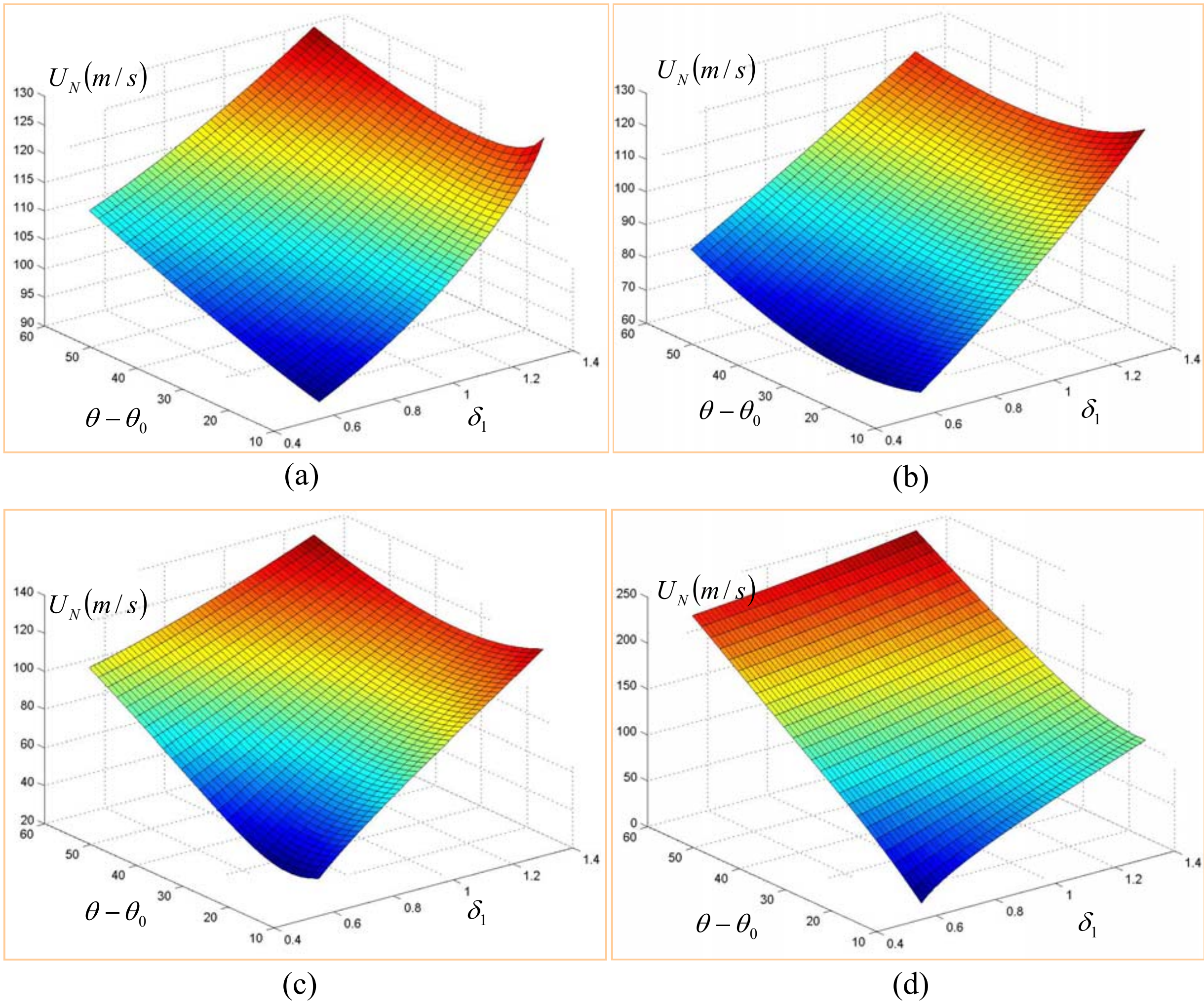
Şekil 4.7. Enine şok dalgalarının sıcaklık ve uzama oranıyla değişimi, lif doğrultu açısı γ a) 30 °, b) 45 °, c) 60 °, d) 75 °, β - γ =30 °



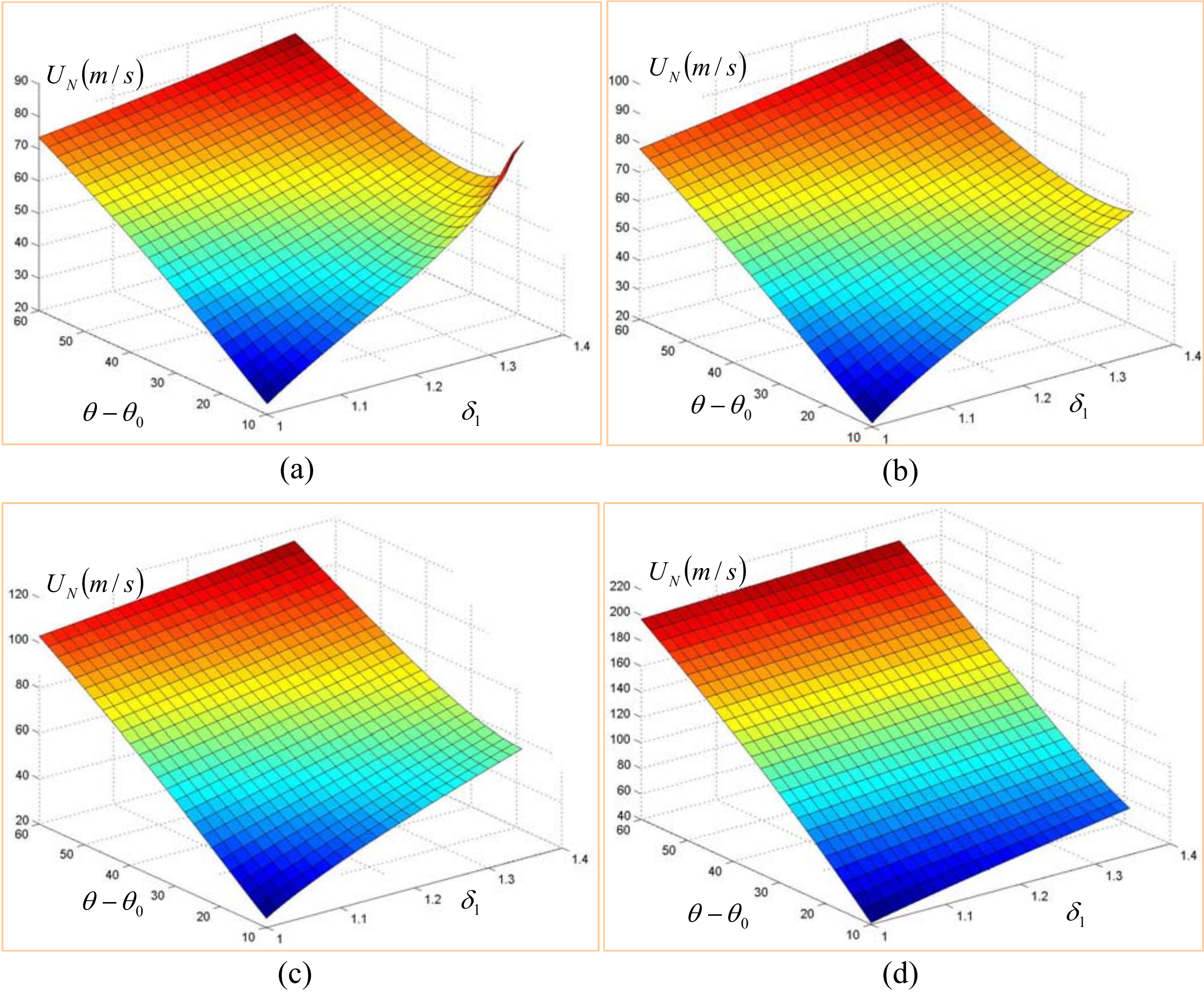
Şekil 4.8. Boyuna şok dalgalarının sıcaklık ve uzama oranıyla değişimi, lif doğrultu açısı γ a) 30 °, b) 45 °, c) 60 °, d) 75 °, β-γ=45 °



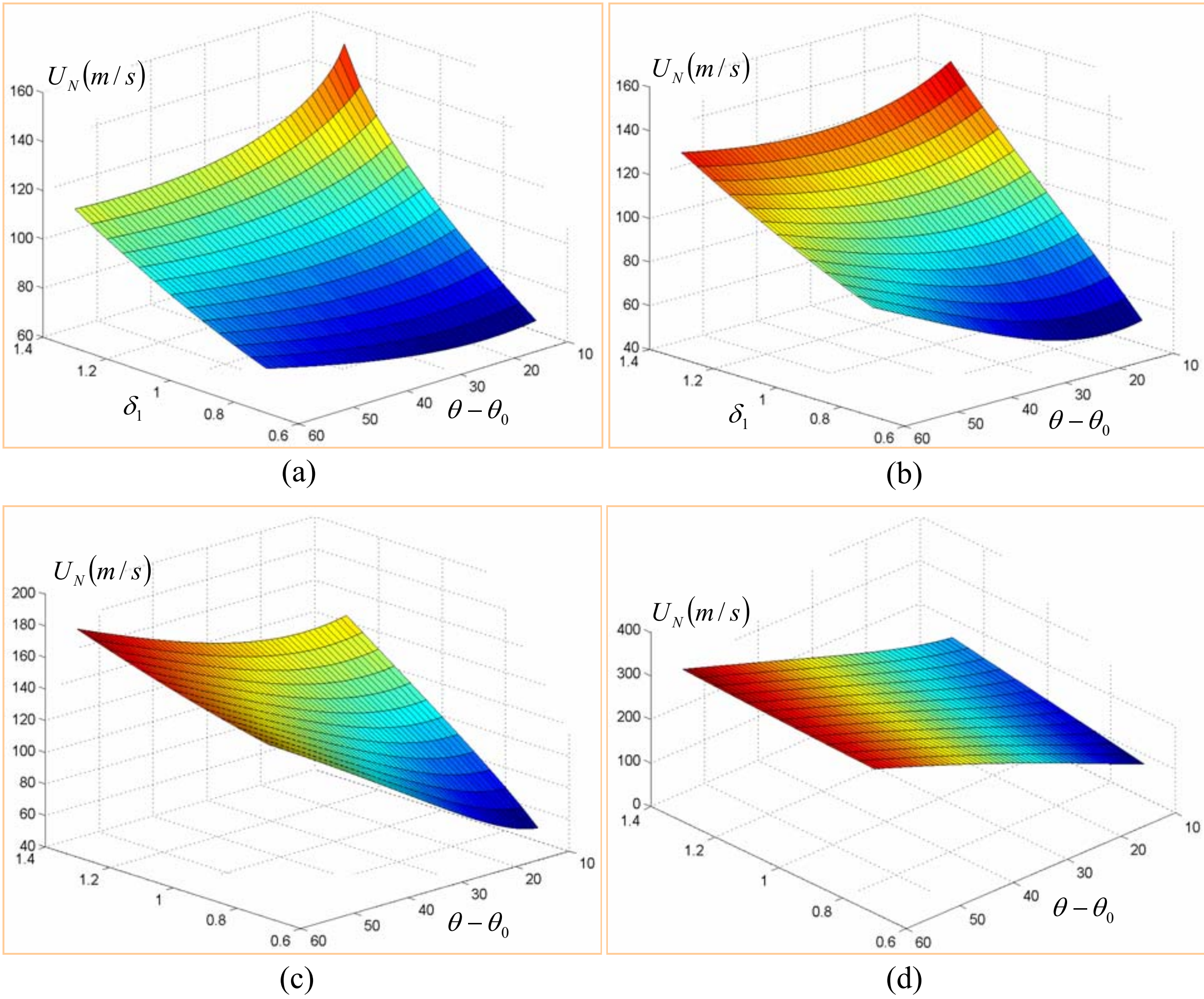
Şekil 4.9. Enine şok dalgalarının sıcaklık ve uzama oranıyla değişimi, lif doğrultu açısı γ a) 30 °, b) 45 °, c) 60 °, d) 75 °, β-γ =45 °



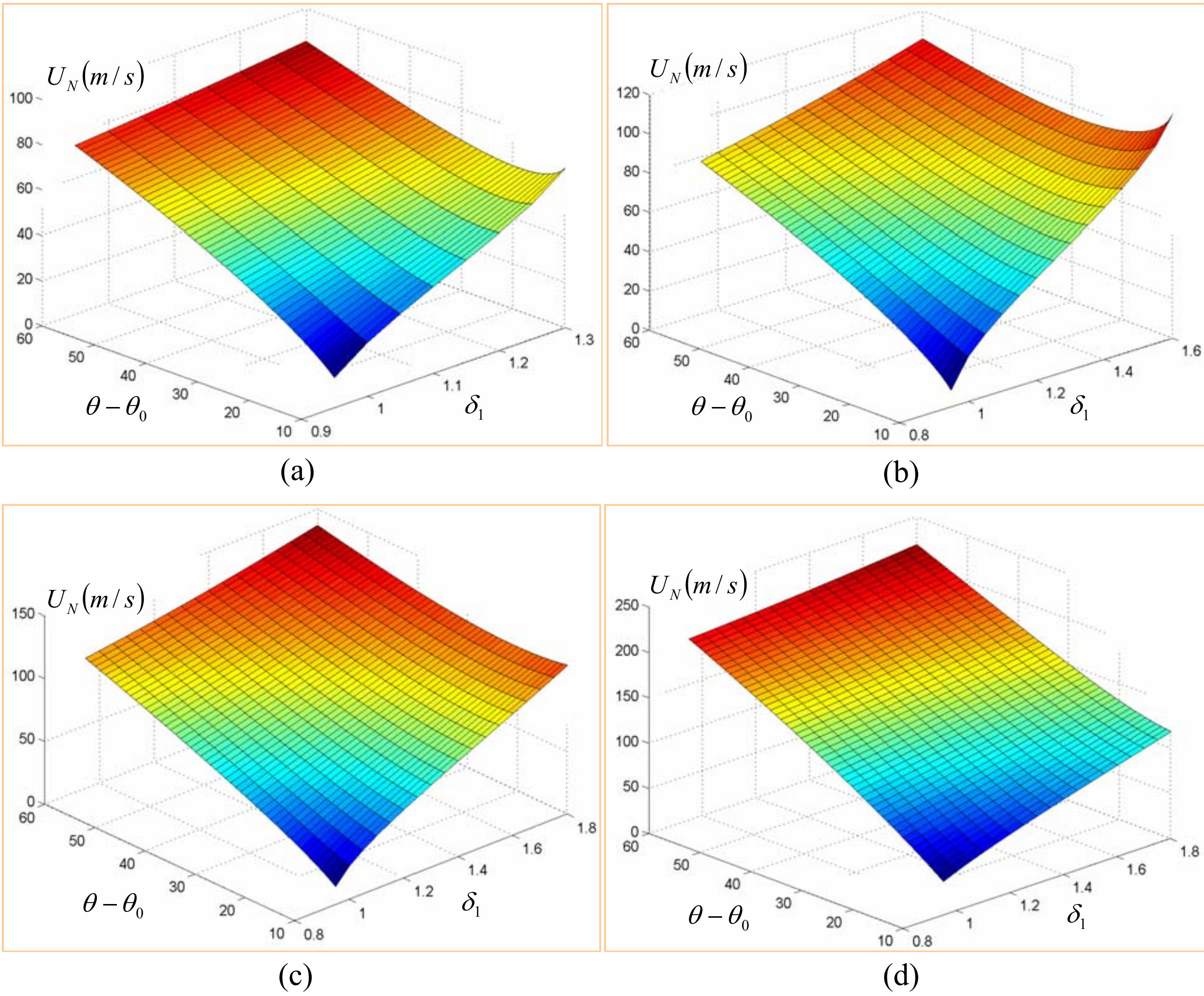
Şekil 4.10. Boyuna şok dalgalarının sıcaklık ve uzama oranıyla değişimi, lif doğrultu açısı γ a) 30 °, b) 45 °, c) 60 °, d) 75 °, β-γ =60 °



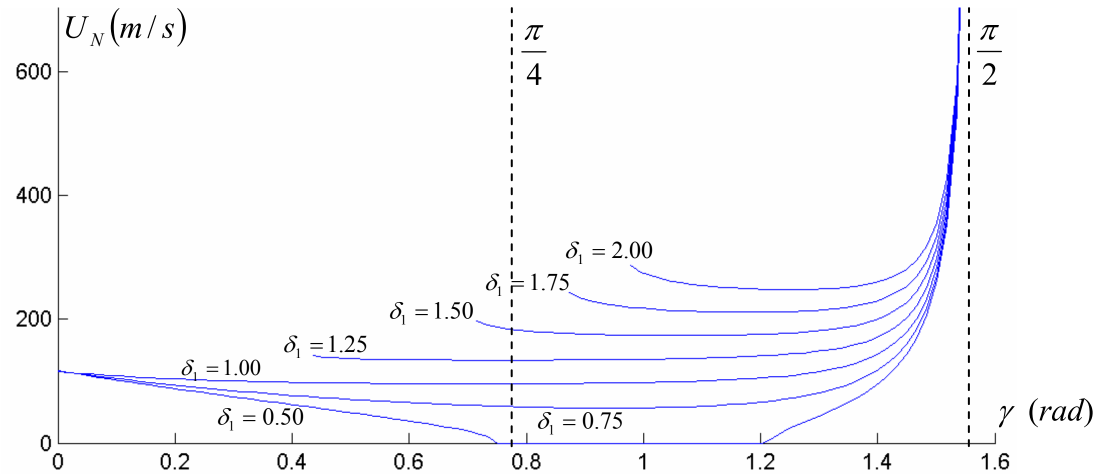
Şekil 4.11. Enine şok dalgalarının sıcaklık ve uzama oranıyla değişimi, lif doğrultu açısı γ a) 30 °, b) 45 °, c) 60 °, d) 75 °, β-γ =60 °



Şekil 4.12. Boyuna şok dalgalarının sıcaklık ve uzama oranıyla değişimi, lif doğrultu açısı γ a) 30 °, b) 45 °, c) 60 °, d) 75 °, β-γ =90°



Şekil 4.13. Enine şok dalgalarının sıcaklık ve uzama oranıyla değişimi, lif doğrultu açısı γ a) 30 °, b) 45 °, c) 60 °, d) 75 °, β-γ =90°



Şekil 4.14. $\theta - \theta_0$=10°K ve (β=γ+π/2) iken boyuna dalga hızı-lif doğrultu açısı grafiği

İki eksenli çekme altındaki ortam için yayılma hızları

Tek eksenli çekme altında bulunan ortam için kabul ettiğimiz malzeme sabitleri bu bölümde de kullanılacaktır. Eş. 4.76 ile verilen uzamazlık doğrultusundaki birim vektör ve yüzey birim normal vektörü burada da geçerlidir. İki eksenli çekme altındaki ortam için deformasyon gradyan tansörü, tersi ve evriği aşağıdaki gibidir.

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 & 0 \\ \tan\alpha & \delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} \delta_1 & \tan\alpha & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}^{-T} = \begin{bmatrix} 1/\delta_1 & 0 & 0 \\ -\tan\alpha/\delta_1\delta_2 & 1/\delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.89)$$

Sıcaklığa bağlı uzamazlık kısıtından elde edilen eşitlik yardımıyla, iki eksenli çekme için yazılan deformasyon gradyan tansörü ve **e** birim vektörü kullanılarak aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\delta_1^{\,2} Cos^2\gamma + \left(\tan\alpha\, Cos\gamma + \delta_2 Sin\gamma\right)^2 - h(\theta) = 0 \quad (4.90)$$

1- ve *2*-eksenleri doğrultusunda gerçekleşen δ_1 ve δ_2 uzamaları birbirlerinden bağımsızdır.

Kısıtlı deformasyon sırasında oluşan kayma deformasyonu bileşeni, Eş. 4.90 yardımıyla aşağıdaki gibi hesap edilir.

$$\tan\alpha = \left(\frac{h(\theta)}{\cos^2\gamma} - \delta_1^{\,2}\right)^{1/2} - \delta_2 \tan\gamma \tag{4.91}$$

1-ekseni doğrultusundaki uzamanın sınırı $\delta_1 \leq 1/\cos\gamma$ olarak belirlidir.

İki eksenli çekme altındaki ortam için geçerli olan hareket denkleminde kullanılacak vektörel ve tansörel çarpımlar aşağıda verimiştir.

$$\mathbf{FN} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \cos\beta \\ \tan\alpha\ \cos\beta + \delta_2 \sin\beta \\ 0 \end{Bmatrix},\ \mathbf{Fe} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \cos\gamma \\ \tan\alpha\ \cos\gamma + \delta_2 \sin\gamma \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{4.92}$$

$$\mathbf{FN} \otimes \mathbf{FN} = \begin{bmatrix} \delta_1^{\,2} \cos^2\beta & \delta_1 \cos\beta(\tan\alpha\ \cos\beta + \delta_2 \sin\beta) & 0 \\ \delta_1 \cos\beta(\tan\alpha\ \cos\beta + \delta_2 \sin\beta) & (\tan\alpha\ \cos\beta + \delta_2 \sin\beta)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.93}$$

$$\mathbf{Fe} \otimes \mathbf{Fe} = \begin{bmatrix} \delta_1^{\,2} \cos^2\gamma & \delta_1 \cos\gamma(\tan\alpha \cos\gamma + \delta_2 \sin\gamma) & 0 \\ \delta_1 \cos\gamma(\tan\alpha \cos\gamma + \delta_2 \sin\gamma) & (\tan\alpha \cos\gamma + \delta_2 \sin\gamma)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.94}$$

Sol Cauchy-Green deformasyon tansörü,

$$\mathbf{B} = \mathbf{FF}^T = \begin{bmatrix} \delta_1^{\,2} & \delta_1 \tan\alpha & 0 \\ \delta_1 \tan\alpha & \delta_2^{\,2} + \tan^2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.95}$$

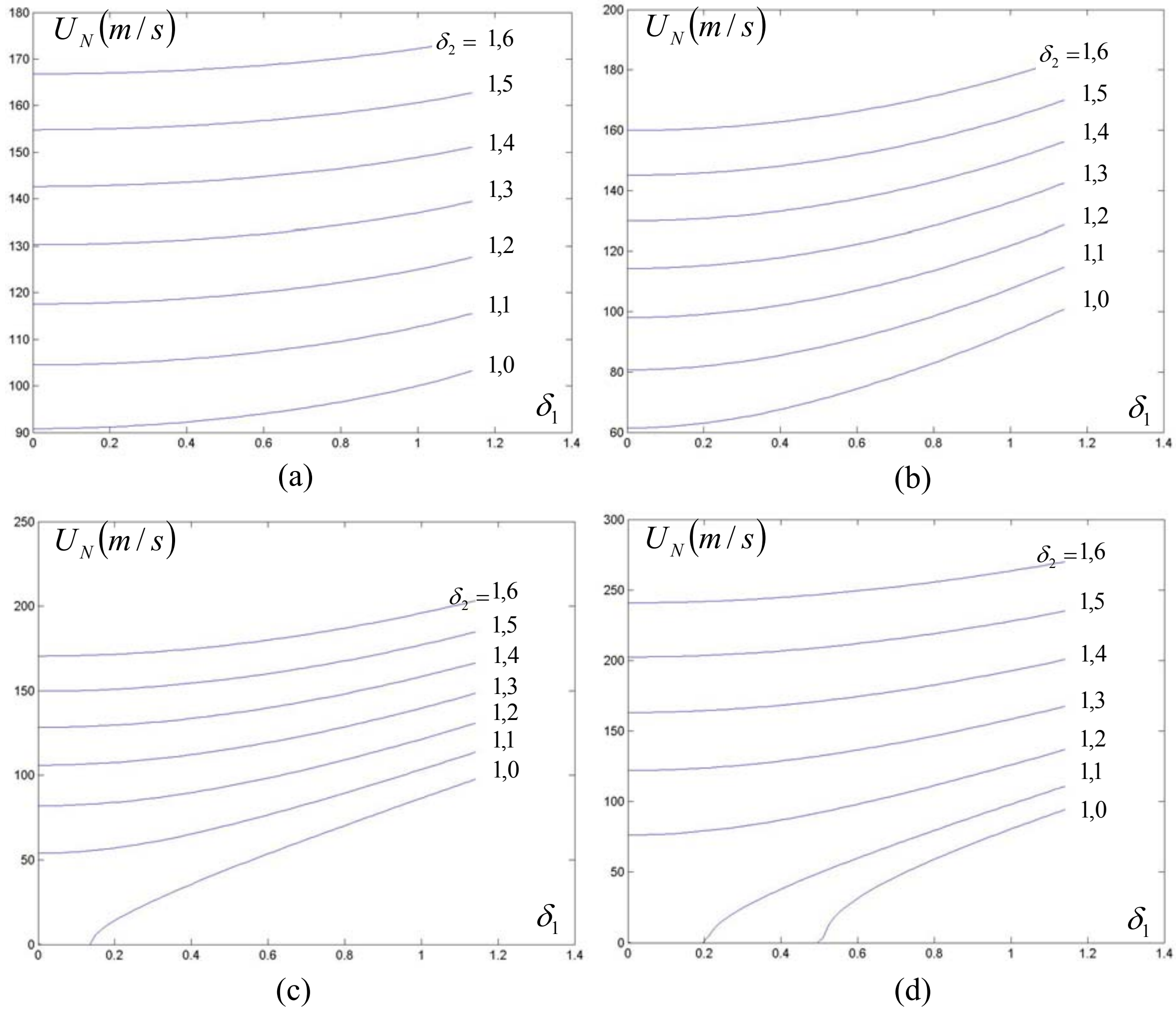
Sağ Cauchy-Green deformasyon tansörü,

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \delta_1^{\ 2} + \tan^2\alpha & \delta_2 \tan\alpha & 0 \\ \delta_2 \tan\alpha & \delta_2^{\ 2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.96}$$

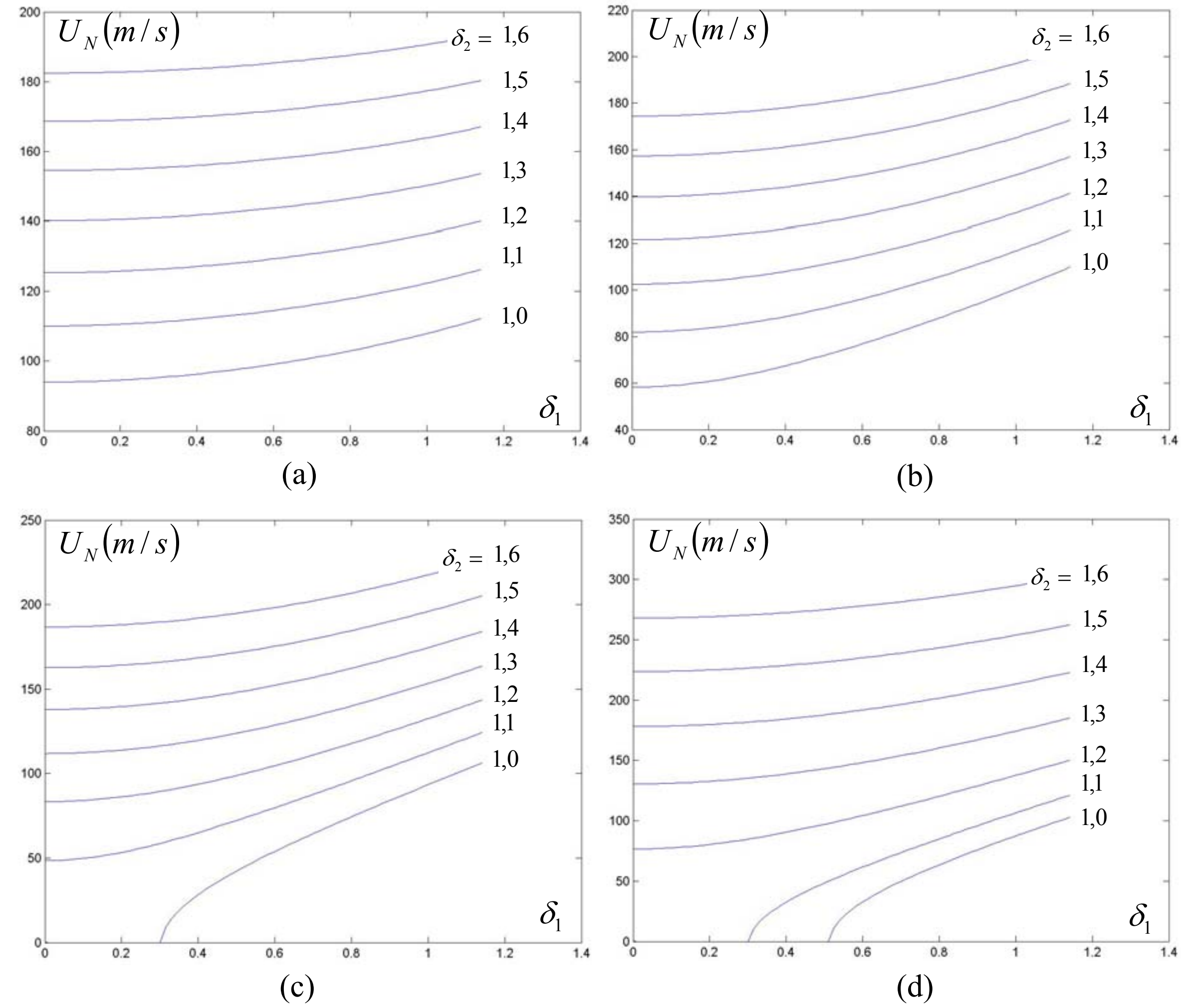
şekil değiştirme tansörü,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \delta_1^{\ 2} + \tan^2\alpha - 1 & \delta_2 \tan\alpha & 0 \\ \delta_2 \tan\alpha & \delta_2^{\ 2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.97}$$

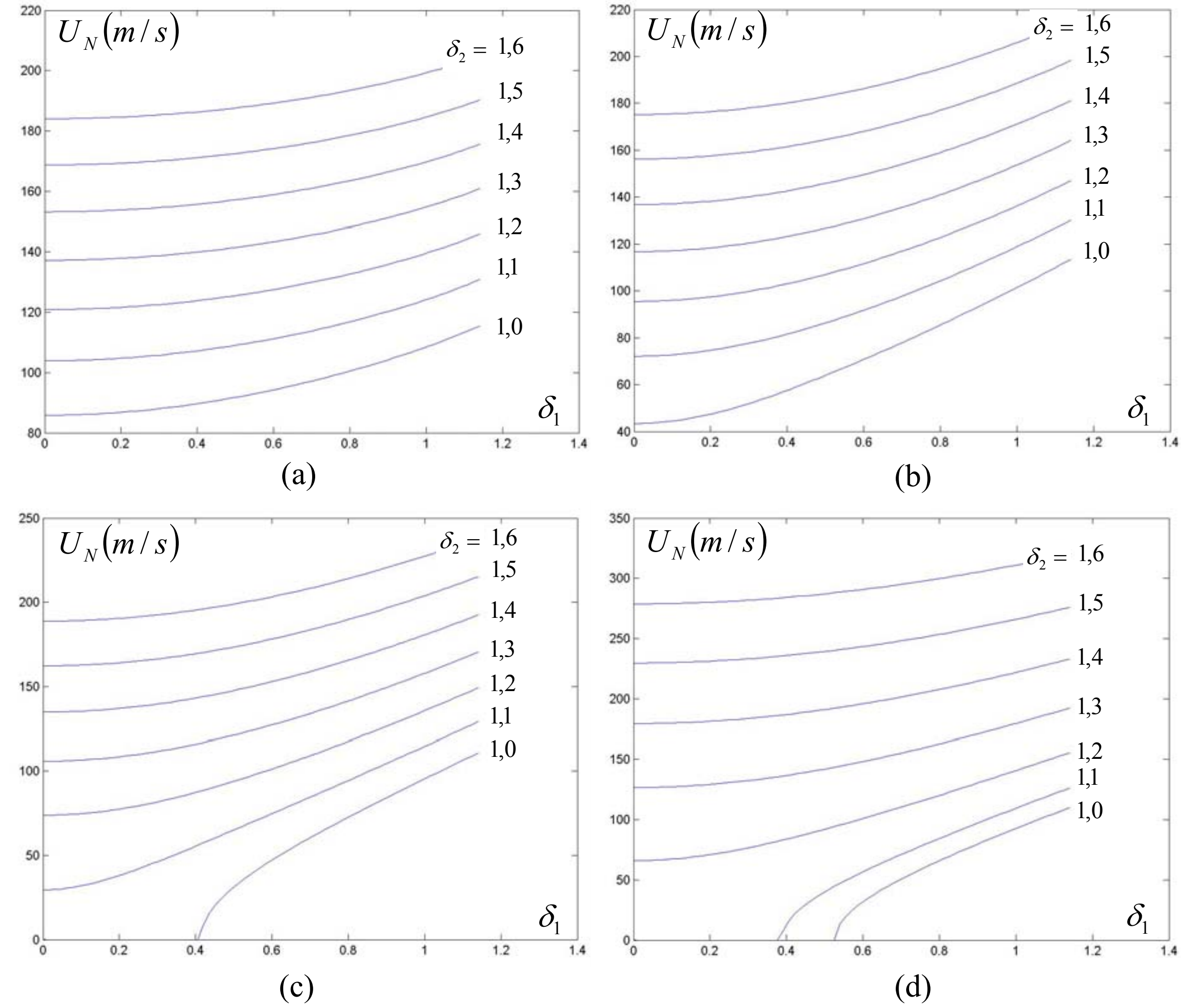
Eş. 4.53'de oluşturduğumuz bir adet termomekanik kısıt içeren termoelastik ortam için hareket denkleminden hız için yapılacak çözümleme ile elde edilen sonuçların, farklı **e** vektörü doğrultu açıları ve farklı dalga yayılma doğrultu açıları için *1*- ve *2*-ekseni doğrultusundaki uzama oranlarına göre değişimini gösteren grafikler Şekil 4.15 - Şekil 4.18' de verilmektedir.



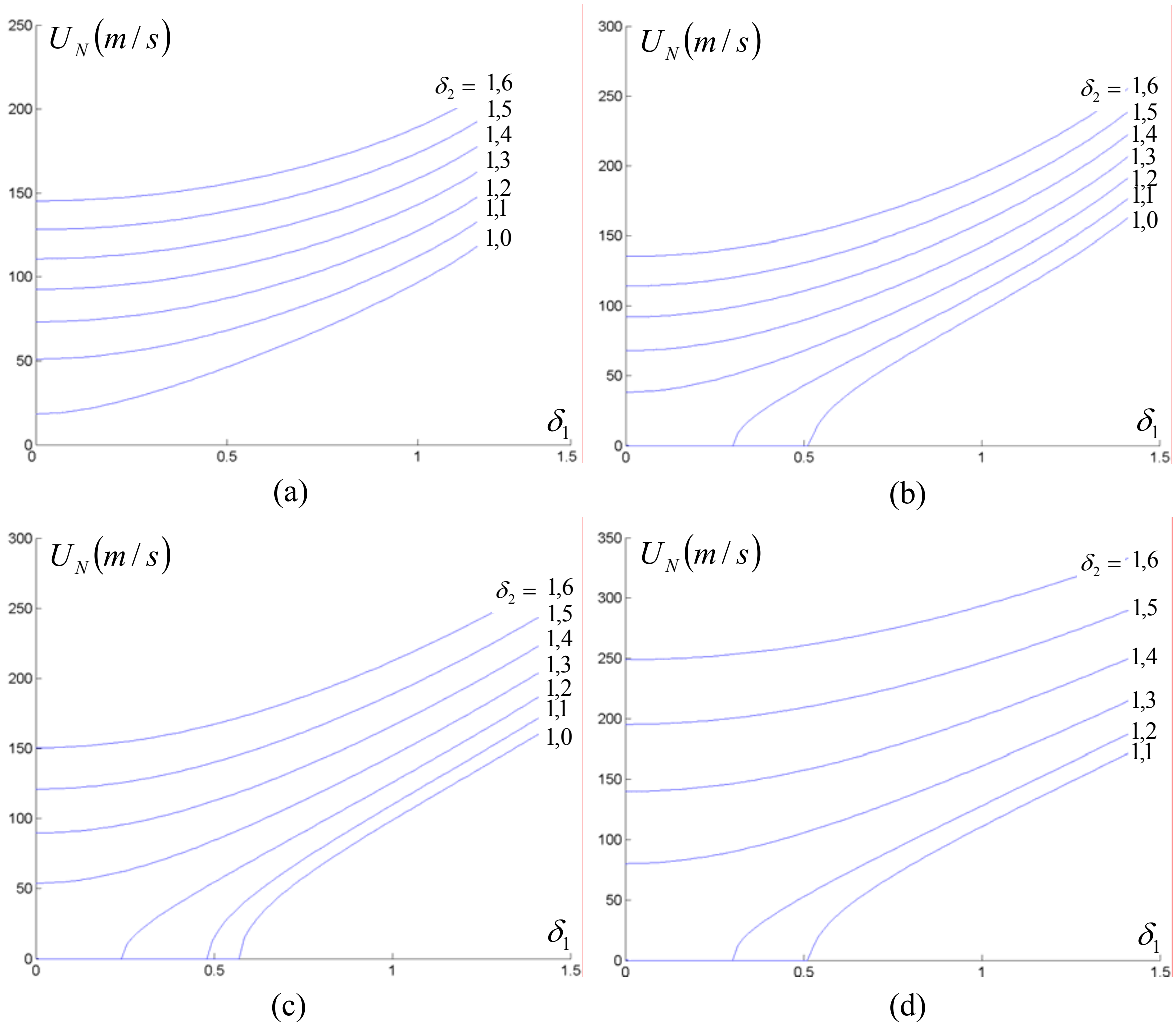
Şekil 4.15. İki eksenli çekme altındaki kısıtlı ortamda yayılan boyuna şok dalgasının uzama oranıyla değişimi açısı γ a) 30°, b) 45°, c) 60°, d) 75° ve $\beta = \gamma + \pi/6$



Şekil 4.16. İki eksenli çekme altındaki kısıtlı ortamda yayılan boyuna şok dalgasının uzama oranıyla değişimi açısı γ a) 30°, b) 45°, c) 60°, d) 75° ve $\beta=\gamma+\pi/4$



Şekil 4.17. İki eksenli çekme altındaki kısıtlı ortamda yayılan boyuna şok dalgasının uzama oranıyla değişimi açısı γ a) 30°, b) 45°, c) 60°, d) 75° ve $\beta = \gamma + \pi/3$



Şekil 4.18. İki eksenli çekme altındaki kısıtlı ortamda yayılan boyuna şok dalgasının uzama oranıyla değişimi açısı γ a) 30°, b) 45°, c) 60°, d) 75° ve $\beta = \gamma + \pi/2$

4.2. Saf Mekanik Kısıtlı Termoelastik Cisimler

4.2.1. Zayıf şok dalgası hareket denkleminin elde edilmesi

Böl.4.1.1'de termomekanik kısıtlı cisimler için oluşturulan zayıf şok dalgası hareket denklemi, kısıtlama fonksiyonunun sıcaklıktan bağımsız olduğu özel bir durum için bu bölümde incelenecektir. Eş. 4.52 veya Eş. 4.53, içerisinde ω^{-1} terimini içermektedir. Saf mekanik kısıtlı ortamlar için bu terim $\omega^{\alpha} = \partial\phi^{\alpha}/\partial\theta = 0$ olacaktır ve hareket denkleminde tanımsız ifadelere yol açacaktır. Bu nedenle, saf mekanik kısıtlı ortam için hareket denklemi yeniden oluşturulmak zorundadır. Saf mekanik kısıtlama fonksiyonu, sadece mekanik bağımsız değişkene yani deformasyon gradyanına bağlıdır. Eş. 2.101'de verilen saf mekanik kısıt fonksiyonuna bakılacak olursa, ifadenin mutlak sıcaklığa göre değişimi sıfır olacaktır ve bu doğrultuda aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$\omega^{\alpha} = \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial\theta\,\partial p_{\alpha}} = \frac{\partial \phi^{\alpha+}}{\partial\theta} = 0 \tag{4.98}$$

Eş. 4.29'da verilen entropideki sıçrama ifadesinde Eş. 4.98 yerine yazılarak,

$$[\![\eta]\!] = -\frac{1}{\rho_0}\mathbf{b}\bullet\mathbf{s} - \chi[\![\theta]\!] \tag{4.99}$$

elde edilir. Zayıf şok dalgalarının izentropik olduğu, yani entropideki sıçramanın sıfıra eşit olduğu düşünülecek olursa, sıcaklıktaki sıçrama saf mekanik kısıtlı cisimler için aşağıdaki gibi elde edilecektir.

$$[\![\theta]\!] = -\frac{1}{\rho_0\chi}\mathbf{b}\bullet\mathbf{s} \tag{4.100}$$

Eş. 4.2 ve Eş. 4.98 yardımıyla, Eş. 4.31 aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\frac{1}{\rho_0}\mathbf{C}^{\alpha}\bullet(\mathbf{s}\otimes\mathbf{N}) = \mathbf{c}^{\alpha}\bullet\mathbf{s} = 0\,,\qquad \alpha = 1,\ldots,n \tag{4.101}$$

Lagrange çarpanındaki sıçramayı saf mekanik kısıtlı ortamlar için elde etmek için aşağıdaki eşitliği sağlayacak bir $\mathbf{d}^{\beta}$ vektörü tanımlanır.

$$\mathbf{c}^{\alpha}\bullet\mathbf{d}^{\beta} = \delta^{\alpha\beta} \tag{4.102}$$

α ve β'nın alacağı değerlere göre ve Eş. 4.101 göz önünde bulundurularak aşağıdaki vektörel özellikler yazılabilir.

$$\beta = \gamma \rightarrow \mathbf{c}^{\alpha} \bullet \mathbf{d}^{\beta} = 1 \rightarrow \mathbf{c}^{\alpha} // \mathbf{d}^{\beta} \rightarrow \mathbf{d}^{\beta} \bullet \mathbf{s} = 0 \tag{4.103}$$

$$\beta \neq \gamma \rightarrow \mathbf{c}^{\alpha} \bullet \mathbf{d}^{\beta} = 0 \rightarrow \mathbf{c}^{\alpha} \perp \mathbf{d}^{\beta} \tag{4.104}$$

Eş. 4.40'de verilen hareket denkleminin her iki tarafı $\mathbf{d}^{\beta}$ vektörü ile skaler çarpılarak ve Eş. 4.100 yardımıyla,

$$[\![p_{\beta}]\!] = -\mathbf{Q}\mathbf{s} \bullet \mathbf{d}^{\beta} + \frac{1}{\rho_0 \chi}\left(\mathbf{b} \bullet \mathbf{d}^{\beta}\right)\left(\mathbf{b} \bullet \mathbf{s}\right) \tag{4.105}$$

olarak Lagrange çarpanındaki sıçrama elde edilir. Eş. 4.40'da verilen hareket denkleminde sıcaklıktaki sıçrama ve Lagrange çarpanındaki sıçrama yerlerine yazılarak saf mekanik kısıtlı ortam için zayıf şok dalgası hareket denklemi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\mathbf{Q}\mathbf{s} - \frac{1}{\rho_0 \chi}(\mathbf{b} \otimes \mathbf{b})\mathbf{s} - \sum_{\alpha=1}^{n}\left(\mathbf{c}^{\alpha} \otimes \mathbf{d}^{\beta}\right)\mathbf{Q}\mathbf{s} + \frac{1}{\rho_0 \chi}\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\mathbf{c}^{\alpha} \otimes \mathbf{d}^{\beta}\right)(\mathbf{b} \otimes \mathbf{b})\mathbf{s} = \rho_0 U_N{}^2 \mathbf{s} \tag{4.106}$$

veya

$$\left(\mathbf{I} - \sum_{\alpha=1}^{n}\left(\mathbf{c}^{\alpha} \otimes \mathbf{d}^{\beta}\right)\right)\hat{\mathbf{Q}}\mathbf{s} = \rho_0 U_N{}^2 \mathbf{s} \tag{4.107}$$

Burada $\hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q} - \frac{1}{\chi \rho_0}\left(\mathbf{b} \otimes \mathbf{b}\right)$'dir.

Eş. 4.107, birden fazla mekanik kısıt içeren termoelastik malzeme için zayıf şok dalgalarının yayılma denklemidir. Sürekli ortamda bir adet saf mekanik kısıt fonksiyonunun bulunduğu durumda hareket denklemi,

$$(\mathbf{I}-\mathbf{c}\otimes\mathbf{d})\hat{\mathbf{Q}}\mathbf{s}=\rho_0 {U_N}^2\mathbf{s} \tag{4.108}$$

halini alır. Burada Eş. 4.102'yi sağlayacak **d** vektörü ,

$$\mathbf{d}=\frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{c}|^2} \tag{4.109}$$

olarak bulunur. Bu durumda, aşağıdaki diyadik çarpım yazılabilir.

$$\mathbf{c}\otimes\mathbf{d}=\frac{{\rho_0}^2}{|\mathbf{c}|^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{F}}\mathbf{N}\otimes\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{F}}\mathbf{N}\right), \tag{4.110}$$

Burada, saf mekanik kısıtlı cisimler için geçerli ϕ kısıt fonksiyonunun deformasyon gradyan tansörüne göre türevi alınacak olursa,

$$\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{F}}=2(\mathbf{Fe}\otimes\mathbf{e}) \tag{4.111}$$

elde edilir. Bulunan türev eşitliğinin Eş. 4.111'de yerine yazacak olursak,

$$\mathbf{c}\otimes\mathbf{d}=\mathbf{Fe}\otimes\mathbf{Fe} \tag{4.112}$$

elde edilir. Eş. 4.107 içindeki akustik tansördeki **b** vektörlerinin diyadik çarpımı, St.Venant-Kirchhoff malzemeleri için kullanılan serbest enerji fonksiyonunun deformasyon gradyan tansörüne ve sıcaklığa göre türevleri alınarak aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$\mathbf{b} \otimes \mathbf{b} = (\kappa_T \beta_0)^2 \, \mathbf{FN} \otimes \mathbf{FN} \tag{4.113}$$

Eş. 4.112 ve Eş. 4.113 de elde edilen çarpımları Eş. 4.108'de yerine yazarak, bir doğrultuda uzamaz St.Venant-Kirchhoff malzemeleri için hareket denklemi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$(\mathbf{I} - \mathbf{Fe} \otimes \mathbf{Fe})\left(\mathbf{Q} - \frac{(\kappa_T \beta_o)^2}{\chi \rho_0} \mathbf{FN} \otimes \mathbf{FN}\right)\mathbf{s} = \rho_0 U_N{}^2 \mathbf{s} \tag{4.114}$$

Termoelastik ortam için oluşturulmuş, doğrusal olmayan St.Venant-Kirchhoff malzemeleri için **Q** akustik tansörü Eş. 4.56 ile aynı olacaktır. Eş. 4.101 ile verilen skaler çarpım Eş. 4.111 yardımıyla,

$$\mathbf{c} \bullet \mathbf{s} = (\mathbf{e} \bullet \mathbf{N})(\mathbf{Fe} \bullet \mathbf{s}) = 0 \tag{4.115}$$

halini alır.

4.2.2. Zayıf şok dalgası yayılma şartları

<u>Dalga eşiği ilerisinde **F** = **I**</u>

Dalga eşiği önünde deformasyon olmadığı durum için deformasyon gradyan tansörü ve tekillik yüzeyi normalleri aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\mathbf{F}^+ = \mathbf{I} \text{ ve } \mathbf{n} = \mathbf{N} \tag{4.116}$$

Eş. 4.114 içerisinde yukarıdaki özellik kullanılarak dalga geçişi öncesi deformasyonsuz olan ortam için hareket denklemi aşağıdaki gibi yazılır.

$$\left(\mathbf{I}-\mathbf{e}\otimes\mathbf{e}\right)\left(\mathbf{Q}-\frac{\left(\kappa_T\beta_0\right)^2}{\chi\rho_0}\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}\right)\mathbf{s}=\rho_0{U_N}^2\mathbf{s} \qquad (4.117)$$

Q akustik tansörü ise aşağıdaki hali alır.

$$\mathbf{Q}=\lambda\left(\mathbf{N}\otimes\mathbf{N}\right)+\mu\left(\mathbf{N}\otimes\mathbf{N}\right)+\mu\mathbf{I}-\kappa_T\beta_0\left(\theta-\theta_0\right)\mathbf{I} \qquad (4.118)$$

Eş. 4.115 ile verilen çarpım, dalga geçişi öncesi deformasyonsuz ortam için,

$$\left(\mathbf{e}\bullet\mathbf{n}\right)\left(\mathbf{e}\bullet\mathbf{s}\right)=0 \qquad (4.119)$$

olacaktır.

a. Boyuna zayıf şok dalgası yayılma hızı

Eş. 4.64 kullanılarak Eş. 4.119,

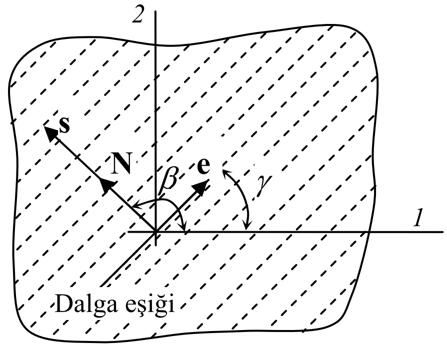
$$\mathbf{e}\bullet\mathbf{n}=0 \ \text{ ve } \ \mathbf{e}\bullet\mathbf{s}=0 \qquad (4.120)$$

halini alır. Buradan, bir doğrultuda uzamaz cisim içinde boyuna zayıf şok dalgasının uzamazlık doğrultusuna dik doğrultuda yayılmak durumunda olduğu ortaya çıkmaktadır. **e** ve **s** vektörleri birbirlerine dik olacağı için,

$$\left(\mathbf{e}\otimes\mathbf{e}\right)\mathbf{s}=0 \qquad (4.121)$$

eşitliği yazılabilir. Bu durumda Eş. 4.117 ile verilen hareket denklemi,

$$\left(\mathbf{Q}-\frac{\left(\kappa_T\beta_0\right)^2}{\chi\rho_0}\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}\right)\mathbf{s}=\rho_0{U_N}^2\mathbf{s} \qquad (4.122)$$



Şekil 4.19. Boyuna zayıf şok dalgası yayılma ve şok vektörü doğrultuları

$$\mathbf{Qs} - \frac{(\kappa_T \beta_0)^2}{\chi \rho_0} (\mathbf{n} \bullet \mathbf{s})\mathbf{n} = \rho_0 U_N{}^2 \mathbf{s} \tag{4.123}$$

Eş. 4.118 ve Eş. 4.116 yardımıyla,

$$\lambda(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})\mathbf{s} + \mu(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})\mathbf{s} + \mu \mathbf{s} - \kappa_T \beta_0 (\theta - \theta_0)\mathbf{s} - \frac{(\kappa_T \beta_0)^2}{\chi \rho_0} (\mathbf{n} \bullet \mathbf{s})\mathbf{n} = \rho_0 U_N{}^2 \mathbf{s}$$

elde edilir. Burada yer alan diyadik çarpımlardan kurtularak aşağıdaki ifade bulunabilir.

$$\left(\lambda + \mu - \frac{(\kappa_T \beta_0)^2}{\chi \rho_0} \right) (\mathbf{n} \bullet \mathbf{s})\mathbf{n} + \mu \mathbf{s} - \kappa_T \beta_0 (\theta - \theta_0)\mathbf{s} = \rho_0 U_N{}^2 \mathbf{s} \tag{4.124}$$

Şok tekillik vektörü **s** ile her iki taraf için nokta çarpımı yapılacak olursa,

$$\left(\lambda + \mu - \frac{(\kappa_T \beta_0)^2}{\chi \rho_0} \right) s^2 + \mu s^2 - \kappa_T \beta_0 (\theta - \theta_0) s^2 = \rho_0 U_N{}^2 s^2 \tag{4.125}$$

ve gerekli sadeleştirmeler yapılarak,

$$\left(\lambda+\mu-\frac{(\kappa_T\beta_0)^2}{\chi\rho_0}\right)+\mu-\kappa_T\beta_0(\theta-\theta_0)=\rho_0 U_N{}^2 \tag{4.126}$$

Uzamaz doğrultuya dik yayılan boyuna zayıf şok dalgası hızı,

$$U_N=\sqrt{\left(\frac{\lambda+\mu}{\rho_0}-\frac{(\kappa_T\beta_0)^2}{\chi\rho_0{}^2}\right)+\frac{\mu-\kappa_T\beta_0(\theta-\theta_0)}{\rho_0}} \tag{4.127}$$

olarak elde edilir.

b. Enine zayıf şok dalgası yayılma hızı

Enine zayıf şok dalgası yayılma problemi için Eş. 4.119 ile çıkarılabilecek iki durum bulunur. Bunlardan birincisi,

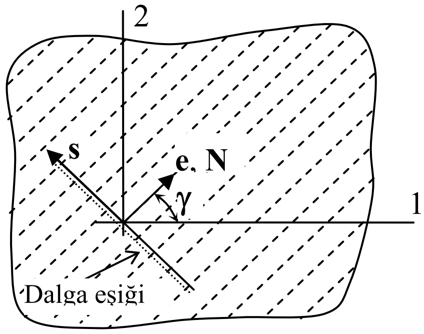
$$(\mathbf{e}\bullet\mathbf{n})=0 \text{ ve } \mathbf{s}\parallel\mathbf{e} \tag{4.128}$$

olan ve uzamaz liflere dik doğrultuda yayılan enine zayıf şok dalgasıdır. **e** doğrultusunda deformasyon olmayacağı için bu tip enine zayıf şok dalgası oluşmayacaktır. İkinci durum ise, uzamaz doğrultuya paralel yayılan enine zayıf şok dalgasıdır ve,

$$(\mathbf{e}\bullet\mathbf{s})=0 \text{ ve } \mathbf{n}\parallel\mathbf{e},\ \mathbf{s}\perp\mathbf{e},\ \mathbf{s}\perp\mathbf{n} \tag{4.129}$$

ifadeleri Eş. 4.119'u sağlar. Bu durumda şok tekillik vektörü **s,** uzamaz doğrultuya dik oluşacaktır ve zayıf şok dalgası uzamaz doğrultuya paralel doğrultuda yayılmak zorundadır. Eş. 4.117 ile verilen hareket denklemi,

$$\mathbf{Qs}-\frac{(\kappa_T\beta_0)^2}{\chi\rho_0}(\mathbf{n}\bullet\mathbf{s})\mathbf{n}=\rho_0 U_N{}^2\mathbf{s} \tag{4.130}$$



Şekil 4.20. Uzamaz liflerle kuvvetlendirilmiş olan cisimde enine zayıf şok dalgası

ve enine şok dalgası yayılma doğrultusunun şok tekillik vektörüne dik olması durumu kullanılarak hareket denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\mathbf{Qs} = \rho_0 U_N{}^2 \mathbf{s} \tag{4.131}$$

Eş. 4.118 ile verilen akustik tansör yukarıdaki ifadede yerine yazılarak,

$$\lambda(\mathbf{n}\otimes\mathbf{n})\mathbf{s} + \mu(\mathbf{n}\otimes\mathbf{n})\mathbf{s} + \mu\,\mathbf{s} - \kappa_T\beta_0(\theta-\theta_0)\mathbf{s} = \rho_0 U_N{}^2\mathbf{s} \tag{4.132}$$

$$\mu\,\mathbf{s} - \kappa_T\beta_0(\theta-\theta_0)\mathbf{s} = \rho_0 U_N{}^2\mathbf{s} \tag{4.133}$$

ve bir doğrultuda uzamaz cisim içinde yayılan enine zayıf şok dalgası hızı,

$$U_N = \sqrt{\frac{\mu - \kappa_T\beta_0(\theta-\theta_0)}{\rho_0}} \tag{4.134}$$

olarak elde edilir.

<u>Dalga eşiği ilerisinde $\mathbf{F} \neq \mathbf{I}$</u>

Eş. 4.115 ile verilen eşitlik, dalga yayılma doğrultusu üzerinde bazı kısıtlamalar getirmektedir. Buna göre, **e** birim vektörü doğrultusunda uzamayan cisim için,

a.Referans konumunda uzamaz doğrultuya dik yayılan dalga, $\mathbf{e} \bullet \mathbf{N} = 0$,

b.Uzaysal konumda uzamaz doğrultuya dik şok tekillik vektörüne sahip dalga,

$(\mathbf{Fe}) \bullet \mathbf{s} = 0$,

durumları düşünülmelidir. (a) maddesinde verilen ve **N** yayılma açısı: $\gamma + \pi / 2$ olan boyuna zayıf şok dalgası için,

$$\mathbf{e} \bullet \mathbf{N} = 0 \ , \ \mathbf{e} \bullet \mathbf{s} = 0 \ , \ \mathbf{N} \bullet \mathbf{s} = s \tag{4.135}$$

ve enine zayıf şok dalgası için,

$$\mathbf{e} \bullet \mathbf{N} = 0 \ , \ \mathbf{e} \bullet \mathbf{s} = s \ , \ \mathbf{N} \bullet \mathbf{s} = 0 \tag{4.136}$$

çarpımları geçerlidir. Enine zayıf şok dalgasında, hız sıçraması yönünde oluşan **s** vektörü uzamaz yönde gerçekleşir. Uzamazlık kısıtlaması bu doğrultuda bir hız sıçramasına izin vermemektedir. Bu nedenle uzamaz doğrultuya dik olarak yayılan enine zayıf şok dalgası oluşmayacaktır.

(b) maddesinde verilen $(\mathbf{Fe}) \bullet \mathbf{s} = 0$ eşitliğini sağlayacak dalga tipleri (a) maddesindeki dalga durumunun dışında, uzamazlık doğrultusuna paralel yayılan enine dalgadır. Bu dalga tipi için,

$$\mathbf{N} \bullet \mathbf{e} = 1 \ , \ \mathbf{Fe} \bullet \mathbf{s} = 0 \tag{4.137}$$

çarpımları geçerlidir.

Tek eksenli çekme altındaki ortam için yayılma hızları

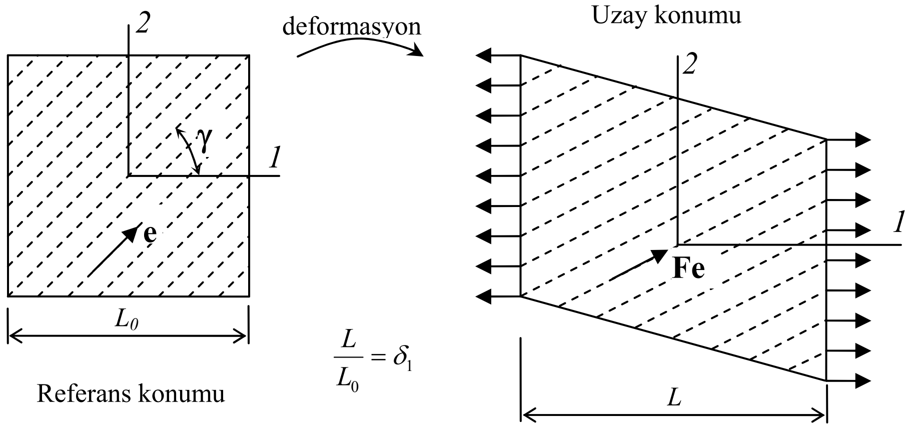
a. 1-ekseni doğrultusunda uzama, 2-ekseni doğrultusunda uzamanın olmadığı durum

Şekil 4.21'de verilen ve tek eksenli çekme altındaki bir doğrultuda uzamaz cisim için şekil değiştirme durumu Eş. 4.138'de verilen deformasyon gradyan tansörü ile tanımlıdır.

Bir doğrultuda uzamazlık kısıtının bulunması, çekme altındaki cisimde kayma deformasyonu meydana getirmektedir. Ortam ve yükleme durumu için geçerli deformasyon gradyan tansörünün tersi ve evriği aşağıda verilmektedir.

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 & 0 \\ \tan\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} \delta_1 & \tan\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}^{-T} = \begin{bmatrix} 1/\delta_1 & 0 & 0 \\ -\tan\alpha/\delta_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (4.138)$$

Şekil 4.21'de gösterilen, yatay eksen ile γ açısı yapan uzamazlık doğrultusundaki birim vektör **e** ve buna bağlı olarak (a) maddesinde yayılabileceğini belirttiğimiz boyuna zayıf şok dalgası için **N** birim normal vektörü aşağıdaki gibi yazılabilir.



Şekil 4.21. **e** doğrultusunda uzamaz saf mekanik kısıtlı cismin *1*-ekseninde uzaması.

$$\mathbf{e}=\begin{Bmatrix} Cos\gamma \\ Sin\gamma \\ 0 \end{Bmatrix},\ \mathbf{N}=\begin{Bmatrix} Cos\,\beta \\ Sin\,\beta \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{4.139}$$

Burada $\beta=\gamma+\dfrac{\pi}{2}$’dir. **e** doğrultusundaki uzamazlık kısıtlaması ile

$$\mathbf{Fe}\bullet\mathbf{Fe}=\delta_1^{\,2}Cos^2\gamma+\left(\tan\alpha\,Cos\gamma+Sin\gamma\right)^2=1 \tag{4.140}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik yardımıyla farklı “δ_1” uzamalarına karşılık gelen “$\tan\alpha$” değeri hesaplanacak ve deformasyon gradyan tansörü oluşturulacaktır. Ayrıca, **e** doğrultusundaki uzamazlık kısıtlaması nedeniyle ortamda oluşabilecek *1*-eksenindeki en büyük uzama değeri,

$$\delta_1=\frac{1}{\cos\gamma} \tag{4.141}$$

eşitliği ile belirlidir. Eş. 4.114 ile verilen hareket denklemi aşağıdaki gibi tekrar yazılabilir.

$$\mathbf{P\,s}=\rho_0U_N^{\;2}\mathbf{s} \tag{4.142}$$

Burada **P** matrisi,

$$\mathbf{P}=\left\{\mathbf{Q}-\frac{(\kappa_T\beta_0)^2}{\chi\rho_0}\left(\mathbf{FN}\otimes\mathbf{FN}\right)-\left(\mathbf{Fe}\otimes\mathbf{Fe}\right)\mathbf{Q}-\frac{(\kappa_T\beta_0)^2}{\chi\rho_0}\left(\mathbf{Fe}\otimes\mathbf{Fe}\right)\left(\mathbf{FN}\otimes\mathbf{FN}\right)\right\} \tag{4.143}$$

olarak tanımlıdır ve **Q** akustik tansörü Eş. 4.56 ile verilmektedir. Hareket denkleminde ve akustik tansörde yer alan matris ve diyadik çarpımları ise aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\mathbf{FN} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \cos\beta \\ \tan\alpha\ \cos\beta + \sin\beta \\ 0 \end{Bmatrix},\ \mathbf{Fe} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \cos\gamma \\ \tan\alpha\ \cos\gamma + \sin\gamma \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{4.144}$$

$$\mathbf{FN} \otimes \mathbf{FN} = \begin{bmatrix} \delta_1^{\ 2} \cos^2\beta & \delta_1 \cos\beta(\tan\alpha\ \cos\beta + \sin\beta) & 0 \\ \delta_1 \cos\beta(\tan\alpha\ \cos\beta + \sin\beta) & (\tan\alpha\ \cos\beta + \sin\beta)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.145}$$

$$\mathbf{Fe} \otimes \mathbf{Fe} = \begin{bmatrix} \delta_1^{\ 2} \cos^2\gamma & \delta_1 \cos\gamma(\tan\alpha \cos\gamma + \sin\gamma) & 0 \\ \delta_1 \cos\gamma(\tan\alpha \cos\gamma + \sin\gamma) & (\tan\alpha \cos\gamma + \sin\gamma)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.146}$$

Sol Cauchy-Green deformasyon tansörü,

$$\mathbf{B} = \mathbf{FF}^T = \begin{bmatrix} \delta_1^{\ 2} & \delta_1 \tan\alpha & 0 \\ \delta_1 \tan\alpha & 1 + \tan^2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.147}$$

Sağ Cauchy-Green deformasyon tansörü,

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \delta_1^{\ 2} + \tan^2\alpha & \tan\alpha & 0 \\ \tan\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.148}$$

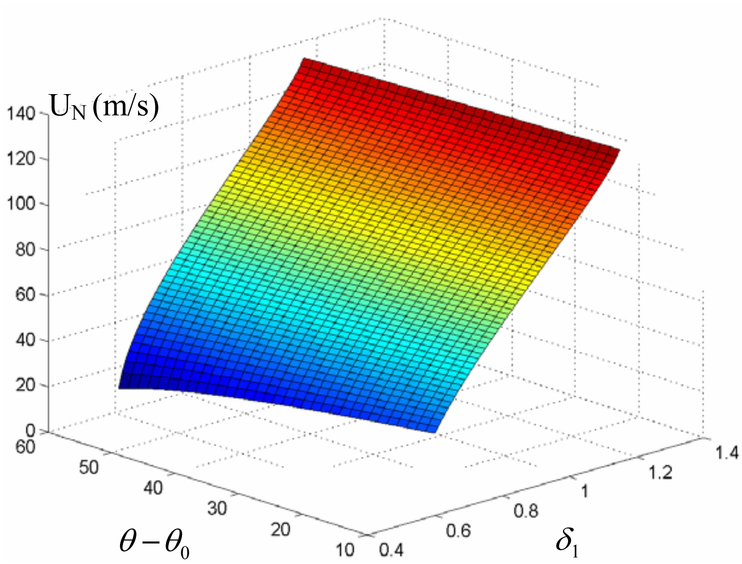
şekil değiştirme tansörü,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \delta_1^{\ 2} + \tan^2\alpha - 1 & \tan\alpha & 0 \\ \tan\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.149}$$

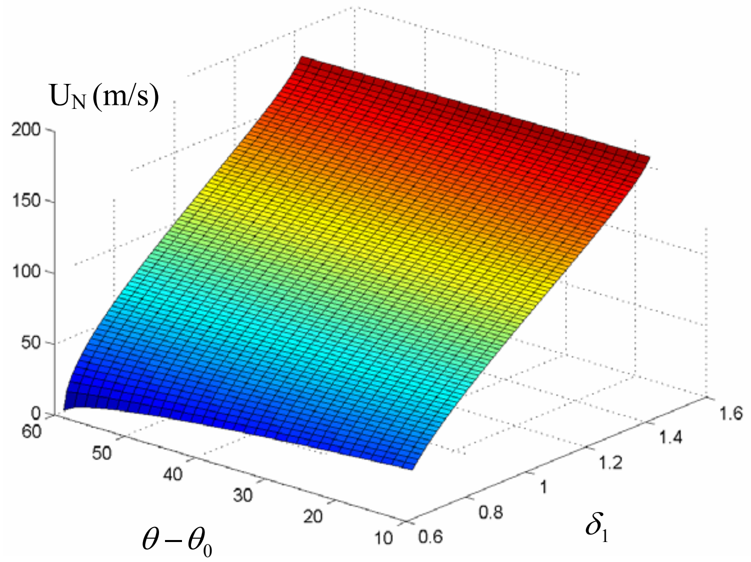
$$trE = \frac{1}{2}\left(\delta_1^{\,2} + \tan^2\alpha - 1\right) \tag{4.150}$$

$$\mathbf{EN} \bullet \mathbf{N} = \frac{1}{2}\cos\beta\sin\beta\tan\alpha + \cos\beta\left(\frac{1}{2}\sin\beta\tan\alpha + \frac{1}{2}\cos\beta\left(\delta_1^{\,2} + \tan^2\alpha - 1\right)\right) \tag{4.151}$$

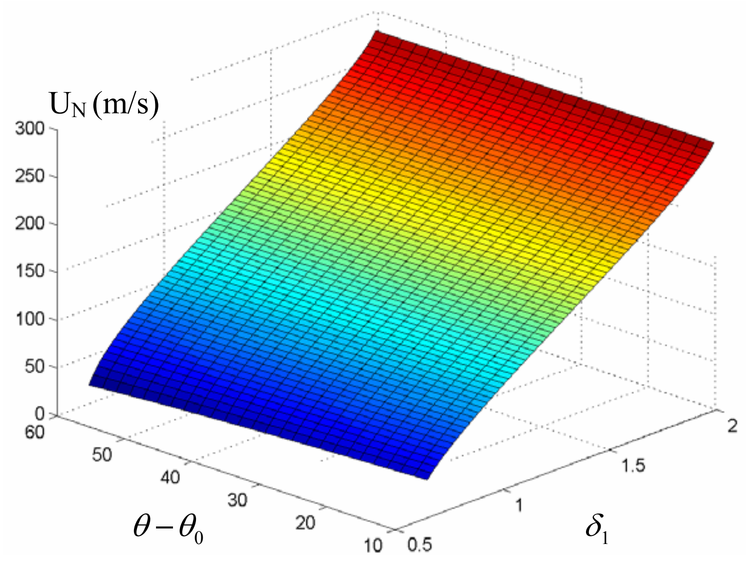
Burada elde edilen vektör ve tansör büyüklükler kullanılarak farklı γ açıları için $\mathbf{P}\,\mathbf{s} = \rho_0 U_N^{\,2}\mathbf{s}$, özdeğer probleminin çözümü ve sonucunda hesaplanan boyuna zayıf şok dalgası hızları aşağıdaki gibi olmaktadır.



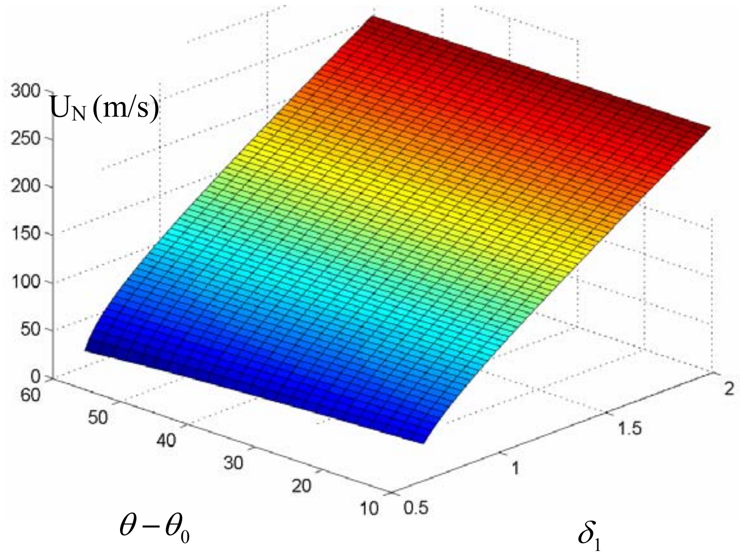
Şekil 4.22. $\gamma = \pi/6$ için boyuna zayıf şok dalgası hızının *1*-eksenindeki uzama ve sıcaklık artımıyla değişimi ($\beta = \gamma + \pi/2$)



Şekil 4.23. $\gamma = \pi/4$ için boyuna zayıf şok dalgası hızının *1*-eksenindeki uzama ve sıcaklık artımıyla değişimi ($\beta=\gamma+\pi/2$)



Şekil 4.24. $\gamma = \pi/3$ için boyuna zayıf şok dalgası hızının *1*-eksenindeki uzama ve sıcaklık artımıyla değişimi ($\beta=\gamma+\pi/2$)

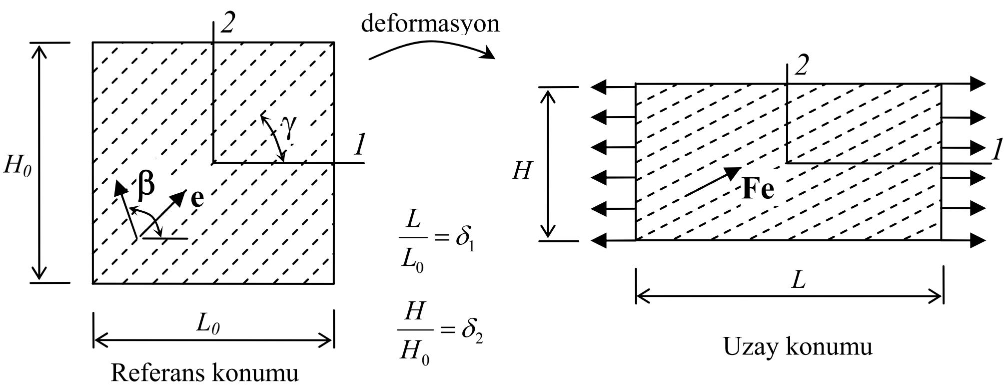


Şekil 4.25. $\gamma = 5\pi/12$ için boyuna zayıf şok dalgası hızının *1*-eksenindeki uzama ve sıcaklık artımıyla değişimi ($\beta=\gamma+\pi/2$)

b. 1-ekseni doğrultusunda uzama, 2-ekseni doğrultusunda kısalma durumu

Şekil 4.26'da gösterilen ve *1*- ve *2*-eksenlerinde sırasıyla δ_1 ve δ_2 uzaması yapan kısıtlı ortam için deformasyon gradyan tansörü, tersi ve evriği aşağıda görüldüğü gibi olacaktır.

$$\mathbf{F}=\begin{bmatrix}\delta_1 & 0 & 0\\ 0 & \delta_2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ \mathbf{F}^T=\begin{bmatrix}\delta_1 & 0 & 0\\ 0 & \delta_2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ \mathbf{F}^{-T}=\begin{bmatrix}1/\delta_1 & 0 & 0\\ 0 & 1/\delta_2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{4.152}$$



Şekil 4.26. **e** doğrultusunda uzamaz saf mekanik kısıtlı cismin *1*-ekseninde uzaması, *2* ekseninde kısalması.

Uzamazlık doğrultusu **e** ve dalga yayılma doğrultusu **N**, Eş. 4.139'da verilmektedir. Uzamazlık doğrultusuna dik yayılacak dalga için $\beta = \gamma + \frac{\pi}{2}$'dir. Uzamazlık kısıtı nedeniyle *1*- ve *2*-eksenindeki uzamalar arasında aşağıdaki bağıntı bulunur.

$$\mathbf{Fe} \bullet \mathbf{Fe} = 1 \;\rightarrow\; \delta_1^{\,2} Cos^2\gamma + \delta_2^{\,2} Sin^2\gamma = 1 \tag{4.153}$$

ve

$$\delta_1 = \delta \;,\; \delta_2 = \sqrt{\frac{1-\delta^2 Cos^2\gamma}{Sin^2\gamma}} \tag{4.154}$$

Eş. 4.142 ile verilen özdeğer problemi, Eş. 4.152 ile verilen deformasyon durumu kullanılarak çözülecektir. Bu doğrultuda, akustik tansörü oluşturan matris ve diyadik çarpımları aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\mathbf{FN} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \cos\beta \\ \delta_2 \sin\beta \\ 0 \end{Bmatrix},\; \mathbf{Fe} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \cos\gamma \\ \delta_2 \sin\gamma \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{4.155}$$

$$\mathbf{FN} \otimes \mathbf{FN} = \begin{bmatrix} \delta_1^{\,2} \cos^2\beta & \delta_1\delta_2 \cos\beta \sin\beta & 0 \\ \delta_1\delta_2 \cos\beta \sin\beta & \delta_2^{\,2} \sin^2\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.156}$$

$$\mathbf{Fe} \otimes \mathbf{Fe} = \begin{bmatrix} \delta_1^{\,2} \cos^2\gamma & \delta_1\delta_2 \cos\gamma \sin\gamma & 0 \\ \delta_1\delta_2 \cos\gamma \sin\gamma & \delta_2^{\,2} \sin^2\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.157}$$

Sol Cauchy-Green deformasyon tansörü,

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} \delta_1^{\,2} & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2^{\,2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.158}$$

Sağ Cauchy-Green deformasyon tansörü,

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \delta_1^{\,2} & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2^{\,2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.159}$$

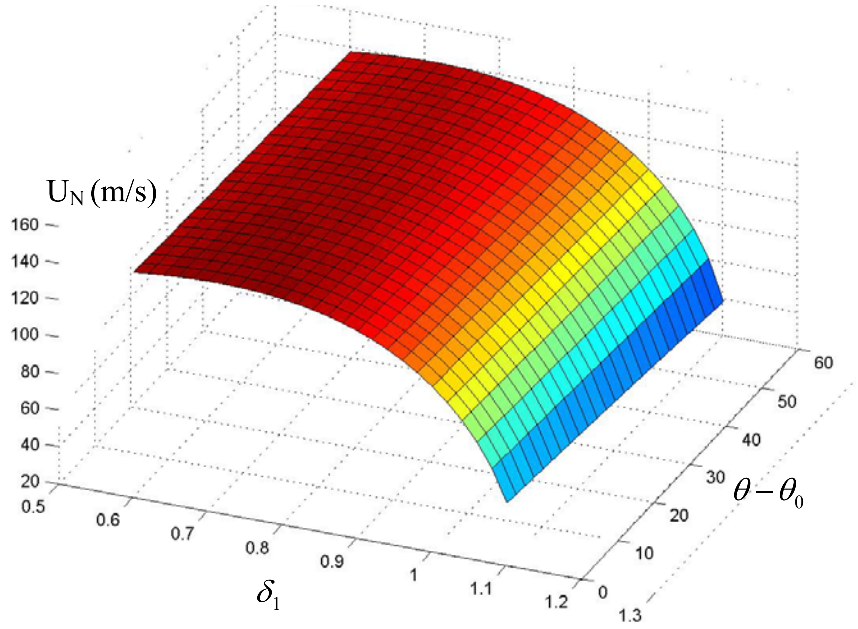
Şekil değiştirme tansörü,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \delta_1^{\,2} - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2^{\,2} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.160}$$

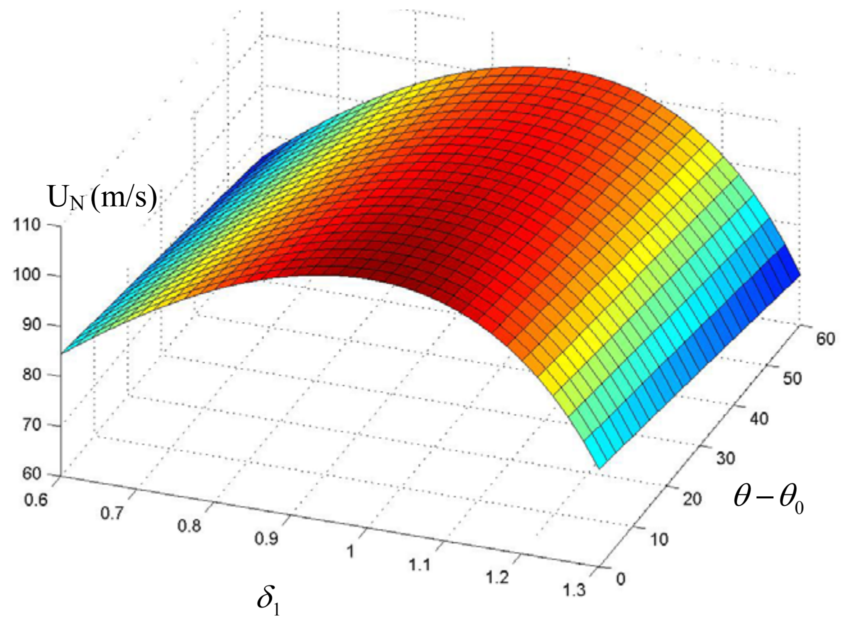
$$tr\mathbf{E} = \frac{1}{2}\left(\delta_1^{\,2} + \delta_2^{\,2} - 2\right) \tag{4.161}$$

$$\mathbf{EN} \bullet \mathbf{N} = \frac{1}{2}\left(\delta_1^{\,2} - 1\right)\cos^2\beta + \frac{1}{2}\left(\delta_2^{\,2} - 1\right)\sin^2\beta \tag{4.162}$$

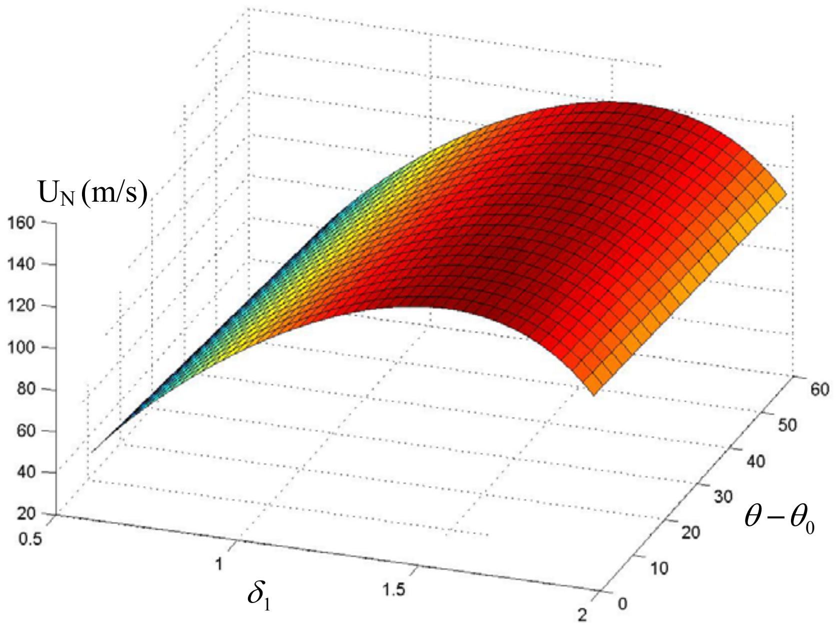
Örnek malzeme parametreleri kullanılarak özdeğer probleminin çözümü sonucunda zayıf şok dalgası hızları, farklı uzamazlık doğrultuları ve sıcaklık artımları için aşağıdaki gibi elde edilmektedir.



Şekil 4.27. $\gamma=\pi/6$ için boyuna zayıf şok dalgası hızının *1*-eksenindeki uzama ve sıcaklık artımıyla değişimi ($\beta=\gamma+\pi/2$)



Şekil 4.28. $\gamma=\pi/4$ için boyuna zayıf şok dalgası hızının *1*-eksenindeki uzama ve sıcaklık artımıyla değişimi ($\beta=\gamma+\pi/2$)



Şekil 4.29. $\gamma = \pi/3$ için boyuna zayıf şok dalgası hızının *1*-eksenindeki uzama ve sıcaklık artımıyla değişimi ($\beta=\gamma+\pi/2$)

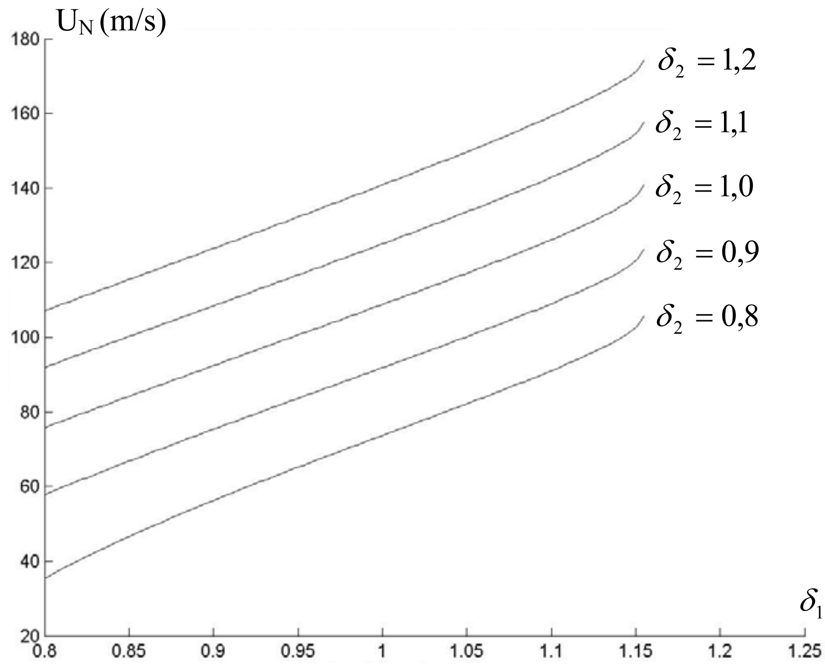
İki eksenli çekme altındaki ortam için yayılma hızları

İki eksenli çekme altındaki **e** doğrultusunda uzamaz cisim için kullanılacak deformasyon gradyan tansörünün bileşenleri, tersi ve evriği aşağıdaki gibidir.

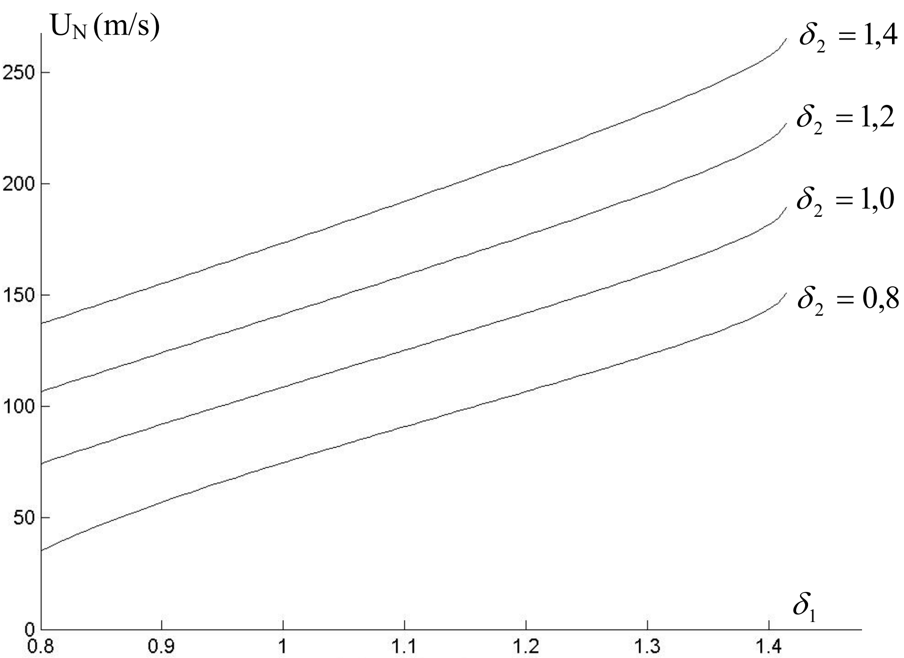
$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 & 0 \\ \tan\alpha & \delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} \delta_1 & \tan\alpha & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}^{-T} = \begin{bmatrix} 1/\delta_1 & 0 & 0 \\ -\tan\alpha/\delta_1\delta_2 & 1/\delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.163}$$

e doğrultusundaki uzamazlık kısıtı kullanılarak deformasyon gradyan tansörünün bilinmeyen bileşeni $\tan\alpha$ aşağıdaki gibi elde edilir.

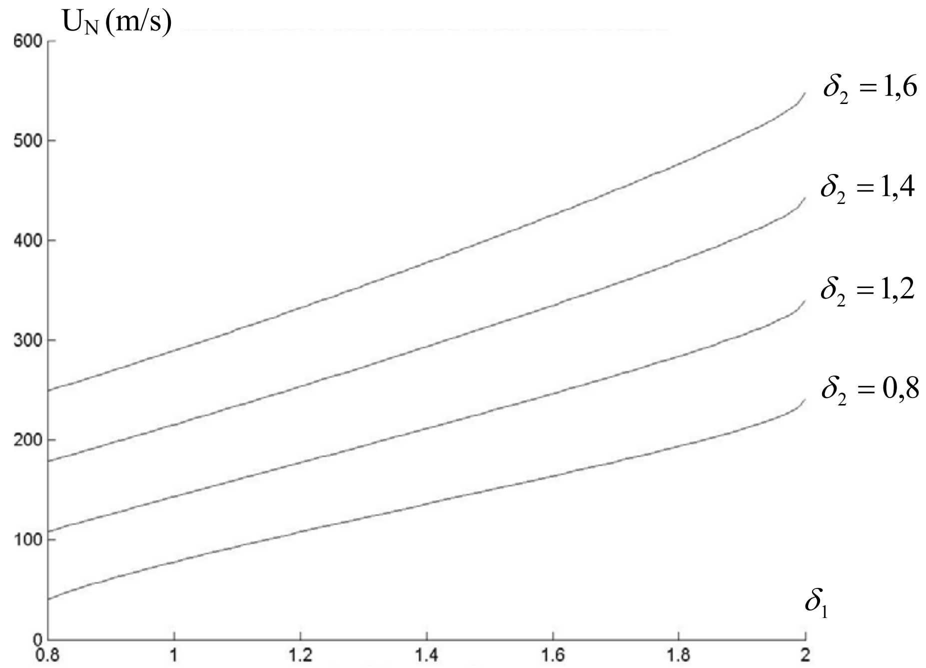
$$\tan\alpha = \sqrt{\frac{1}{Cos^2\gamma} - \delta_1^{\,2}} - \delta_2 \tan\gamma \tag{4.164}$$



Şekil 4.30. $\gamma = \pi/6$ için boyuna zayıf şok dalgası hızının *1*-eksenindeki uzama ve sıcaklık artımıyla değişimi, ($\beta = \gamma + \pi/2$) ve $\theta - \theta_0 = 10°K$



Şekil 4.31. $\gamma = \pi/4$ için boyuna zayıf şok dalgası hızının *1*-eksenindeki uzama ve sıcaklık artımıyla değişimi, ($\beta = \gamma + \pi/2$) ve $\theta - \theta_0 = 10°K$



Şekil 4.32. $\gamma = \pi/3$ için boyuna zayıf şok dalgası hızının *1*-eksenindeki uzama ve sıcaklık artımıyla değişimi, ($\beta = \gamma + \pi/2$) ve $\theta - \theta_0 = 10°\mathrm{K}$

4.3. Kısıtsız Termoelastik Cisimler

Bu bölümde bünyesinde kısıtlama olmayan termoelastik bir cisim için zayıf şok dalgası yayılma şartları incelenecektir. Kısıtlı termoelastik cisimler için izlenen yol takip edilerek, tekillik yüzeyi üzerinde süreksizlik gösteren parametreler için Taylor seri açılımı yardımıyla sıçrama ifadeleri belirlenecektir.

4.3.1. Zayıf şok dalgası hareket denkleminin elde edilmesi

Eş. 2.63 ile kapalı formda verilen Helmholtz serbest enerji fonksiyonunun dalga eşiği gerisindeki değerinin, dalga eşiği ilerisindeki değeri etrafındaki Taylor serisi açılımı,

$$\psi^- = \psi^+ + \frac{\partial \psi^+}{\partial \mathbf{F}} \bullet \left(\mathbf{F}^- - \mathbf{F}^+\right) + \frac{\partial \psi^+}{\partial \theta}\left(\theta^- - \theta^+\right) + \cdots \tag{4.165}$$

olarak yazılabilir. Serbest enerji fonksiyonunun deformasyon gradyan tansörüne göre türevi için Taylor serisi açılımı ise,

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{F}}\right)^{-}=\left(\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{F}}\right)^{+}+\frac{\partial^2\psi^{+}}{\partial\mathbf{F}\partial\mathbf{F}}\left(\mathbf{F}^{-}-\mathbf{F}^{+}\right)+\frac{\partial^2\psi^{+}}{\partial\mathbf{F}\partial\theta}\left(\theta^{-}-\theta^{+}\right)+\ldots \tag{4.166}$$

olarak yazılır. Serbest enerji fonksiyonunun sıcaklığa göre türevinin Taylor serisi açılımı,

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)^{-}=\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)^{+}+\frac{\partial^2\psi^{+}}{\partial\theta\partial\mathbf{F}}\left(\mathbf{F}^{-}-\mathbf{F}^{+}\right)+\frac{\partial^2\psi^{+}}{\partial\theta\partial\theta}\left(\theta^{-}-\theta^{+}\right)+\ldots \tag{4.167}$$

olacaktır. Eş. 4.165 – Eş. 4.167 düzenlenerek bu parametrelerin dalga eşiği üzerindeki sıçrama ifadeleri aşağıdaki hesaplanabilir.

$$[[\psi]]=\frac{\partial\psi^{+}}{\partial\mathbf{F}}\bullet[[\mathbf{F}]]+\frac{\partial\psi^{+}}{\partial\theta}[[\theta]] \tag{4.168}$$

$$[[\partial\psi/\partial\mathbf{F}]]=\frac{\partial^2\psi}{\partial\mathbf{F}\partial\mathbf{F}}\bullet[[\mathbf{F}]]+\frac{\partial^2\psi}{\partial\mathbf{F}\partial\theta}[[\theta]] \tag{4.169}$$

$$[[\partial\psi/\partial\theta]]=\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta\partial\mathbf{F}}\bullet[[\mathbf{F}]]+\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta\partial\theta}[[\theta]] \tag{4.170}$$

Eş. 2.70'de verilen 1. Piola – Kirchhoff gerilme tansöründeki sıçrama ise

$$[[\mathbf{T}]]=\mathbf{A}\bullet[[\mathbf{F}]]+\mathbf{B}[[\theta]] \tag{4.171}$$

olarak yazılır. Burada dördüncü mertebeden elastisite tansörü **A**,

$$\mathbf{A}=\rho_0\frac{\partial^2\psi}{\partial\mathbf{F}\partial\mathbf{F}} \tag{4.172}$$

İkinci mertebeden sıcaklık-deformasyon tansörü **B**,

$$\mathbf{B} = \rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{F} \partial \theta} \tag{4.173}$$

olarak tanımlıdır. Eş. 2.68'de verilen entropi eşitliğinin sıçrama formu ise aşağıdaki gibi elde edilir.

$$[\![\eta]\!] = -\frac{1}{\rho_0} \mathbf{B} \bullet [\![\mathbf{F}]\!] + \chi [\![\theta]\!] \tag{4.174}$$

Burada, $\chi = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}$ olarak tanımlıdır. Serbest enerji fonksiyonu, gerilme ve entropideki sıçrama ifadelerini Eş. 4.11'de yerine yazarak aşağıdaki sonuca ulaşılabilir.

$$[\![\eta]\!] = 0 \tag{4.175}$$

Sıcaklık parametresindeki sıçrama ise, Eş. 4.175'in Eş. 4.174'de yerine yazılmasıyla,

$$[\![\theta]\!] = \frac{1}{\chi \rho_0} \mathbf{B} \bullet (\mathbf{s} \otimes \mathbf{N}) \tag{4.176}$$

olarak hesaplanır. 4. mertebeden elastisite tansörü **A** ve ikinci mertebeden sıcaklık - deformasyon tansörü **B**, serbest enerji fonksiyonunun deformasyon gradyanına ve sıcaklığa göre türevlerinin hesaplanmasının ardından aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} A_{mNrM} &= \lambda F_{rM} F_{mN} + \lambda E_{KK} \delta_{mr} \delta_{NM} + 2\mu \delta_{mr} E_{MN} + \mu F_{mM} F_{rN} \\ &\quad + \mu F_{mL} F_{rL} \delta_{NM} - \kappa_T \beta_0 (\theta - \theta_0) \delta_{mr} \delta_{NM} \end{aligned} \tag{4.177}$$

$$B_{kL} = -\kappa_T \beta_0 F_{kL} \tag{4.178}$$

Yukarıda belirlenen sıcaklık parametresindeki sıçramanın ve **A** ve **B** tansörlerinin Eş. 4.171'de yerine yazılmasıyla aşağıdaki gerilme ifadesi hesaplanabilir.

$$
\begin{aligned}
[[T_{kL}]] = {} & \lambda(F_{mN}N_N)s_m F_{kL} + \lambda(\mathrm{tr}\mathbf{E})s_k N_L + 2\mu s_k E_{LN} N_N + \mu(F_{kN}N_N)F_{mL}s_m \\
& + \mu F_{kR}F_{mR}\, s_m N_L - \kappa_T \alpha_0(\theta-\theta_0)s_k N_L - \frac{(\kappa_T\alpha_0)^2}{\chi\rho_0}(F_{nR}N_R s_n)F_{kL}
\end{aligned}
\tag{4.179}
$$

Son olarak birinci Piola – Kirchhoff gerilmesinde gerçekleşen sıçramanın Eş. 4.39'da yerine yazılmasıyla termoelastik ortam için zayıf şok dalgası hareket denklemi aşağıdaki gibi oluşturulabilir.

$$
\mathbf{Qs} = \rho_0 {U_N}^2 \mathbf{s} \tag{4.180}
$$

Burada, ikinci mertebeden **Q** akustik tansörü,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Q} = {} & \left(\lambda + \mu - \frac{(\kappa_T\alpha_0)^2}{\chi\rho_0}\right)(\mathbf{FN}\otimes\mathbf{FN}) + \lambda(\mathrm{tr}\mathbf{E})\mathbf{I} + 2\mu(\mathbf{EN}\bullet\mathbf{N})\mathbf{I} \\
& + \mu\mathbf{F}\mathbf{F}^{\mathrm{T}} - \kappa_T\alpha_0(\theta-\theta_0)\mathbf{I}
\end{aligned}
\tag{4.181}
$$

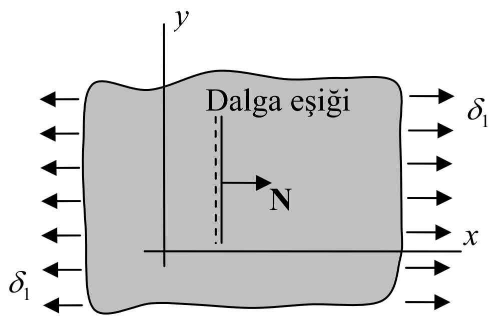
olarak yazılır.

4.3.2. Zayıf şok dalgası yayılma şartları

<u>Tek eksenli çekme altındaki ortam için yayılma hızları</u>

Tek eksenli çekme altındaki kısıtsız termoelastik malzeme için deformasyon gradyan tansörü,

$$
[\mathbf{F}] = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.182}
$$



Şekil 4.33. Tek eksenli çekme altındaki cisimde zayıf şok dalgası yayılma doğrultusu

olarak yazılabilir. Burada *1*-ekseni boyunca uzama oranı δ_1’dir. Ortamda ilerleyecek zayıf şok dalgası yüzeyi için birim normal vektör ise aşağıdaki gibi seçilmiştir.

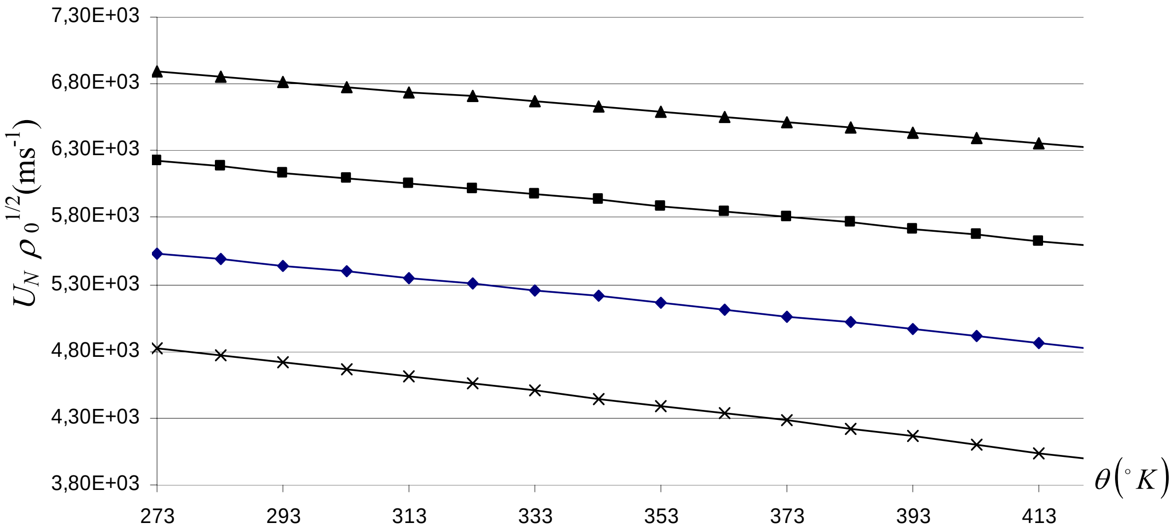
$$\left[\mathbf{N}^T\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.183}$$

Bu deformasyon durumu için zayıf şok dalgası hızları boyuna ve enine zayıf şok dalgaları için sırasıyla,

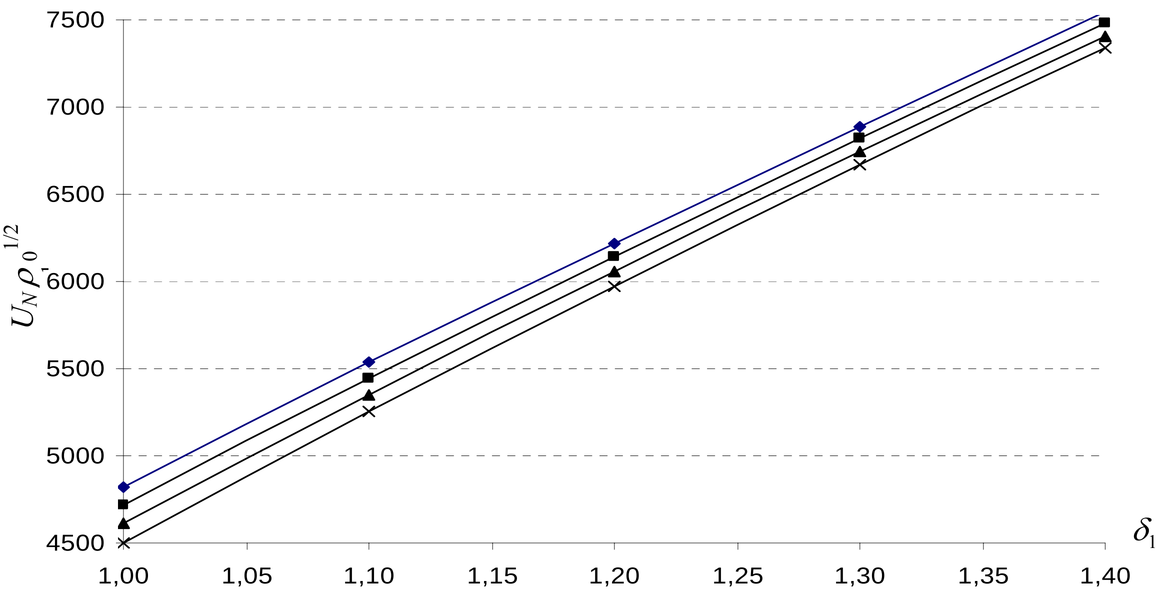
$$U_n^{(1)} = \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2}+\mu\right)\frac{\left(3\delta_1^{\,2}-1\right)}{\rho_0} - \frac{\left(\kappa_T\alpha_0\right)^2}{\chi\rho_0^{\,2}}\delta_1^{\,2} - \frac{\left(\kappa_T\alpha_0\left(\theta-\theta_0\right)\right)}{\rho_0}} \tag{4.184}$$

$$U_n^{(2)} = \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2}+\mu\right)\frac{\delta_1^{\,2}}{\rho_0} - \frac{\lambda}{2\rho_0} - \frac{\kappa_T\alpha_0\left(\theta-\theta_0\right)}{\rho_0}} \tag{4.185}$$

olarak elde edilir.



Şekil 4.34. Farklı uzama oranları için boyuna dalga hızı – sıcaklık grafiği
$\delta_1 = 1.0$, $\delta_1 = 1.1$, $\delta_1 = 1.2$, $\delta_1 = 1.3$ $(\theta_0 = 273K)$



Şekil 4.35. Farklı sıcaklık artımları için boyuna dalga hızı – uzama grafiği
$\theta - \theta_0 = 0$, $\theta - \theta_0 = 20°K$, $\theta - \theta_0 = 40°K$,
$\theta - \theta_0 = 60°K$ $(\theta_0 = 273K)$

İki eksenli çekme altındaki ortam için yayılma hızları

Eş. 4.188'de verilen deformasyon gradyan tansöründe $\alpha = \delta_1$, $\beta = \delta_2$ ve $\gamma = 1$ değerleri kullanılarak oluşturulacak deformasyon gradyan tansörü ile zayıf şok dalgası hızları, Eş. 4.180'de verilen özdeğer probleminin çözülmesi sonucunda aşağıdaki gibi elde edilir.

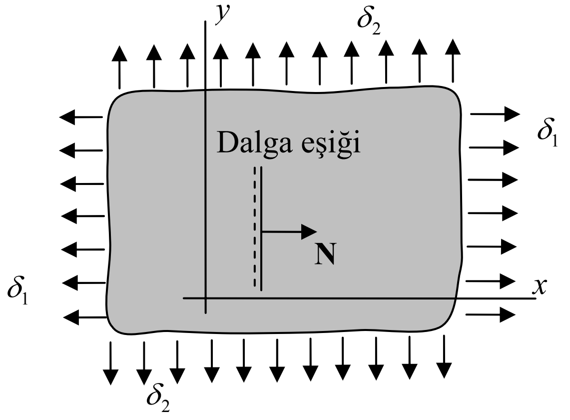
$$U_n^{(1)} = \sqrt{\left(\frac{3\lambda}{2} + 3\mu - \frac{(\kappa_T\alpha_0)^2}{\chi\rho_0}\right)\frac{\delta_1^{\,2}}{\rho_0} + \frac{\lambda}{2\rho_0}\delta_2^{\,2} - \frac{(\lambda + \mu + \kappa_T\alpha_0(\theta - \theta_0))}{\rho_0}} \tag{4.186}$$

$$U_n^{(2)} = \sqrt{\left(\mu + \frac{\lambda}{2}\right)\frac{(\delta_1^{\,2} + \delta_2^{\,2})}{\rho_0} - \frac{(\lambda + \mu + \kappa_T\alpha_0(\theta - \theta_0))}{\rho_0}} \tag{4.187}$$

Burada Eş. 4.186 boyuna zayıf şok dalgası hızı, Eş. 4.187 ise enine zayıf şok dalgası hızıdır.

Üç eksenli çekme altındaki ortam için yayılma hızları

Bu bölümde, *1*- *2*- ve *3*-eksenleri doğrultusunda farklı uzama altındaki termoelastik cisim içerisinde yayılan zayıf şok dalgası için yayılma hızları belirlenecektir. Ele alınan deformasyon durumu için deformasyon gradyan tansörü,



Şekil 4.36. İki eksenli çekme altındaki cisimde zayıf şok dalgası yayılma doğrultusu

$$[\mathbf{F}] = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \tag{4.188}$$

olarak verilmektedir. Burada α, β ve γ, sırasıyla *1- 2-* ve *3*-eksenleri doğrultusundaki asal uzamaları göstermektedir.

Eş. 4.183 ve Eş. 4.188'in, Eş. 4.181'de yerine yazılmasıyla aşağıdaki akustik tansör bileşenleri elde edilir.

$$[\mathbf{Q}] = \begin{bmatrix} Q_{11} & 0 & 0 \\ 0 & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} \end{bmatrix} \tag{4.189}$$

Burada,

$$\begin{aligned} Q_{11} = & \left(\lambda + \mu - \frac{(\kappa_T \alpha_0)^2}{\chi \rho_0} \right) \alpha^2 + \frac{\lambda}{2}\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 3\right) + \mu\left(\alpha^2 - 1\right) \\ & + \mu\alpha^2 - \kappa_T \alpha_0 \left(\theta - \theta_0\right) \end{aligned} \tag{4.190}$$

$$Q_{22} = \frac{\lambda}{2}\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 3\right) + \mu\left(\alpha^2 - 1\right) + \mu\beta^2 - \kappa_T \alpha_0 \left(\theta - \theta_0\right) \tag{4.191}$$

$$Q_{33} = \frac{\lambda}{2}\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 3\right) + \mu\left(\alpha^2 - 1\right) + \mu\gamma^2 - \kappa_T \alpha_0 \left(\theta - \theta_0\right) \tag{4.192}$$

olarak yazılabilir.

Eş. 4.180'de verilen özdeğer probleminin çözülmesiyle boyuna zayıf şok dalgası yayılma hızı,

$$U_n^{(1)} = \sqrt{\left(\frac{\lambda + 3\mu}{\rho_0} - \frac{(\kappa_T \alpha_0)^2}{\chi \rho_0^{\;2}}\right)\alpha^2 + \frac{\lambda}{2\rho_0}\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 3\right) - \frac{\left[\mu + \kappa_T \alpha_0 (\theta - \theta_0)\right]}{\rho_0}} \tag{4.193}$$

ve enine zayıf şok dalgası yayılma hızı,

$$U_n^{(2)} = U_n^{(3)} = \sqrt{\frac{\lambda}{2\rho_0}\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 3\right) + \frac{\mu}{\rho_0}\left(\alpha^2 + \beta^2\right) - \frac{\left[\mu + \kappa_T \alpha_0 (\theta - \theta_0)\right]}{\rho_0}} \tag{4.194}$$

olarak bulunur. *1*- *2*- ve *3*-eksenleri doğrultusunda eşit uzama oranları kullanarak oluşturulacak deformasyon durumu için, deformasyon gradyan tansörüne $\alpha = \beta = \gamma = \delta$ yazarak boyuna ve enine zayıf şok dalgası hızları hesaplanabilir.

$$U_n^{(1)} = \sqrt{\left(\frac{\lambda + 3\mu}{\rho_0} - \frac{(\kappa_T \alpha_0)^2}{\chi \rho_0^{\;2}}\right)\delta^2 + \frac{3\lambda}{2\rho_0}\left(\delta^2 - 1\right) - \frac{\left[\mu + \kappa_T \alpha_0 (\theta - \theta_0)\right]}{\rho_0}} \tag{4.195}$$

$$U_n^{(2)} = \sqrt{\frac{3\lambda}{2\rho_0}\left(\delta^2 - 1\right) + \frac{2\mu}{\rho_0}\delta^2 - \frac{\left[\mu + \kappa_T \alpha_0 (\theta - \theta_0)\right]}{\rho_0}} \tag{4.196}$$

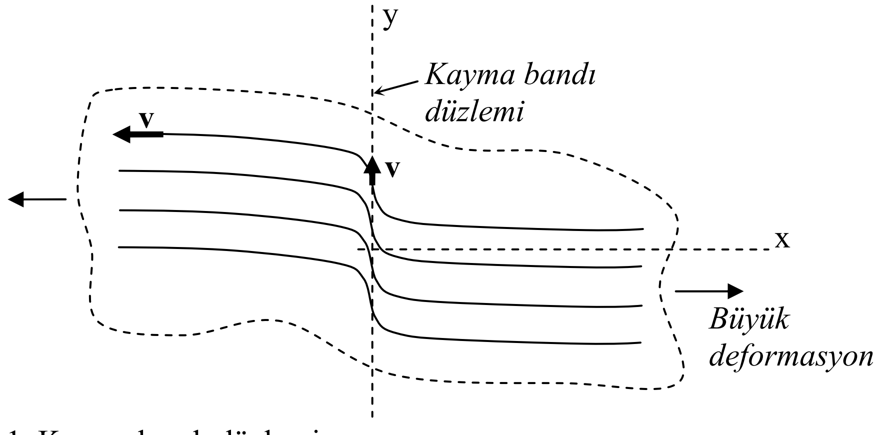
5. KAYMA BANDI OLUŞUMU

5.1. Kayma Bandları

Kayma bandları, alüminyum ve bakır gibi sünek metaller ve alaşımlarda, kum ve kaya gibi taneli ortamlarda, polimer tür malzemelerde yeterli deformasyon altında oluşabilecek ince kalınlıklı yüzeylerdir. Bu yüzey ortamı ikiye ayırır. Oluşan yüzey üzerinde ortamın deformasyonu başka noktalara göre farklılık gösterir. Deformasyon süreklidir ancak ortamı oluşturan maddesel noktalardan kayma bandı üzerinde olanların hız ve ivme gibi fiziksel büyüklüklerinde ani sıçrama gerçekleşir.

Kayma bandının oluşumu, ortam için deformasyonun üst sınırı olarak kabul edilir. Ani çarpışma ve yüklemelerde, mermi vb. cisimlerin ortama girişlerinde, metallerin şekillendirme süreçlerinde bu tür bandlar deformasyon yoğunlaşması olarak karşımıza çıkmaktadır. Kayma deformasyonunun yoğunlaşıp bir band oluşturması, dış yükler altındaki malzemenin daha fazla mukavemet göstermesinin karşısında istenmeyen bir durumdur.

Bazı yükleme şartları altında, kayma bandı yüzeyinin önünde ve arkasında kalan bölgeler kayma hareketi yaparak yer değiştirirler. Tekillik yüzeyleri ile benzerlik gösteren kayma bandı yüzeyinin incelenmesinde zayıf şok dalgası yayılma şartları kullanılarak, durağan zayıf şok dalgası ile modelleme yapılacaktır.



Şekil 5.1. Kayma bandı düzlemi

Bu aşamada zayıf şok dalgası yayılma hızı ve akustik tansör için aşağıdaki ifade geçerli olacaktır.

$$U_N = 0 \quad \text{veya} \quad \operatorname{Det} \mathbf{Q} = 0 \tag{5.1}$$

Yapılan sayısal hesaplamalarda, önceki bölümlerde kullanıldığı gibi malzeme elastisite modülü 2 MPa olarak kullanılmıştır. Malzeme sıkıştırılabilir olup Poisson oranı 0,485'dir. Hacimsel ısıl genleşme katsayısı $\beta_0 = 2{,}1 \times 10^{-3} 1/°\mathrm{K}$, özgül ısı c_v = 703 J/(kg°K) ve yoğunluk ρ_0 = 2000 kg/m^3 olarak alınmıştır.

5.2. Termomekanik Kısıtlı Cisimde Kayma Bandı Oluşumu

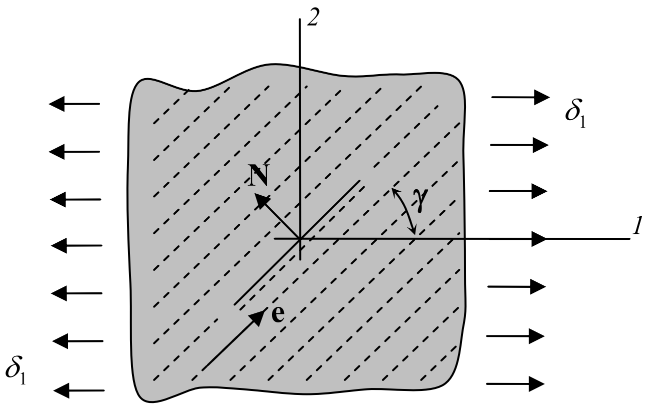
Bu bölümde yapılan kayma bandı analizinde Bölüm 4.1'de verilen sıcaklığa bağlı kısıt fonksiyonu kullanılmıştır. Buna göre,

$$\mathbf{Fe} \bullet \mathbf{Fe} = 1 - \xi(\theta - \theta_0) \tag{5.2}$$

Burada ξ=0,03 ve $\theta_0 = 273°\mathrm{K}$ olarak alınmıştır. Sıcaklığa bağlı uzayan lifler doğrultusunda birim vektör **e** ve dalga birim normal vektörü **N** Eş. 4.76'da verilmektedir.

5.2.1. Tek eksenli çekme altındaki kısıtlı cisim

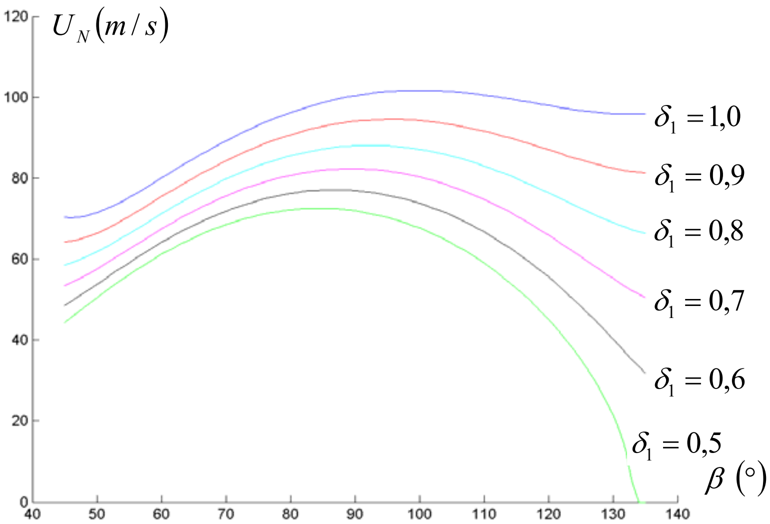
Şekil 5.2'de gösterilen tek eksenli çekme altındaki termomekanik kısıtlı cisim için kayma bandı oluşumu *1*-ekseni doğrultusunda sıkıştırma deformasyon durumunda gerçekleşmektedir. Eş. 4.77 ile verilen bu deformasyon durumu kullanılarak oluşturulacak akustik tansör ve hareket denkleminin bir özdeğer problemi olarak çözümü sonucunda dalga yayılma hızları bulunabilmektedir. Bu ortam için



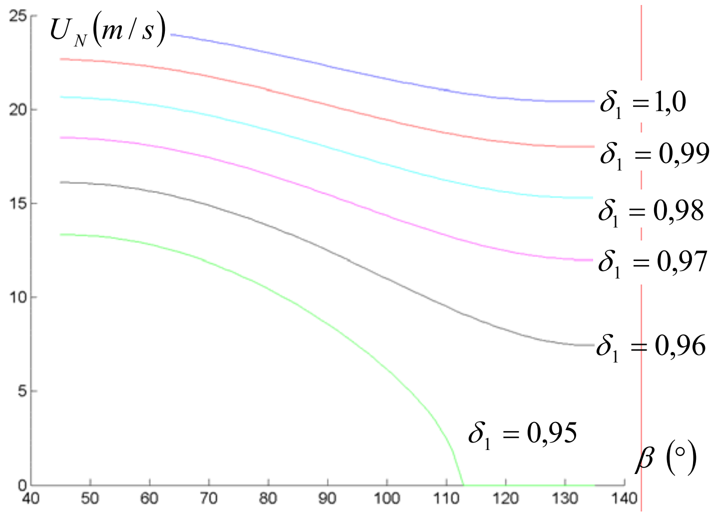
Şekil 5.2. **e** doğrultusunda kısıtlı termoelastik malzeme

hesaplanan boyuna ve enine dalga hızlarının, dalga yayılma doğrultusu açısı β ile değişimi Şekil 5.3 ve Şekil 5.4'de görülmektedir. Burada fiber doğrultu açısı $\gamma = \pi / 4$ ve sıcaklık artımı $\theta - \theta_0 = 10°\text{K}$ olarak seçilmiştir.

Kayma bandı oluşumunu ifade eden ve Eş. 5.1'de verilen dalga yayılma hızının sıfıra yaklaştığı durum, dalga yayılma doğrultusunun fiber doğrulusuna dik olduğu durumda, $\delta_1 = 0{,}9537$ ve $\delta_2 = 0{,}5209$ uzama oranı değerlerinde elde edilmektedir. Kayma bandı gerçekleştiği anda fiber doğrultu açıları $\gamma' = 53{,}74°$ ve $\gamma' = 71{,}15°$ olarak hesaplanmaktadır.



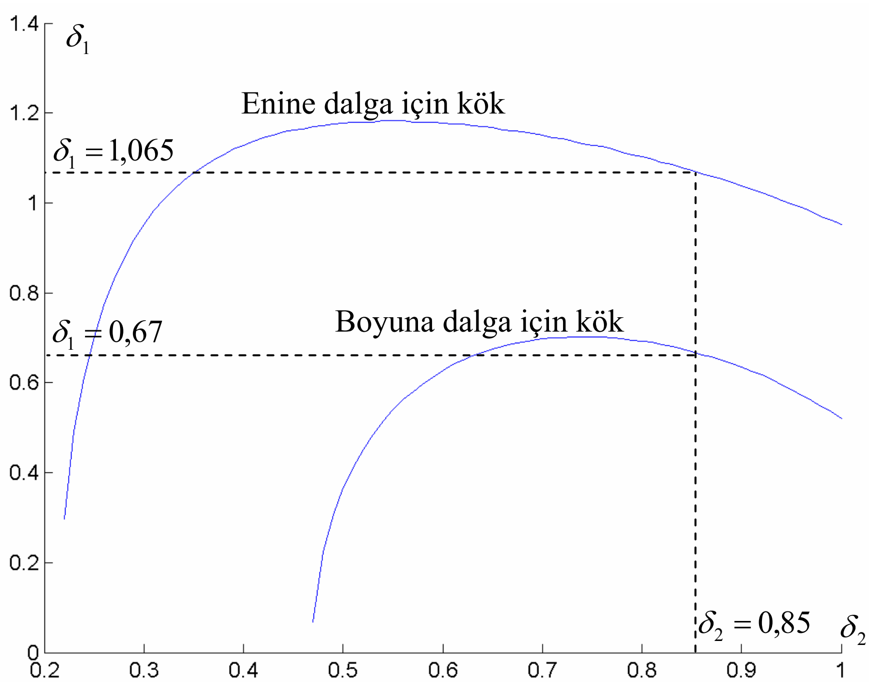
Şekil 5.3. $\gamma = \pi/4$ ve $\theta - \theta_0 = 10°\text{K}$ iken boyuna dalga hızı – dalga yayılma doğrultusu grafiği



Şekil 5.4. $\gamma = \pi/4$ ve $\theta - \theta_0$ =10°K iken enine dalga hızı – dalga yayılma doğrultusu grafiği

5.2.2. İki eksenli çekme altındaki kısıtlı cisim

Bölüm 4.1.2'de yayılma şartları incelenen iki eksenli çekme altındaki termomekanik kısıtlı cisim için deformasyon durumu Eş. 4.89 ile tanımlanmıştır. Bu deformasyon durumunda *1*-ekseni ve *2*-ekseni doğrultusundaki uzama oranları birbirinden



Şekil 5.5. İki eksenli çekme için kritik uzama oranları

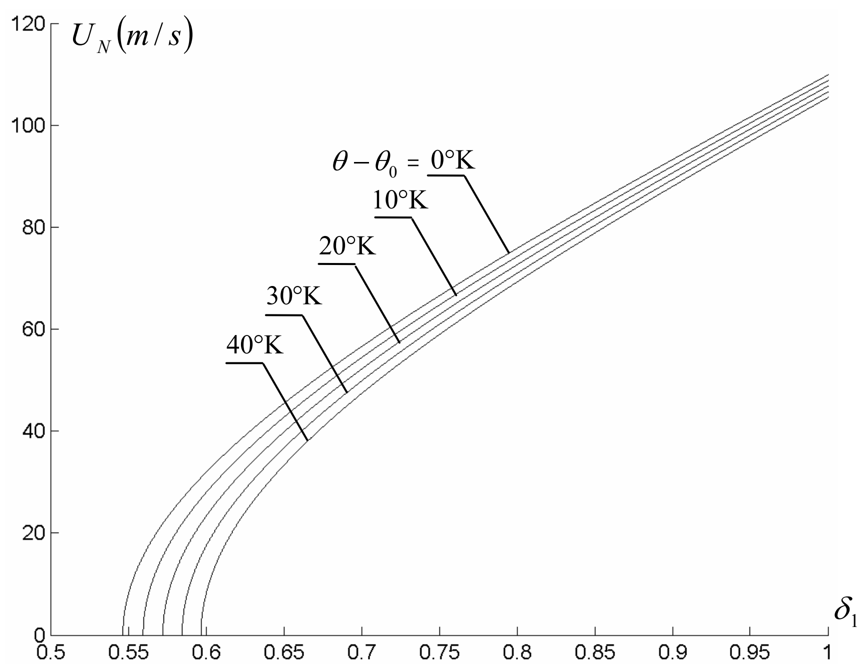
bağımsızdır. Ortamda bulunan kısıt nedeniyle çekme etkisi altındaki cisim ayrıca kayma deformasyonu yapacaktır.

Lif doğrultu açısı $\gamma = \pi / 4$ ve sıcaklık artımı $\theta - \theta_0 = 10°\text{K}$ iken hesaplanan kayma bandı oluşturacak kritik uzama değerleri Şekil 5.5'de gösterilmektedir. *2*-ekseni doğrultusundaki uzama oranı $\delta_2 = 0{,}85$ iken *1*-ekseni doğrultusundaki uzama oranları $\delta_1 = 1{,}065$ ve $\delta_1 = 0{,}67$ olarak hesaplanmıştır.

5.3. Saf Mekanik Kısıtlı Cisimde Kayma Bandı Oluşumu

5.3.1. Tek eksenli çekme altındaki kısıtlı cisim

e birim vektörü doğrultusunda uzamaz olan cisimde tek eksenli basınç etkisi altında kayma bandı oluşmaktadır. Eş. 4.138 ile verilen deformasyon durumuna göre *1*-ekseninde uzama etkisi altındaki cisim, **e** doğrultudaki uzamazlık kısıtı nedeniyle kayma deformasyonu da yapacaktır. Bu deformasyon gradyan tansörü ile **e** ve **N** birim vektörlerinin hareket denkleminde yerine yazılmasından elde edilen özdeğer



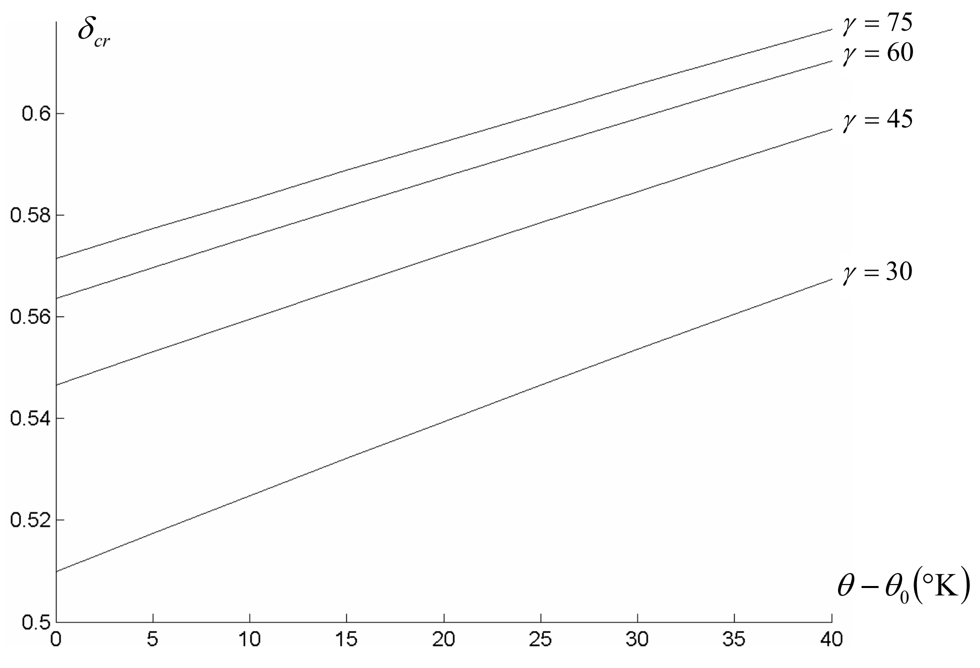
Şekil 5.6. Boyuna dalga hızı – uzama oranı değişimi

probleminin çözümü sonucunda hızlar ve durağan zayıf şok dalgası oluşturacak uzama değerleri elde edilebilir.

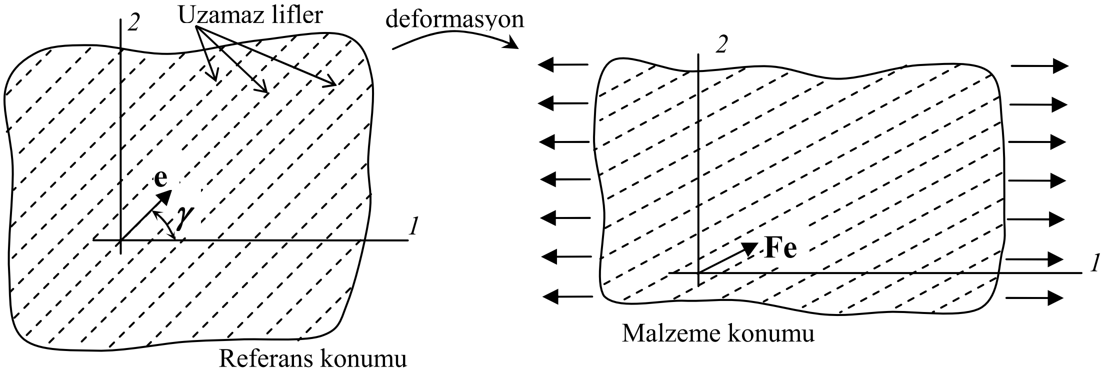
Şekil 5.6'da fiber doğrultu açısı $\gamma = \pi / 4$ iken farklı sıcaklık artımları için fiber doğrultusuna dik doğrultuda yayılan boyuna zayıf şok dalga hızının uzama oranıyla değişimi gösterilmektedir. Şekil 5.7'de ise kritik uzama oranları gösterilmektedir.

5.3.2. İki eksenli çekme altındaki kısıtlı cisim

1-ekseni ile γ açısı yapacak şekilde yerleştirilmiş uzamaz lifler ile **e** doğrultusunda uzamazlık kısıtına sahip olan termoelastik ortam Şekil 5.8'de gösterilmektedir. Bu ortam için deformasyon durumu Eş. 4.152'de, uzamazlık doğrultusu **e** ve dalga yayılma doğrultusu **N** ise Eş. 4.139'da verildiği gibidir. *1*-ekseni doğrultusunda çekmeyle δ kadar uzatılan uzamaz liflere sahip termoelastik malzeme, *2*-ekseni doğrultusunda bu uzama değerine bağlı olarak kısalacaktır.



Şekil 5.7. Kritik uzama oranı – sıcaklık değişimi

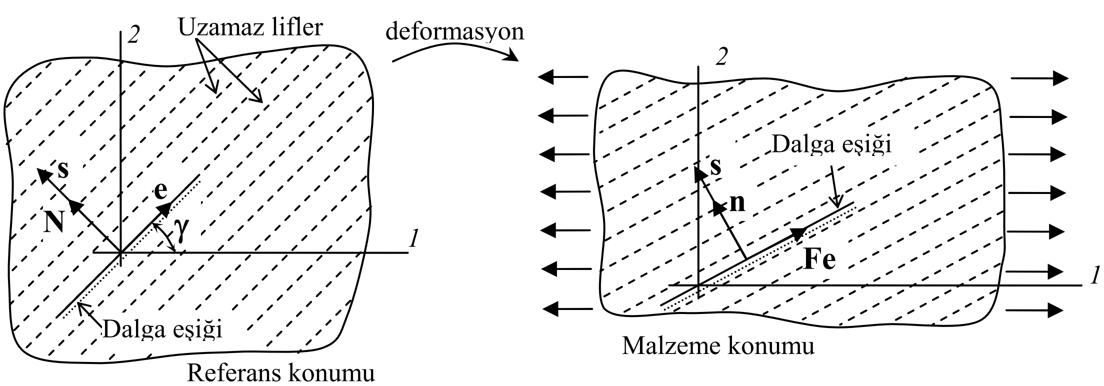


Şekil 5.8. **e** doğrultusunda uzamaz liflerle kuvvetlendirilmiş termoelastik cisim

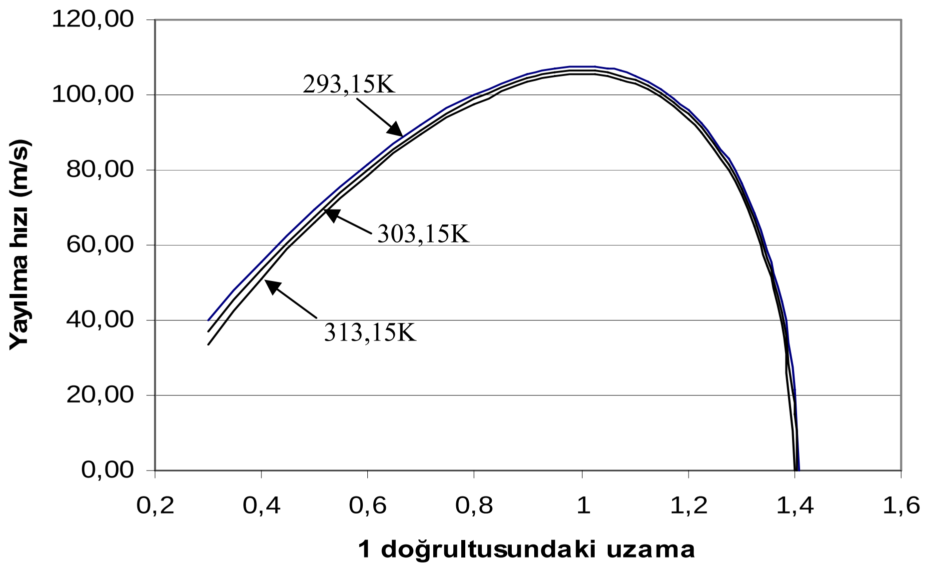
Bir doğrultuda uzamaz termoelastik malzeme için geçerli olan Eş. 4.115'de verilen kısıt fonksiyonuna göre ancak iki tip dalga yayılma durumu oluşabilir. Bunlardan birincisi,

$$\mathbf{e} \bullet \mathbf{N} = 0 \rightarrow \mathbf{e} \perp \mathbf{N} \quad \text{ve} \quad \mathbf{Fe} \bullet \mathbf{s} = 0 \rightarrow \mathbf{Fe} \perp \mathbf{s} \tag{5.3}$$

durumudur. Bu zayıf şok dalgası, uzamaz liflere dik doğrultuda ilerleyen boyuna zayıf şok dalgasıdır (Şekil 5.9). Aynı doğrultuda ilerleyen enine şok dalgası uzamaz liflerin varlığı nedeniyle oluşmayacaktır. *1*-ekseni ile $\gamma=\pi/4$ derece açı yapan lif ailesi bulunan termoelastik ortamda yayılacak boyuna zayıf şok dalgası hızlarının *1*-ekseni doğrultusundaki uzama oranıyla değişimi farklı sıcaklık değerleri için Şekil 5.10'da gösterilmektedir.

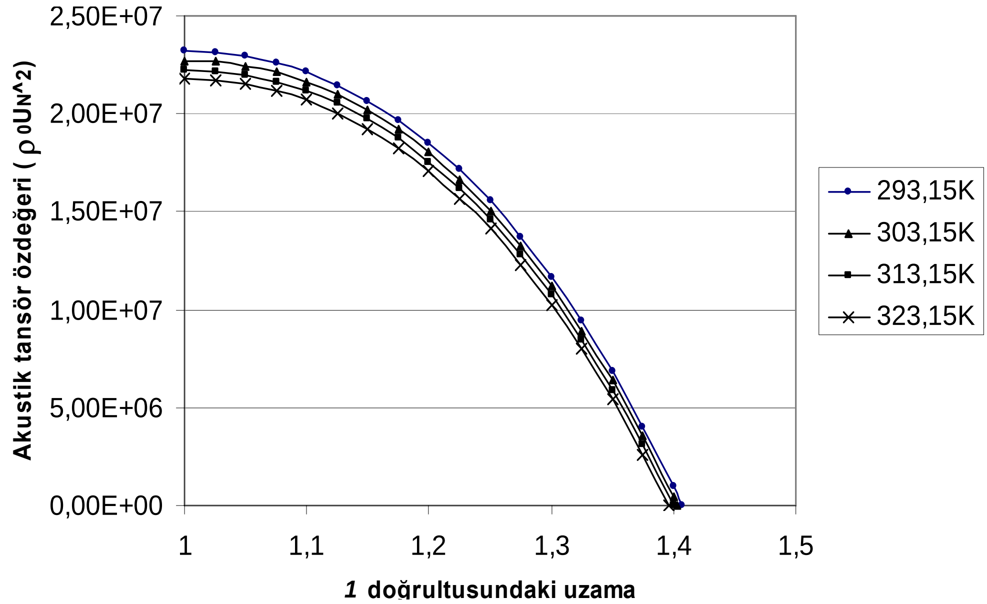


Şekil 5.9. Uzamaz liflerle kuvvetlendirilmiş olan cisimde boyuna şok dalgası yayılımı

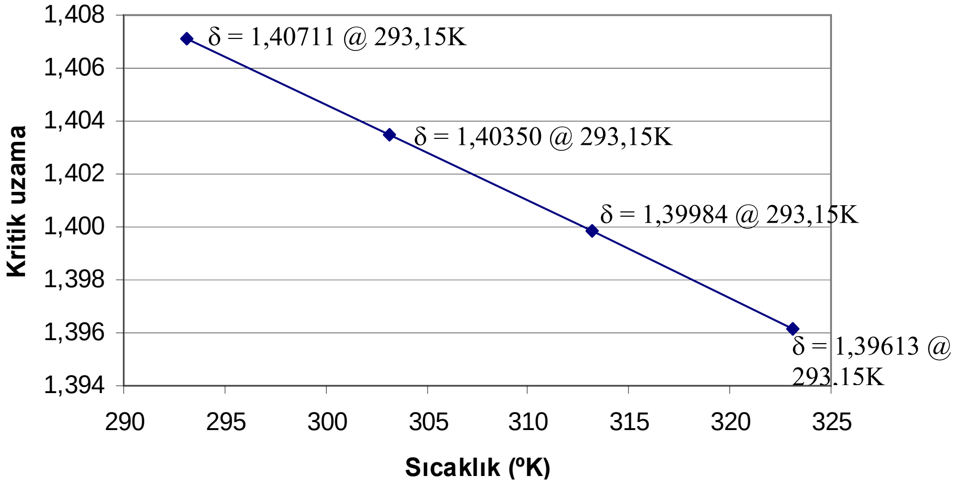


Şekil 5.10. Boyuna zayıf şok dalgası yayılma hızının uzama ile değişimi

Boyuna zayıf şok dalgası hızında, *1*-ekseni doğrultusundaki uzamanın artmasıyla bir azalma görülmektedir. Maksimum hız, deformasyonun olmadığı durum için elde edilmektedir. Şekil 5.11'da gösterilen grafikte boyuna zayıf şok dalgası için hesaplanan akustik tansörün pozitif özdeğerlerinin *1*-ekseni doğrultusundaki uzama ile değişimi farklı sıcaklıklar için görülmektedir. Kayma bandı oluşturacak kritik



Şekil 5.11. Sıfırdan büyük özdeğerlerin uzama ile değişimi

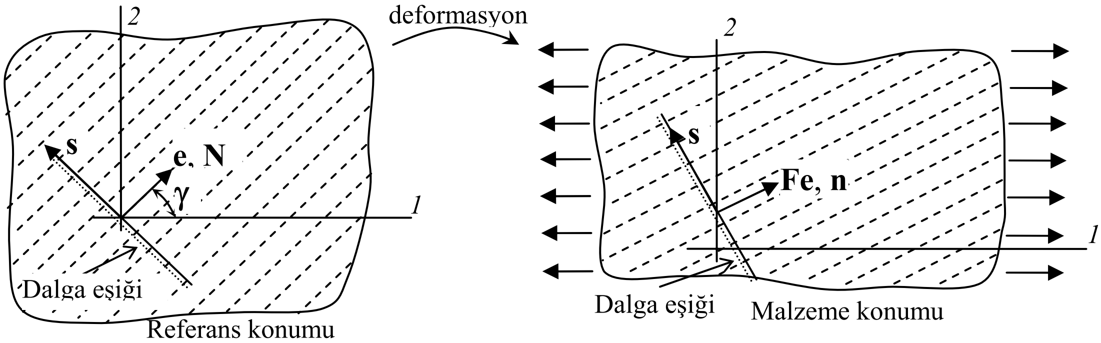


Şekil 5.12. Kayma bandı oluşturacak kritik uzama değerleri ($\gamma = \pi/4$)

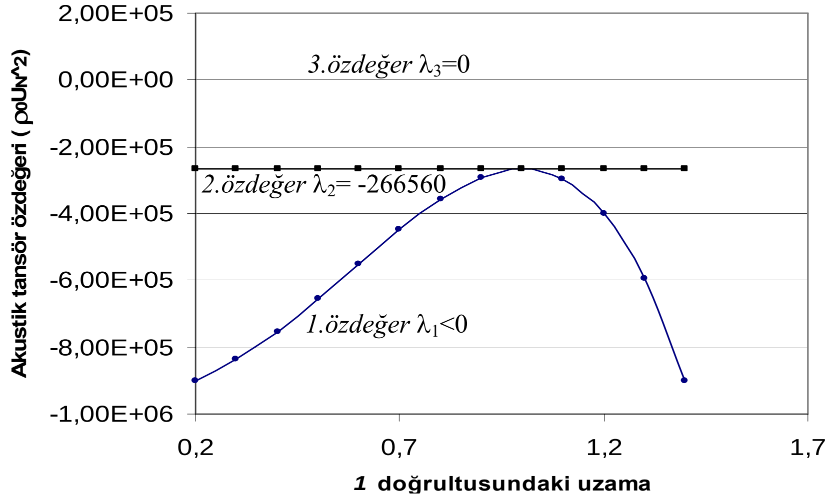
uzama değerleri ve bunların sıcaklık ile değişimi Şekil 5.12'de gösterilmektedir. Eş. 4.115'de verilen kısıt fonksiyonunu sağlayan ikinci durumda ise,

$$\mathbf{e} \bullet \mathbf{N} = 1 \rightarrow \mathbf{e} // \mathbf{N} \quad \text{ve} \quad \mathbf{Fe} \bullet \mathbf{s} = 0 \rightarrow \mathbf{Fe} \perp \mathbf{s} \tag{5.4}$$

geçerlidir. Burada oluşacak dalga türü ise, uzamaz lifler doğrultusunda yayılan enine zayıf şok dalgasıdır. Aynı doğrultuda yayılan boyuna şok dalgası uzamaz liflerin varlığından dolayı oluşamayacaktır. Enine zayıf şok dalgası tipi için $\theta - \theta_0 = 20$ iken yapılan hesaplama sonucu bulunan akustik tansörün özdeğerleri Şekil 5.14'de gösterilmiştir. Bu örnek malzemede, özdeğerlerden iki tanesi sıfırdan küçük ve bir tanesi de sıfıra eşittir.



Şekil 5.13. Uzamaz liflerle kuvvetlendirilmiş olan cisimde enine şok dalgası yayılımı



Şekil 5.14. Eş. 5.4'de verilen şartlarda yayılan enine zayıf şok dalgası için özdeğerlerin uzama ile değişimi (θ - θ_0 = 20)

5.4. Kısıtsız Termoelastik Cisimde Kayma Bandı Oluşumu

Asal eksenler doğrultusunda uzama yapan kısıtsız termoelastik cisim için Eş. 4.181 ile verilen akustik tansör, Eş. 4.189'daki gibi köşegen matris oluşturmaktadır. Bu durumda akustik tansörün determinantı,

$$\det \mathbf{Q} = \mathbf{Q}_{11}\mathbf{Q}_{22}\mathbf{Q}_{33} \tag{5.5}$$

olarak yazılabilir. Herhangi bir deformasyon durumunda kayma bandı oluşumu anında geçerli olan Eş. 5.1 yukarıdaki ifade yardımıyla hesaplanacaktır.

5.4.1. Tek eksenli çekme altındaki kısıtlı cisim

Eş. 4.182 ile verilen deformasyon durumu için hesaplanan kritik uzama oranları,

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}\frac{\lambda}{\mu} + \frac{c_2}{\mu} + 1}{\frac{1}{2}\frac{\lambda}{\mu} + \frac{c_1}{\mu} + 2}} \tag{5.6}$$

$$\delta_{2,3} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}\frac{\lambda}{\mu} + \frac{c_2}{\mu}}{\frac{1}{2}\frac{\lambda}{\mu} + 1}} \tag{5.7}$$

olarak yazılabilir. Burada $\frac{c_1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu} - \frac{(\kappa_T \alpha_0)^2}{\chi \mu \rho_0} + 1$ ve $\frac{c_2}{\mu} = \frac{\kappa_T \alpha_0 (\theta - \theta_0)}{\mu}$ dir.

5.4.2. İki eksenli çekme altındaki kısıtlı cisim

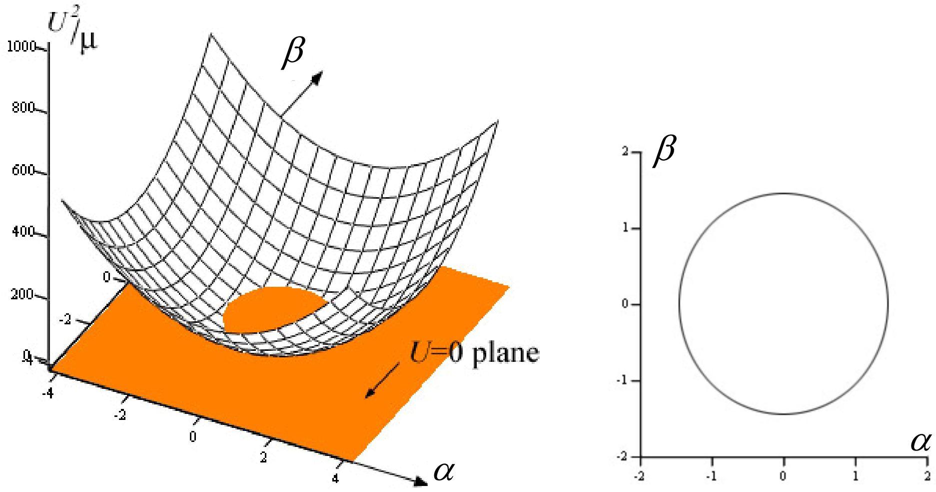
1- ve *2*-eksenlerindeki çekme oranlarının α ve β ile gösterildiği, *3*-eksenindeki uzamanın 1'e eşit olduğu deformasyon durumu için Eş. 5.1'in çözümü sonucunda aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\left(\frac{\lambda}{2\mu} + 1\right)\left(\alpha^2 + \beta^2\right) = \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\kappa_T \alpha_0}{\mu}\left(\theta - \theta_0\right) + 1 \tag{5.8}$$

Bu eşitlik kritik uzamaların üzerinde bulunduğu bir çemberin eşitliğidir. α ve β uzama oranlarının birbirlerine eşit olduğu durum için kayma bandı oluşturacak kritik uzama oranları aşağıdaki gibi bulunur.

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{\frac{\lambda}{\mu} + \frac{c_2}{\mu} + 1}{\frac{\lambda}{\mu} + \frac{c_1}{\mu} + 2}} \tag{5.9}$$

$$\delta_2 = \sqrt{\frac{\frac{\lambda}{\mu} + \frac{c_2}{\mu} + 1}{\frac{\lambda}{\mu} + 2}} \tag{5.10}$$



(a) (b)

Şekil 5.15. İki eksenli çekme altındaki cisim için a) boyuna dalga hızı grafiği, b) kritik uzama oranı çemberi

$$\delta_3 = \sqrt{\frac{\frac{\lambda}{\mu} + \frac{c_2}{\mu}}{\frac{\lambda}{\mu} + 1}} \tag{5.11}$$

5.4.3. Üç eksenli çekme altındaki kısıtlı cisim

Eş. 4.188'de verilen deformasyon gradyan tansörü ve Eş. 4.183'de verilen dalga yayılma doğrultusu ile oluşturulacak akustik tansörün Eş. 5.5'de yerine yazılmasıyla hesaplanacak determinantın sıfıra eşit olduğu durumda uzama oranları için üç adet eşitlik elde edilir. Bunlar,

$$\frac{\alpha^2}{a_i^{\,2}} + \frac{\beta^2}{b_i^{\,2}} + \frac{\gamma^2}{c_i^{\,2}} = 1 \qquad i = 1,2,3 \tag{5.12}$$

ile gösterilebilir. Burada yer alan sabitler,

$$a_1 = \sqrt{\frac{\frac{3}{2}\lambda + \mu + \kappa_T \alpha_0 (\theta - \theta_0)}{\frac{3}{2}\lambda + 3\mu - \frac{(\kappa_T \alpha_0)^2}{\chi \rho_0}}} \tag{5.13}$$

$$b_1 = c_1 = \sqrt{\frac{\frac{3}{2}\lambda + \mu + \kappa_T \alpha_0 (\theta - \theta_0)}{\frac{1}{2}\lambda}} \tag{5.14}$$

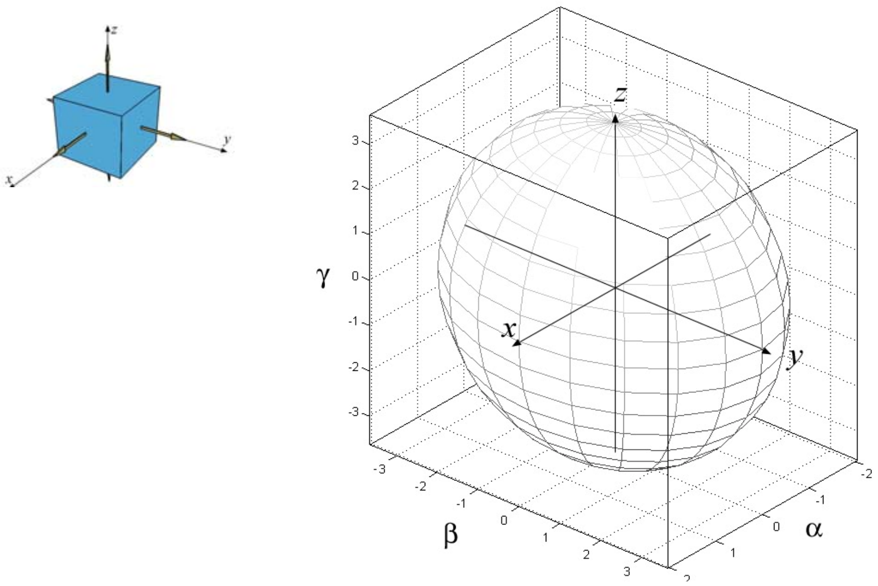
$$a_2 = b_2 = \sqrt{\frac{\frac{3}{2}\lambda + \mu + \kappa_T \alpha_0 (\theta - \theta_0)}{\frac{1}{2}\lambda + \mu}} \tag{5.15}$$

$$c_2 = \sqrt{\frac{\frac{3}{2}\lambda + \mu + \kappa_T \alpha_0 (\theta - \theta_0)}{\frac{1}{2}\lambda}} \tag{5.16}$$

olarak yazılabilir. Eş. 5.12 uzama oranı uzayında bir elipsoid tanımlar ve bu elipsoid üzerindeki sıfırdan büyük değerler kritik uzama oranlarına karşılık gelmektedir.

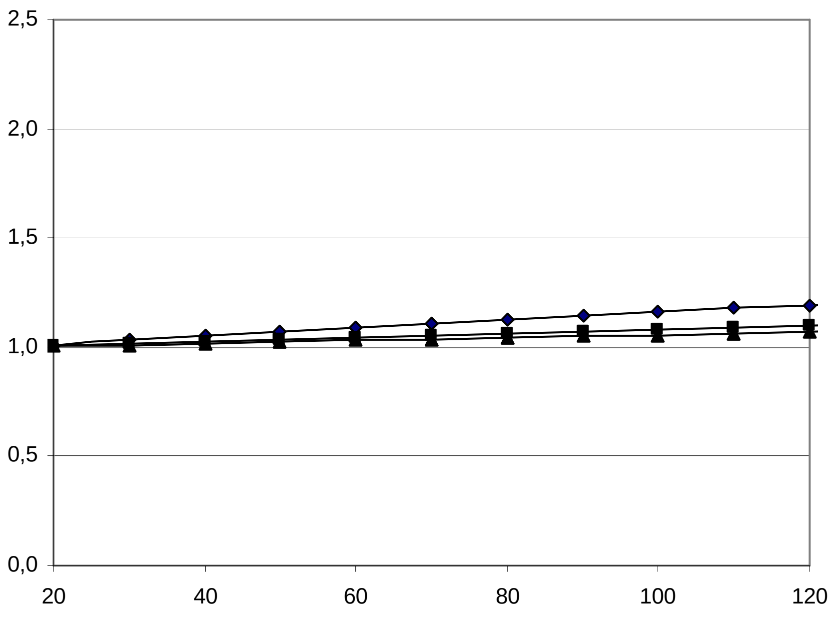
Üç asal eksende de eşit uzama yapan bir cisim için hesaplanacak kritik uzama oranları ise Eş. 5.17 ve Eş. 5.18'deki gibidir.

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{\frac{3}{2}\frac{\lambda}{\mu} + \frac{c_2}{\mu} + 1}{\frac{3}{2}\frac{\lambda}{\mu} + \frac{c_1}{\mu} + 2}} \tag{5.17}$$



Şekil 5.16. Üç eksenli çekme için kritik uzama oranı elipsoidi

$$\delta_{2,3} = \sqrt{\frac{\frac{3}{2}\frac{\lambda}{\mu} + \frac{c_2}{\mu} + 1}{\frac{3}{2}\frac{\lambda}{\mu} + 2}} \tag{5.18}$$



Şekil 5.17. Kritik uzama oranının sıcaklık artımı ile değişimi
tek eksenli çekme, iki eksenli eşit çekme üç eksenli eşit çekme

6. SONUÇ

Bünyesinde deformasyon kısıtının bulunduğu malzemeler havacılıktan inşaat sektörüne (*temel izolasyonu, dış güçlendirme levhaları*) kadar pek çok alanda yaygın olarak kullanılmaya başlanmıştır. Bu malzeme türlerinin farklı yönleriyle ele alınarak incelenmesi tasarım aşaması öncesi önem arz etmektedir. Burada ele alınan dalga yayılması ve kayma bandı oluşumu konuları da mekanik malzeme karakteristiklerini ve deformasyon limitlerini tespit aşamasında kullanılabilecek verileri ortaya çıkarmaya yardımcı olacaktır. Bu çalışma, kısıtlı termoelastik St. Venant – Kirchhoff malzemelerinde yayılacak dalgalarının sönümlenme şartlarının araştırılmasıyla geliştirilebilir.

Özet olarak, zayıf şok dalgası yayılma problemi tekillik yüzeyleri teorisi kullanılarak ele alınmıştır. Burada şok dalgası hareket denklemini oluşturmak için tekillik yüzeyi üzerindeki sıçramalar Taylor serisi açılımı yapılarak yazılmıştır. Öncelikle sürekli ortamlar mekaniğinin temel korunum yasaları, bünyesinde süreksizlik yüzeyi bulunduran ve bulundurmayan ortamlar için tekrar yazılmıştır. Termodinamiğin temel ilkeleri gözden geçirilmiş, doğrusal olmayan kısıtlı termoelastik ortam için bünye denklemleri oluşturulmuştur. Şok dalgası hareket denklemi, özdeğerlerin yayılma hızı, özvektörlerin de şok tekillik vektörü doğrultusunda vektörlerin olduğu bir özdeğer problemi haline gelmektedir.

Burada sunulan çalışmadan elde edilen sonuçlar ve üzerinde durulması gerekli noktalar sırasıyla belirtilmektedir.

1. Dalga yayılması problemi ve kayma bandı oluşumunun incelendiği malzeme tipi termomekanik kısıtlamalara sahip termoelastik malzemedir. Sadece sıcaklık değişiminden etkilenen bir yönün bulunması nedeniyle cisim anizotrop özelliğe sahiptir. Bu anizotropi özelliğin dalga yayılma hızlarına etkisi ve kayma bandı oluşumunda ne tür etkiler yarattığı görülmüştür.
2. Zayıf şok dalgası üzerinde,

Gerilmedeki sıçrama: Deformasyon gradyanındaki sıçrama, sıcaklıktaki ve Lagrange çarpanındaki sıçramaların birleşiminden oluşur.

Deformasyon gradyan tansöründeki sıçrama: Zayıf şok dalgaları için şok tekillik vektörü ve şok yüzeyi birim normal vektörünün diyadik çarpımı olarak ifade edilir.

Sıcaklıktaki sıçrama: Şok tekillik vektörü ve kısıt fonksiyonu ile yazılır.

Entropideki sıçrama: Zayıf şok dalgası için sıfıra eşittir.

3. Öncelikle ele alınan termomekanik kısıtlı termoelastik ortam için yapılan kabule göre, **e** doğrultusunda yerleştirilmiş lifler nedeniyle çekme deformasyonuna ek olarak kayma deformasyonu da yapmaktadır.

4. Özdeğer probleminin çözümü sonucunda;

   Termomekanik kısıtlı ortamda yayılan boyuna ve enine zayıf şok dalga hızları, malzeme parametrelerine ve fiber doğrultusu ile dalga yayılma doğrultusuna bağlı olarak bulunmuştur. Kısıtlı doğrultuda yayılan boyuna dalga hızı, kısıtlı doğrultuya dik olarak yayılan dalga hızından daha küçüktür. Dalga hızları, sıcaklığa bağlı uzama doğrultusunda yayılan ve bu doğrultuya dik doğrultuda yayılan enine zayıf şok dalgası için aynıdır. Çekme eksenleri boyunca uzama oranı ve ortam sıcaklığı ile birlikte dalga yayılma hızları da artmaktadır.

5. Kayma bandı durağan zayıf şok dalgası olarak modellenmiştir. Bazı uzama oranları için bu dalgaların hızı sıfıra yaklaşmaktadır. Sıfır dalga hızının bulunduğu durumda zayıf şok dalgası eşiği kayma bandı yüzeyini temsil eder. Tek eksenli çekme deformasyonu altındaki termomekanik kısıtlı ortamda, basınç durumunda kayma bandı oluşmaktadır. Fiber doğrultusuna dik doğrultuda yayılan zayıf şok dalgası eşiği kayma bandına karşılık gelmektedir.

   Termomekanik kısıtlı cisimde iki eksenli çekme durumunda ise hem kısalma hem de uzama durumunda kayma bandı oluşabilmektedir. Seçilen örnek malzeme sabitleri kullanıldığında, *2*-ekseni doğrulusunda uzama oranı 0,94’den az olduğu durumda gerçekleşen bu duruma karşılık, *2*-eksenindeki 1,0 ile 0,94 arasındaki uzama oranı değerleri için *1*-ekseninde sadece basınç halinde kayma bandı oluşur.

6. Saf mekanik kısıtlı ortamlar için bulunan $\mathbf{c} \bullet \mathbf{s} = 0$ koşulu, ortamda uzamaz liflere dik doğrultuda ve uzamaz lifler doğrultusunda yayılabilecek iki tip zayıf şok dalgası olduğunu göstermektedir. İlk tip zayıf şok dalgası uzamaz doğrultuya dik doğrultuda yayılan boyuna şok dalgasıdır. İkinci tip dalga ise, uzamaz doğrultuya paralel yayılan enine zayıf şok dalgasıdır. Bu iki tip dalga için deformasyonsuz ortamda yayılma hızlarının eşitlikleri elde edilmiştir.
7. Tek eksenli çekme altındaki, *1*-ekseni doğrultusunda uzamayla birlikte kayma deformasyonu yapan ve **e** doğrultusunda uzamaz olan ortamda büyük sıkıştırma deformasyonu altında sıcaklığın artmasıyla birlikte dalga yayılma hızı azalmaktadır. *2*-ekseninin, *1*-eksenindeki uzamaya bağlı olarak kısaldığı ve kaymanın olmadığı durumda, uzamanın artmasıyla birlikte hız sıfıra yaklaşmaktadır. Bu tip dalga için yayılma hızının sıfır olduğu duruma karşılık gelen kritik uzama değerleri ve bunların sıcaklık ile değişimi elde edilmiştir. Yayılabilecek ikinci tip zayıf şok dalgası, uzamaz lifler doğrultusunda yayılan enine zayıf şok dalgasıdır. Kullanılan malzeme sabitleri ve sıcaklık artımı değeriyle elde edilen akustik tansörün özdeğerlerinden iki tanesi sıfırdan küçük ve diğer özdeğer sıfıra eşit olarak elde edilmektedir. Bu nedenle ikinci tip dalga, kayma bandı araştırmasında kullanılamamaktadır. Kayma bandı, boyuna şok dalgası hızının sıfıra eşit olduğu uzama değeri için elde edilmiştir. Bu tip dalganın oluşması için diğer bir şart da, ortamın sıkıştırılabilir olması gerektiğidir.
8. Son olarak ele alınan kısıtsız termoelastik ortam için hareket denkleminin ve akustik tansörün oluşturulmasının ardından çekme deformasyonu altındaki cisim içerisinde yayılacak zayıf şok dalgasının hızları belirlenmiştir. Bu deformasyon durumlarından tek eksenli çekme halinde, uzama oranıyla yayılma hızının arttığı ancak sıcak artışı ile azaldığı görülmektedir. Kayma bandı analizi sonucunda, farklı çekme durumları altında ortamda kayma bandı oluşturacak kritik uzama oranları eşitlikleri malzeme sabitlerine ve sıcaklığa bağlı olarak elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

1. Billingham, J., King, A.C., “Wave motion”, ***Cambridge University Pres*** , Cambridge, 1-4 (2000).

2. Achenbach, J.D., “Wave propagation in elastic solids”, ***North-Holland***, 7-8 (1973).

3. Hadamard, J., “Leçons sur la Propagation des Ondes et les Equations de L’Hydrodynamique”, ***Librairie Scientifique***, Paris, 1-10 (1903).

4. Hill, R., “Acceleration waves in solids”, ***J. Mech. Phys. Solids***, 10: 1-16 (1962).

5. Chadwick, P., Powdrill, B., “Singular surfaces in linear thermoelasticity”, ***Int. J. Eng. Sci.,*** 3: 561–595 (1965).

6. Mandel, J., “Ondes plastiques dans un milieu indefini a trois dimensions”, ***Journal de Mechanique***, 1: 3-30 (1962).

7. Mandel, J., “Thermodynamics et ondes dans les milieux viscoplastiques”, ***J. Mech. Phys. Solids***, 17: 125-140 (1969).

8. Balaban, M., Green, A., E., Naghdi, P. M., “Acceleration waves in elastic-plastic materials”, ***Int. J. Engng. Sci.***, 8: 315-335 (1970).

9. Ogden, R.W., “Growth and decay of acceleration waves in incompressible elastic solids”, ***Q. J. Mech. App.l Math.***, 27(4): 451-464 (1974).

10. Reddy, D.B., Gültop, T., “Acceleration waves in finitely deformed elastic-plastic solids”, ***Eur. J. Mech. A/Solids***, 14(4): 529-551 (1995).

11. Jordan, P.M., “On the growth and decay of transverse acceleration waves on a nonlinear, externally damped string”, ***J. Sound Vib.***, 311: 597–607(2008).

12. Ukeje, E., “Weak shock waves in non-heat conduction Thermoelastic materials – variation of amplitude of the weak shocks”, ***Int. J. Engng. Sci.***, 19: 1187-1201 (1981).

13. Ukeje, E., “Weak shock waves in heat conduction Thermoelastic materials”, ***Int. J. Engng. Sci.***, 20: 1275-1290 (1982).

14. Currò, C. Sugiyama, M., Suzumura, H., Valenti, G., “Weak shock waves in isotropic solids at finite temperaturesup to the melting point”, ***Continuum Mech. Therm.***, 18: 395–409 (2007).

15. Scott, N., “Acceleration waves in constrained elastic materials”, ***Arch. Ration. Mech. Analysis***, 58: 57-75 (1975).

16. Reddy, D.B., “The propagation and growth of acceleration waves in constrained Thermoelastic materials”, ***J. Elast.***, 14: 387-402 (1984).

17. Bleach, G. P., Reddy, D. B., “The influence of constraints on the properties of acceleration waves in isotropic thermoelastic media“, ***Arch. Rat. Mech. Anal.***, 98(1): 31-64 (1987).

18. Scott, N.H., “Thermoelasticity with thermomechanical constraints”, ***Int. J. Non-Linear Mech.***, 36: 549-564 (2001).

19. Tonon, M.L., “Waves in constrained linear elastic materials”, ***J. Elast.***, 69: 15-39 (2002).

20. Gültop, T., “On the propagation of acceleration waves in incompressible hyperelastic solids”, ***J. Sound Vib.,*** 264: 377-389 (2003).

21. Gültop, T., “Weak shock waves in constrained thermoelastic solids”, ***Arch. App. Mech.,*** 72: 511-521 (2002).

22. Rooney, F.J., Bechtel, S.E., “Constraints, constitutive limits, and instability in finite thermoelasticity”, ***J. Elast.***, 74: 109-133 (2004).

23. Needleman, A., “Dynamic shear band development in plane strain”, ***J. App. Mech.***, 56: 1-9 (1989).

24. Batra, R.C.,” Effect of material parameters on the initiation and growth of adiabatic shear bands”, ***Int. J. Solids Struct.***, 23 (10): 1435-1446 (1987).

25. Gültop, T., “Existence of shear bands in hyperelastic solids”, ***Mech. Res. Commun.***, 29: 431-436 (2002).

26. Gültop, T, Alyavuz, B., "Existence of shear bands in thermoelastic solids", ***Proceedings of the 6th European Solid Mechanics Conference ESMC 2006***, Budapest, Hungary, 22 (2006).

27. Gültop, T, Alyavuz, B., "Termoelastik Kısıtlı Cisimlerde Zayıf Şok Dalgası Yayılması ve Kayma Bandı Oluşumu", ***15. Ulusal Mekanik Kongresi***, Isparta, 465 - 475 (2007).

28. Osinov, V.A., Wu, W., “Wave speeds, shear bands and the second-order work for incrementally nonlinear constitutive models”, ***Acta Mech.***, DOI 10.1007/s00707-008-0008-8.

29. Alyavuz, B., Gültop, T., “Weak shock waves and shear bands in thermoelastic solids”, ***Acta Mech.***, 10.1007/s00707-008-0117-4.

30. Humphrey, J. D., Rajagopal, K. R., "Finite thermoelasticity of constrained elastomers subjected to biaxial loading", ***J. Elast.***, 49: 189-200 (1998).

31. Bechtel, S. E., Rooney, F. J., Forest, M. G., "Internal constraint theories for the thermal expansion of viscous fluids", ***Int. J. Engng. Sci.***, 42: 43-64 (2004).

32. Green, A.E., Naghdi, P.M., Trapp, J.A., "Thermodynamics of a continuum with internal constraints", ***Int. J. Engng. Sci.***, 8: 891-908 (1970).

33. Gurtin, M.E., Podio, Guidugli, P., "The thermodynamics of constrained materials", ***Arch. Ration. Mech. Anal***, 51: 192-208 (1973).

34. Reddy, D. B., "The propagation and growth of acceleration waves in constrained thermoelastic materials", ***J. Elast.***, 14: 387-402 (1984).

35. Erbe, H. H., "Thermoelastic effects in incompressible isotropic solids", ***Mech. Res. Commun***., 1: 137-142 (1974).

36. Holzapfel, G. A., "Nonlinear Solid Mechanics", ***John Wiley & Sons***, Chichester, 346 (2000).

37. Ogden, R. W., "On the thermoelastic modeling of rubberlike solids", ***J. Therm. Stresses***, 15: 533-557 (1992).

38. Truesdell, C., Toupin, R.A, "The classical field theories of mechanics", In: Flügge, S. (ed.) Handbuch der Physik III/1, ***Springer***, Berlin, 492-529 (1960).

39. Eringen, A.C., Şuhubi, E., "Elastodynamics, vol I", ***Academic Press***, Londra, 77-145 (1974).

40. Achenbach, J.D., "The propagation of stress discontinuities according to the coupled equations of thermoelasticity", ***Acta Mech.***, 3: 342-351 (1967).

41. Eringen, A.C., "Mechanics of continua", ***Krieger Publishing Co.***, New York, 81-82 (1980).

42. Lubarda, V. A., "On thermodynamic potentials in linear thermoelasticity", ***Int. J. Solids Struct.***, 41: 7377-7398 (2004).

EKLER

EK-1 Bazı matematik eşitliklerin çıkarılışları

Deformasyon gradyan tansörünün malzeme zaman türevi

Deformasyon gradyanının tanımından yola çıkarak Eş. 2.4'ün her iki tarafının malzeme zaman türevini alalım.

$$\frac{D}{Dt}\left(\mathrm{d}x_k\right)=\frac{D}{Dt}\left(F_{kL}\,\mathrm{d}X_L\right)$$

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial x_k}{\partial X_K}\mathrm{d}X_K\right)=\frac{D}{Dt}\left(F_{kL}\,\mathrm{d}X_L\right) \qquad \text{(A.1)}$$

Malzeme zaman türevini alırken X_K zamana göre sabit tutulduğu için,

$$\frac{\partial}{\partial X_\mathrm{K}}\left(\frac{Dx_k}{Dt}\right)\mathrm{d}X_K=\frac{D}{Dt}\left(F_{kL}\right)\mathrm{d}X_L \qquad \text{(A.2)}$$

olarak yazılabilir. Uzaysal konum vektörünün malzeme zaman türevi hızı verecektir. Bu durumda zaman türevi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\frac{\partial v_k}{\partial X_\mathrm{K}}\mathrm{d}X_K=\dot{F}_{kL}\,\mathrm{d}X_L$$

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_l}\frac{\partial x_l}{\partial X_K}\mathrm{d}X_K=\dot{F}_{kL}\,\mathrm{d}X_L$$

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_l}\mathrm{d}x_l=\dot{F}_{kL}\,\mathrm{d}X_L$$

EK-1 (Devam) Bazı matematik eşitliklerin çıkarılışları

$$\dot{F}_{kL} = \frac{\partial v_k}{\partial x_l} F_{lL} \quad \text{veya} \quad \dot{\mathbf{F}} = \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{F} \tag{A.3}$$

<u>Birinci Piola – Kirchhoff gerilme tansörü cinsinden yerel formda enerjinin korunumu</u>

Yerel formda enerjinin korunumu aşağıdaki adımlar izlenerek birinci Piola – Kirchhoff gerilme tansörü cinsinden yazılabilir.

$$\rho \dot{e} = \sigma_{kl} v_{l,k} + q_{k,k} + \rho h \quad \text{veya} \quad \rho \dot{e} - \sigma_{kl} v_{l,k} - q_{k,k} - \rho h = 0 \tag{A.4}$$

Deformasyon gradyan tansörünün zaman türevi (Eş. A.3) ve Cauchy gerilme tansörü (Eş. 2.25’den) sırasıyla,

$$\dot{F}_{kL} = v_{k,l} F_{lL} \quad \text{ve} \quad \sigma_{kl} = J^{-1} F_{kK} T_{Kl} \tag{A.5}$$

yazılabilir. Cauchy gerilme tansörü ve sonrasında deformasyon gradyanının zaman türevi enerji denkliğinde yerine yazılırsa,

$$\rho \dot{e} - J^{-1} T_{Kl} v_{l,k} F_{kK} - q_{k,k} - \rho h = 0$$

$$\rho \dot{e} - J^{-1} T_{Kl} \dot{F}_{lK} - q_{k,k} - \rho h = 0 \tag{A.6}$$

Jacobian, yoğunluk cinsinden,

$$J = \frac{\rho_0}{\rho} \Rightarrow J^{-1} = \frac{\rho}{\rho_0} \tag{A.7}$$

Enerji denkliğinin iki tarafını da j ile çarparak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

EK-1 (Devam) Bazı matematik eşitliklerin çıkarılışları

$$\rho_0\,\dot{e} - T_{Kl}\dot{F}_{lK} - \frac{\rho_0}{\rho} q_{k,k} - \rho_0\,h = 0 \quad \text{veya} \quad \rho_0\,\dot{e} - \mathbf{T} \bullet \dot{\mathbf{F}} - J\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{x}} - \rho_0\,h = 0 \qquad \text{(A.8)}$$

<u>Sonsuz küçük alan elemanındaki değişim</u>

Referans konumundaki ve uzaysal konumdaki sonsuz küçük hacim elemanları sırasıyla,

$$\mathrm{d}\mathbf{A} = \mathrm{d}\mathbf{X}^{(1)} \times \mathrm{d}\mathbf{X}^{(2)} \qquad \text{(A.9)}$$

$$\mathrm{d}\mathbf{a} = \mathrm{d}\mathbf{x}^{(1)} \times \mathrm{d}\mathbf{x}^{(2)} \qquad \text{(A.10)}$$

olarak yazılabilir. Eş. 2.4'de verilen sonsuz küçük d**x** vektörü Eş. A.10'da yerine yazılırsa,

$$\mathrm{d}\mathbf{a} = \mathbf{F}\mathrm{d}\mathbf{X}^{(1)} \times \mathbf{F}\mathrm{d}\mathbf{X}^{(2)}$$

$$\mathrm{d}\mathbf{a} = \mathbf{e}_k \varepsilon_{klm} \left(\mathbf{F}\mathrm{d}\mathbf{X}^{(1)}\right)_l \left(\mathbf{F}\mathrm{d}\mathbf{X}^{(2)}\right)_m$$

$$\mathrm{d}\mathbf{a} = \mathbf{e}_k \varepsilon_{klm} F_{lK} F_{mL} dX^{(1)}{}_K dX^{(2)}{}_L \qquad \text{(A.11)}$$

Eş. A.11'in sağ tarafında **e** birim vektörün indisini değiştirerek,

$$\mathrm{d}\mathbf{a} = \delta_{ki} \mathbf{e}_i \varepsilon_{klm} F_{lK} F_{mL} dX^{(1)}{}_K dX^{(2)}{}_L \qquad \text{(A.12)}$$

yazılabilir.

EK-1 (Devam) Bazı matematik eşitliklerin çıkarılışları

$\delta_{ki} = F_{kR} F_{Ri}$ eşitliğini Eş. A.12'de yerine yazarak ve $\varepsilon_{KLM} \det \mathbf{F} = \varepsilon_{klm} F_{lK} F_{mL} F_{kR}$ eşitliğini kullanarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$\mathrm{d}\mathbf{a} = \mathbf{e}_i \det \mathbf{F}\, F_{Ri} \varepsilon_{MKL}\, dX^{(1)}{}_K\, dX^{(2)}{}_L$$

$$\mathrm{d}\mathbf{a} = \mathbf{e}_i \det \mathbf{F}\, F_{Ri} dA_M$$

$$\mathrm{d}\mathbf{a} = \det \mathbf{F}\, \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{A} \tag{A.13}$$

<u>Sonsuz küçük hacim elemanındaki değişim</u>

Referans konumunda bulunan malzemedeki hacim elemanı,

$$dV = \left(\mathbf{dX}^{(1)} \times \mathbf{dX}^{(2)}\right) \bullet \mathbf{dX}^{(3)} \quad \text{veya} \quad \mathrm{dV} = \varepsilon_{KLM} dX_K dX_L dX_M \tag{A.14}$$

ve uzaysal konumda şekil değiştirmiş hacim elemanı

$$\mathrm{dv} = \left(\mathbf{dx}_1 \times \mathbf{dx}_2\right) \bullet \mathbf{dx}_3 \quad \text{veya} \quad \mathrm{dv} = \varepsilon_{ijk} dx_i dx_j dx_k \tag{A.15}$$

Eş. 2.4, Eş. A.15'de yerlerine yazılarak uzaysal konumdaki hacim referans konumundaki hacim birbiriyle ilişkilendirilebilir.

$$\mathrm{dv} = \varepsilon_{ijk} \left(\mathbf{FdX}^{(1)}\right)_i \left(\mathbf{FdX}^{(2)}\right)_j \left(\mathbf{FdX}^{(3)}\right)_k \quad \text{veya}$$

$$\mathrm{dv} = \varepsilon_{ijk} F_{iK} F_{jL} F_{kM} dX_K^{(1)}\, dX_L^{(2)} dX_M^{(3)} \tag{A.16}$$

$\varepsilon_{KLM} \det \mathbf{F} = \varepsilon_{ijk} F_{iK} F_{jL} F_{kM}$ eşitliğini kullanarak,

EK-1 (Devam) Bazı matematik eşitliklerin çıkarılışları

$$\mathrm{dv} = \det \mathbf{F}\, \varepsilon_{KLM}\, dX_K^{(1)}\, dX_L^{(2)} dX_M^{(3)} \quad \text{veya}$$

$$\mathrm{dv} = \det \mathbf{F}\, dV \tag{A.17}$$

elde edilir.

<u>Geometrik uygunluk şartları</u>

Hadamard önermesi ile elde edilen sıçrama eşitliği,

$$[\![\varphi]\!]_{,\alpha} = [\![\varphi_{,i}]\!]\, h^{\alpha}_{\ i} \tag{A.18}$$

Burada $h^{\alpha}_{\ i} = \dfrac{dx_i}{dy^{\alpha}}$, Şekil 3.4'de gösterilen y^1 ve y^2 eğrisel koordinatlarının üzerinde yer alan $\mathbf{h}^{\alpha}$ (α = 1, 2) teğet vektörünün *i*. kartezyen bileşenidir. $\mathbf{h}^1$ ve $\mathbf{h}^2$ teğet vektörleri **n** birim normal vektörüne diktir. Eş. 3.16'nın her iki tarafını $h^{\beta}_{\ j} h^{\alpha}_{\ k} h^{\beta}_{\ k}$ ile çarpalım,

$$h^{\alpha}_{\ k} h^{\beta}_{\ k} [\![\varphi]\!]_{,\alpha} h^{\beta}_{\ j} = [\![\varphi_{,i}]\!]\, h^{\alpha}_{\ i} h^{\beta}_{\ j} h^{\alpha}_{\ k} h^{\beta}_{\ k} \tag{A.19}$$

ve

$$h^{\alpha}_{\ i} h^{\beta}_{\ j} h^{\alpha}_{\ k} h^{\beta}_{\ k} = \delta_{ij} - n_i n_j \tag{A.20}$$

eşitliğini kullanarak,

$$h^{\alpha}_{\ k} h^{\beta}_{\ k} [\![\varphi]\!]_{,\alpha} h^{\beta}_{\ j} = [\![\varphi_{,i}]\!] \left(\delta_{ij} - n_i n_j\right)$$

EK-1 (Devam) Bazı matematik eşitliklerin çıkarılışları

$$h^{\alpha}_{k} h^{\beta}_{k} [\![\varphi]\!]_{,\alpha} h^{\beta}_{j} = [\![\varphi_{,j}]\!] - [\![\varphi_{,i}]\!] n_i n_j$$

$$[\![\varphi_{,j}]\!] = [\![\varphi_{,i}]\!] n_i n_j + h^{\alpha}_{k} h^{\beta}_{k} [\![\varphi]\!]_{,\alpha} h^{\beta}_{j}$$

$$[\![\varphi_{,j}]\!] = [\![\varphi_{,i}]\!] n_i n_j + [\![\varphi]\!]_{,\alpha} h^{\alpha}_{j}$$

veya j inisini i indisi ile değiştirerek,

$$[\![\varphi_{,i}]\!] = [\![\varphi_{,k} n_k]\!] n_i + [\![\varphi]\!]_{,\alpha} h^{\alpha}_{i} \tag{A.21}$$

$$[\![Grad\varphi]\!] = [\![Grad\varphi \bullet \mathbf{n}]\!]\mathbf{n} + \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial [\![\varphi]\!]}{\partial y^{\alpha}} \mathbf{h}^{\alpha} \tag{A.22}$$

elde edilir. Bu eşitlik geometrik uygunluk şartı olarak adlandırılır. φ fonksiyonunun sürekli olması halinde Maxwell denklemine ulaşılır.

$$[\![\varphi]\!] = 0 \rightarrow \quad [\![\varphi_{,i}]\!] = [\![\varphi_{,k} n_k]\!] n_i \tag{A.23}$$

Eş. A.21'de φ yerine φ_i ve i indisi yerine j indisi yazarak,

$$[\![\varphi_{,ij}]\!] = [\![\varphi_{,ik} n_k]\!] n_j + [\![\varphi_{,i}]\!]_{,\alpha} h^{\alpha}_{j} \tag{A.24}$$

$[\![\varphi_{,ij}]\!] = [\![\varphi_{,ji}]\!]$ simetri özelliğini kullanarak Eş. A.24 aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$[\![\varphi_{,ij}]\!] = [\![\varphi_{,jk} n_k]\!] n_i + [\![\varphi_{,j}]\!]_{,\alpha} h^{\alpha}_{i} \tag{A.25}$$

EK-1 (Devam) Bazı matematik eşitliklerin çıkarılışları

Eş. A.25'in her iki tarafını $n_i n_j$ ile çarpalım.

$$[\![\varphi_{,ij}]\!] n_i n_j = [\![\varphi_{,jk} n_k]\!] n_i n_i n_j + [\![\varphi_{,j}]\!]_{,\alpha} h^{\alpha}{}_i n_i n_j \tag{A.26}$$

$\mathbf{h}^{\alpha}$ vektörlerinin **n** vektörüne dik olması nedeniyle aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

$$h^{\alpha}{}_i n_i = 0 \quad \text{ve} \quad \mathbf{h}^{\alpha} \bullet \mathbf{n} = 0 \tag{A.27}$$

Eş. A.26'in en son kısmında yer alan ifade sıfıra eşit olacaktır. Böylece aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$[\![\varphi_{,ij}]\!] n_i n_j = [\![\varphi_{,jk} n_k n_j]\!] \tag{A.28}$$

Eş. A.24 ve Eş. A.25'i kullanarak aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$[\![\varphi_{,ik} n_k]\!] n_j + [\![\varphi_{,i}]\!]_{,\alpha} h^{\alpha}{}_j = [\![\varphi_{,jk} n_k]\!] n_i + [\![\varphi_{,j}]\!]_{,\alpha} h^{\alpha}{}_i \tag{A.29}$$

Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafını n_j ile çarparak,

$$[\![\varphi_{,ik} n_k]\!] n_j n_j + [\![\varphi_{,i}]\!]_{,\alpha} h^{\alpha}{}_j \, n_j = [\![\varphi_{,jk} n_k]\!] n_i n_j + [\![\varphi_{,j}]\!]_{,\alpha} h^{\alpha}{}_i n_j$$

$$[\![\varphi_{,ik} n_k]\!] = [\![\varphi_{,jk} n_k]\!] n_i n_j + [\![\varphi_{,j}]\!]_{,\alpha} h^{\alpha}{}_i n_j \tag{A.30}$$

veya

$$[\![Grad(Grad\ \varphi)\,\mathbf{n}]\!] = [\![\mathbf{n} \bullet Grad(Grad\ \varphi)\mathbf{n}]\!]\mathbf{n} + [\![Grad\ \varphi]\!]_{,\alpha} \bullet \mathbf{n}\,\mathbf{h}^{\alpha} \tag{A.31}$$

EK-1 (Devam) Bazı matematik eşitliklerin çıkarılışları

elde edilir. Burada eşitliğin son kısmında yer alan $[\![Grad\,\varphi]\!]_{,\alpha}$ 'nın karşılığını bulalım. Bunun için Eş. A.21'de i indisi yerine j indisi yazarak y^{α} 'a göre kısmi türevini alalım.

$$\frac{\partial[\![\varphi_{,j}]\!]}{\partial y^{\alpha}} = \frac{\partial[\![\varphi_{,k}n_k]\!]}{\partial y^{\alpha}} n_j + [\![\varphi_{,k}n_k]\!]\frac{\partial n_j}{\partial y^{\alpha}} + \frac{\partial^2[\![\varphi]\!]}{\partial y^{\alpha}\partial y^{\beta}} h^{\beta}{}_j + \frac{\partial[\![\varphi]\!]}{\partial y^{\beta}}\frac{\partial h^{\beta}{}_j}{\partial y^{\alpha}} \tag{A.32}$$

$$\frac{\partial n_j}{\partial y^{\alpha}} = -n_k \frac{\partial h^{\gamma}{}_k}{\partial y^{\alpha}} h^{\gamma}{}_j \quad \text{ve}$$

$$\frac{\partial h^{\beta}{}_j}{\partial y^{\alpha}} = n_k \frac{\partial h^{\beta}{}_k}{\partial y^{\alpha}} n_j$$

eşitlikleri kullanılarak Eş. A.32 aşağıdaki formu alır.

$$[\![\varphi_{,j}]\!]_{,\alpha} = [\![\varphi_{,k}n_k]\!]_{,\alpha} n_j - [\![\varphi_{,k}n_k]\!] n_m h^{\gamma}{}_{m,\alpha} h^{\gamma}{}_j + [\![\varphi]\!]_{,\alpha\beta} h^{\beta}{}_j + [\![\varphi]\!]_{,\beta} n_k h^{\beta}{}_{k,\alpha} n_j \tag{A.33}$$

Eş. A.30 ve A.33, Eş. A.24'de yerlerine yazılacak olursa,

$$\begin{aligned}
[\![\varphi_{,ij}]\!] &= [\![\varphi_{,pm}n_m]\!] n_p n_i n_j + [\![\varphi_{,k}n_k]\!]_{,\alpha} n_p n_p h^{\alpha}_i n_j \\
&\quad - [\![\varphi_{,k}n_k]\!] n_m h^{\gamma}{}_{m,\alpha} h^{\gamma}{}_p n_p h^{\gamma}{}_i n_j + [\![\varphi]\!]_{,\alpha\beta} h^{\beta}{}_p n_p h^{\gamma}{}_i n_j \\
&\quad + [\![\varphi]\!]_{,\beta} n_k h^{\beta}{}_{k,\alpha} n_p n_p h^{\alpha}_i n_j \\
&\quad + [\![\varphi_{,k}n_k]\!]_{,\alpha} n_i h^{\alpha}_j - [\![\varphi_{,k}n_k]\!] n_m h^{\gamma}{}_{m,\alpha} h^{\gamma}_i h^{\alpha}_j \\
&\quad + [\![\varphi]\!]_{,\alpha\beta} h^{\beta}_i h^{\alpha}_j + [\![\varphi]\!]_{,\beta} n_k h^{\beta}{}_{k,\alpha} n_i h^{\alpha}{}_j
\end{aligned} \tag{A.34}$$

Eş. A.27 ve $\mathbf{n} \bullet \mathbf{n} = 1$ kullanılarak,

$$\begin{aligned}
[\![\varphi_{,ij}]\!] &= [\![\varphi_{,nm}n_m n_n]\!] n_i n_j + [\![\varphi_{,k}n_k]\!]_{,\alpha} h^{\alpha}{}_i n_j \\
&\quad + [\![\varphi]\!]_{,\beta} n_k h^{\beta}{}_{k,\alpha} h^{\alpha}{}_i n_j + [\![\varphi_{,k}n_k]\!]_{,\alpha} n_i h^{\alpha}_j - [\![\varphi_{,k}n_k]\!] n_m h^{\gamma}{}_{m,\alpha} h^{\gamma}{}_i h^{\alpha}{}_j \\
&\quad + [\![\varphi]\!]_{,\alpha\beta} h^{\beta}_i h^{\alpha}{}_j + [\![\varphi]\!]_{,\beta} n_k h^{\beta}{}_{k,\alpha} n_i h^{\alpha}{}_j
\end{aligned} \tag{A.35}$$

EK-1 (Devam) Bazı matematik eşitliklerin çıkarılışları

φ fonksiyonunun sürekli olduğu düşünülürse,

$$\begin{aligned}[\![\varphi_{,ij}]\!] &= [\![\varphi_{,nm} n_m n_n]\!] n_i n_j + [\![\varphi_{,k} n_k]\!]_{,\alpha} h^{\alpha}_{\ i} n_j \\ &+ [\![\varphi_{,k} n_k]\!]_{,\alpha} n_i h^{\alpha}_{\ j} - [\![\varphi_{,k} n_k]\!] n_m h^{\gamma}_{\ m,\alpha} h^{\gamma}_{\ i} h^{\alpha}_{\ j}\end{aligned} \tag{A.36}$$

veya

$$\begin{aligned}[\![Grad(Grad\,\varphi)]\!] &= [\![\mathbf{n} \bullet Grad(Grad\,\varphi)\mathbf{n}]\!]\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + [\![(Grad\,\varphi) \bullet \mathbf{n}]\!]_{,\alpha} \mathbf{h}^{\alpha} \otimes \mathbf{n} \\ &+ [\![(Grad\,\varphi) \bullet \mathbf{n}]\!]_{,\alpha} \mathbf{n} \otimes \mathbf{h}^{\alpha} - [\![(Grad\,\varphi) \bullet \mathbf{n}]\!]\mathbf{n} \bullet \frac{\partial \mathbf{h}^{\alpha}}{\partial y^{\alpha}} (\mathbf{h}^{\gamma} \otimes \mathbf{h}^{\alpha})\end{aligned} \tag{A.37}$$

elde edilir.

Eş. A.21 ve Eş. A.22'de verilen geometrik uygunluk şartını bir **v** vektörü için yazacak olursak,

$$[\![v_{i,j}]\!] = [\![v_{i,k} n_k]\!] n_j + [\![v_i]\!]_{,\alpha} h^{\alpha}_{\ j} \tag{A.38}$$

$$[\![Grad\,\mathbf{v}]\!] = [\![(Grad\,\mathbf{v})\mathbf{n}]\!] \otimes \mathbf{n} + [\![\mathbf{v}]\!]_{,\alpha} \otimes \mathbf{h}^{\alpha} \tag{A.39}$$

Eş. A.38'de v_i yerine $v_{i,k}$ yazarak **v** vektörünün ikinci gradyanındaki sıçrama ifadesini aşağıdaki gibi oluşturabiliriz.

$$[\![v_{i,jk}]\!] = [\![v_{i,km} n_m]\!] n_j + [\![v_{i,k}]\!]_{,\alpha} h^{\alpha}_{\ j} \tag{A.40}$$

$[\![v_{i,jk}]\!] = [\![v_{i,kj}]\!]$ simetri özelliğini kullanarak,

$$[\![v_{i,km} n_m]\!] n_j + [\![v_{i,k}]\!]_{,\alpha} h^{\alpha}_{\ j} = [\![v_{i,jm} n_m]\!] n_k + [\![v_{i,j}]\!]_{,\alpha} h^{\alpha}_{\ k} \tag{A.41}$$

EK-1 (Devam) Bazı matematik eşitliklerin çıkarılışları

Eş. A.41'de her iki tarafı n_j ile çarparak,

$$[\![v_{i,km}n_m]\!] = [\![v_{i,jm}n_m]\!]n_k n_j + [\![v_{i,j}]\!]_{,\alpha} h^{\alpha}{}_{k} n_j \tag{A.42}$$

veya

$$[\![v_{i,km}n_m]\!] = [\![v_{i,pm}n_m]\!]n_k n_p + [\![v_{i,p}]\!]_{,\alpha} h^{\alpha}{}_{k} n_p \tag{A.43}$$

Yukarıdaki eşitlikte yer alan $[\![Grad\ \mathbf{v}]\!]_{,\alpha}$ eşitliğinin karşılığını bulalım,

$$\frac{\partial [\![v_{i,j}]\!]}{\partial y^{\alpha}} = \frac{\partial [\![v_{i,k}n_k]\!]}{\partial y^{\alpha}} n_j + [\![v_{i,k}n_k]\!]\frac{\partial n_j}{\partial y^{\alpha}} + \frac{\partial^2 [\![v_i]\!]}{\partial y^{\alpha}\partial y^{\beta}} h^{\beta}{}_{j} + \frac{\partial [\![v_i]\!]}{\partial y^{\beta}} \frac{\partial h^{\beta}{}_{j}}{\partial y^{\alpha}} \tag{A.44}$$

Eş. A.44, A.40'da yerine yazılarak,

$$\begin{aligned} [\![v_{i,jk}]\!] = {} & [\![v_{i,pm}n_m]\!]n_k n_p n_j + [\![v_{i,s}n_s]\!]_{,\alpha} n_p h^{\alpha}{}_{k} n_p n_j \\ & - [\![v_{i,s}n_s]\!] n_q h^{\gamma}{}_{q,\alpha} h^{\gamma}{}_{p} h^{\alpha}{}_{k} n_p n_j \\ & + [\![v_i]\!]_{,\alpha\beta} h^{\beta}{}_{p} h^{\alpha}{}_{k} n_p n_j + [\![v_i]\!]_{,\beta} n_s h^{\beta}{}_{s,\alpha} n_p h^{\alpha}{}_{k} n_p n_j \\ & + [\![v_i]\!]_{,\alpha\beta} h^{\beta}{}_{k} h^{\alpha}{}_{j} + [\![v_i]\!]_{,\beta} n_s h^{\beta}{}_{s,\alpha} n_k h^{\alpha}{}_{j} \\ & + [\![v_{i,s}n_s]\!]_{,\alpha} n_k h^{\alpha}{}_{j} - [\![v_{i,s}n_s]\!] n_q h^{\gamma}{}_{q,\alpha} h^{\gamma}{}_{k} h^{\alpha}{}_{j} \end{aligned} \tag{A.45}$$

Eğer **v** vektörel fonksiyonu sürekli ise,

$$\begin{aligned} [\![v_{i,jk}]\!] = {} & [\![v_{i,pm}n_m]\!]n_p n_j n_k + [\![v_{i,s}n_s]\!]_{,\alpha} h^{\alpha}{}_{k} n_j \\ & + [\![v_{i,s}n_s]\!]_{,\alpha} n_k h^{\alpha}{}_{j} - [\![v_{i,s}n_s]\!] n_q h^{\gamma}{}_{q,\alpha} h^{\gamma}{}_{k} h^{\alpha}{}_{j} \end{aligned} \tag{A.46}$$

EK-1 (Devam) Bazı matematik eşitliklerin çıkarılışları

$$\begin{aligned}[\![Grad(Grad\,\mathbf{v})]\!] &= [\![Grad(Grad\,\mathbf{v})(\mathbf{n},\mathbf{n})]\!]\otimes\mathbf{n}\otimes\mathbf{n} \\ &+ [\![(Grad\,\mathbf{v})\bullet\mathbf{n}]\!]_{,\alpha}\otimes\mathbf{n}\otimes\mathbf{h}^{\alpha} + [\![(Grad\,\mathbf{v})\bullet\mathbf{n}]\!]_{,\alpha}\otimes\mathbf{h}^{\alpha}\otimes\mathbf{n} \\ &- [\![(Grad\,\mathbf{v})\mathbf{n}]\!]\left(\mathbf{n}\bullet\frac{\partial\mathbf{h}^{\alpha}}{\partial y^{\alpha}}\right)\otimes\mathbf{h}^{\alpha}\otimes\mathbf{h}^{\gamma}\end{aligned} \tag{A.47}$$

elde edilir.

Kinematik uygunluk şartları

$$\frac{\delta[\![\varphi]\!]}{\delta t} = [\![\dot{\varphi}]\!] + u_n[\![Grad\varphi]\!]\bullet\mathbf{n} \tag{A.48}$$

veya

$$[\![\dot{\varphi}]\!] = -u_n[\![Grad\varphi]\!]\bullet\mathbf{n} + \frac{\delta[\![\varphi]\!]}{\delta t} \tag{A.49}$$

Eğer φ skaler fonksiyonu σ tekillik yüzeyi üzerinde sürekliyse ($[\![\varphi]\!]=0$)

$$[\![\dot{\varphi}]\!] = -u_n[\![Grad\varphi]\!]\bullet\mathbf{n} \tag{A.50}$$

Eş. A.48'de φ yerine $\dot{\varphi}$ yazarak,

$$[\![\ddot{\varphi}]\!] = -u_n[\![Grad\dot{\varphi}]\!]\bullet\mathbf{n} + \frac{\delta[\![\dot{\varphi}]\!]}{\delta t} \tag{A.51}$$

$[\![Grad\varphi]\!]\bullet\mathbf{n}$ ifadesinin delta türevini alalım.

$$\frac{\delta[\![\varphi_{,i}]\!]n_i}{\delta t} = \frac{\delta[\![\varphi_{,i}]\!]}{\delta t}n_i + [\![\varphi_{,i}]\!]\frac{\delta n_i}{\delta t} \tag{A.52}$$

EK-1 (Devam) Bazı matematik eşitliklerin çıkarılışları

Delta türevinin tanımından yararlanarak devam edecek olursak,

$$\frac{\delta[\![\varphi_{,i}]\!]n_i}{\delta t}=\left(\frac{\partial[\![\varphi_{,i}]\!]}{\partial t}+u_n\frac{\partial[\![\varphi_{,i}]\!]}{\partial x_j}n_j\right)n_i+[\![\varphi_{,i}]\!]\frac{\delta n_i}{\delta t}$$

$$\frac{\delta[\![\varphi_{,i}]\!]n_i}{\delta t}=\frac{\partial[\![\varphi_{,i}]\!]}{\partial t}n_i+u_n\frac{\partial[\![\varphi_{,i}]\!]}{\partial x_i}n_jn_i+[\![\varphi_{,i}]\!]\frac{\delta n_i}{\delta t}$$

$$\left[\!\!\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\right]\!\!\right]n_i=\frac{\delta[\![\varphi_{,i}]\!]n_i}{\delta t}-u_n[\![\varphi_{,ij}]\!]n_jn_i-[\![\varphi_{,i}]\!]\frac{\delta n_i}{\delta t} \tag{A.53}$$

Eş. A.21'i, Eş. A.53'de yerine yazalım,

$$\left[\!\!\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\right]\!\!\right]n_i=\frac{\delta[\![\varphi_{,i}]\!]n_i}{\delta t}-u_n[\![\varphi_{,ij}]\!]n_in_j-[\![\varphi_{,k}n_k]\!]n_i\frac{\delta n_i}{\delta t}-[\![\varphi]\!]_{,\alpha}h^{\alpha}_{\ i}\frac{\delta n_i}{\delta t} \tag{A.54}$$

Birim normal vektörün delta türevi aşağıdaki gibi yazılır (ispat icin Thomas 1957)

$$\frac{\delta n_i}{\delta t}=-h^{\alpha}_{\ k}h^{\beta}_{\ k}h^{\alpha}_{\ i}\frac{\partial u_n}{\partial y^{\beta}} \tag{A.55}$$

Eş. A.55, Eş. A.53'de yerine yazılacak olursa,

$$\begin{aligned}\left[\!\!\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\right]\!\!\right]n_i&=\frac{\delta[\![\varphi_{,i}]\!]n_i}{\delta t}-u_n[\![\varphi_{,ij}]\!]n_in_j\\&\quad+[\![\varphi_{,k}n_k]\!]n_ih^{\alpha}_{\ k}h^{\beta}_{\ k}h^{\alpha}_{\ i}\frac{\partial u_n}{\partial v^{\beta}}+[\![\varphi]\!]_{,\alpha}h^{\alpha}_{\ i}h^{\alpha}_{\ k}h^{\beta}_{\ k}h^{\alpha}_{\ i}\frac{\partial u_n}{\partial v^{\beta}}\end{aligned} \tag{A.56}$$

Eş. A.27 kullanilarak, Eş. A.56 aşağıdaki şekli alır.

$$\left[\!\!\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\right]\!\!\right]n_i=\frac{\delta[\![\varphi_{,i}]\!]n_i}{\delta t}-u_n[\![\varphi_{,ij}]\!]n_in_j+[\![\varphi]\!]_{,\alpha}h^{\alpha}_{\ i}h^{\alpha}_{\ k}h^{\beta}_{\ k}h^{\alpha}_{\ i}\frac{\partial u_n}{\partial y^{\beta}} \tag{A.57}$$

EK-1 (Devam) Bazı matematik eşitliklerin çıkarılışları

Eş. A.57'yi, Eş. A.51'de yerine yazacak olursak,

$$[\![\ddot{\varphi}]\!] = -u_n\left(\frac{\delta[\![\varphi_{,i}]\!]n_i}{\delta t} - u_n[\![\varphi_{,ij}]\!]n_i n_j + [\![\varphi]\!]_{,\alpha} h^{\alpha}{}_{i} h^{\alpha}{}_{k} h^{\beta}{}_{k} h^{\alpha}{}_{i} \frac{\partial u_n}{\partial y^{\beta}}\right) + \frac{\delta[\![\dot{\varphi}]\!]}{\delta t} \tag{A.58}$$

elde edilir. Eğer φ skaler fonksiyonu σ tekillik yüzeyi üzerinde sürekli ise,

$$[\![\ddot{\varphi}]\!] = -2u_n \frac{\delta[\![\varphi_{,i}]\!]n_i}{\delta t} + u_n^{\,2}[\![\varphi_{,ij}]\!]n_i n_j - [\![\varphi_{,k}]\!]n_k \frac{\delta u_n}{\delta t} \tag{A.59}$$

elde edilir. Burada φ skaler fonksiyonunun gradyanı da σ tekillik yüzeyi üzerinde sürekli ise,

$$[\![\ddot{\varphi}]\!] = u_n^{\,2}[\![\varphi_{,ij}]\!]n_i n_j \tag{A.60}$$

elde edilir.

<u>Dördüncü mertebe elastisite tansörünün bulunması</u>

$$\mathbf{A} = \rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{F} \partial \mathbf{F}} \tag{A.61}$$

Eş. 2.89 ile verilen Helmholtz serbest enerji fonksiyonunun deformasyon gradyanına göre birinci türevi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\rho_0 \frac{\partial \psi(\mathbf{E},\theta)}{\partial \mathbf{F}} = \frac{\lambda}{2}\frac{\partial(\mathrm{tr}\mathbf{E})^2}{\partial \mathbf{F}} + \mu \frac{\partial \mathrm{tr}(\mathbf{E}^2)}{\partial \mathbf{F}} - \kappa_T \beta_0 (\theta - \theta_0)\frac{\partial(\mathrm{tr}\mathbf{E})}{\partial \mathbf{F}} \tag{A.62}$$

EK-1 (Devam) Bazı matematik eşitliklerin çıkarılışları

Bu türev ifadesi, matematiksel düzenlemenin ardından aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\rho_0 \frac{\partial \psi(\mathbf{E},\theta)}{\partial \mathbf{F}} = \left[\lambda(\mathrm{tr}\mathbf{E}) - \kappa_T \beta_0 (\theta - \theta_0)\right] \frac{\partial(\mathrm{tr}\mathbf{E})}{\partial \mathbf{F}} + \mu \frac{\partial \mathrm{tr}(\mathbf{E}^2)}{\partial \mathbf{F}} \tag{A.63}$$

Helmholtz serbest enerji fonksiyonu Lagrange birim şekil değiştirme tansörünün bir fonksiyonudur. Bu şekil değiştirme tansörü için aşağıdaki matematiksel ifadeler geçerlidir.

$$\mathrm{E}_{\mathrm{KL}} = \frac{1}{2}\left(F_{nK} F_{nL} - \delta_{KL}\right) \tag{A.64}$$

$$E_{LK} = E_{KL} \tag{A.65}$$

$$\mathrm{tr}\mathbf{E}^2 = \mathrm{E}_{\mathrm{KL}} \mathrm{E}_{\mathrm{LK}} = \frac{1}{2}\left(F_{nK} F_{nL} - \delta_{KL}\right) E_{LK} \tag{A.66}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{KL}}{\partial F_{mN}} &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial F_{nK}}{\partial F_{mN}} F_{nL}\right) + \left(F_{nK} \frac{\partial F_{nL}}{\partial F_{mN}}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\delta_{nm}\delta_{KN} F_{nL}\right) + \left(F_{nK}\delta_{nm}\delta_{LN}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\left(\delta_{KN} F_{mL}\right) + \left(F_{mK}\delta_{LN}\right)\right] \end{aligned} \tag{A.67}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\mathrm{tr}\mathbf{E})}{\partial F_{mN}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F_{nK}}{\partial F_{mN}} F_{nK} + F_{nK} \frac{F_{nK}}{\partial F_{mN}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\delta_{nm}\delta_{KN} F_{nK} + F_{nK}\delta_{nm}\delta_{KN}\right) = F_{mN} \end{aligned} \quad \text{veya} \quad \frac{\partial(\mathrm{tr}\mathbf{E})}{\partial \mathbf{F}} = \mathbf{F} \tag{A.68}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\mathrm{tr}\mathbf{E}^2)}{\partial F_{mN}} &= 2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F_{nK}}{\partial F_{mN}} F_{nL} + F_{nK} \frac{F_{nL}}{\partial F_{mN}}\right)\right] E_{KL} \\ &= \delta_{nm}\delta_{KN} F_{nL} E_{KL} + F_{nK}\delta_{nm}\delta_{LN} E_{KL} \\ &= F_{mL} E_{NL} + F_{mK} E_{KN} = 2 F_{mL} E_{NL} \end{aligned} \quad \text{veya} \quad \frac{\partial(\mathrm{tr}\mathbf{E}^2)}{\partial \mathbf{F}} = 2\mathbf{FE} \tag{A.69}$$

EK-1 (Devam) Bazı matematik eşitliklerin çıkarılışları

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_{KL}}{\partial F_{rM}} &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial F_{nK}}{\partial F_{rM}}F_{nL}\right)+\left(F_{nK}\frac{\partial F_{nL}}{\partial F_{rM}}\right)\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\delta_{nr}\delta_{KM}F_{nL}\right)+\left(F_{nK}\delta_{nr}\delta_{LM}\right)\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\delta_{KM}F_{rL}\right)+\left(F_{rK}\delta_{LM}\right)\right]\end{aligned} \tag{A.70}$$

Eş. A.68'de ve Eş. A.69'de bulunan türev ifadelerinin Eş. A.63'de yerine yazılmasıyla,

$$\rho_0\frac{\partial\psi(\mathbf{E},\theta)}{\partial\mathbf{F}} = \left[\lambda(\mathrm{tr}\mathbf{E})-\kappa_T\beta_0\rho_0(\theta-\theta_0)\right]\mathbf{F}+2\mu\mathbf{FE} \tag{A.71}$$

elde edilir. Eş. A.71'ün bir kez daha deformasyon gradyan tansörüne göre türevi alınacak olursa,

$$\rho_0\frac{\partial^2\psi}{\partial\mathbf{F}\partial\mathbf{F}} = \lambda\left[\frac{\partial(\mathrm{tr}\mathbf{E})}{\partial\mathbf{F}}\mathbf{F}+(\mathrm{tr}\mathbf{E})\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{F}}\right]+2\mu\left[\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{F}}\mathbf{E}+\mathbf{F}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\mathbf{F}}\right]-\kappa_T\beta_0(\theta-\theta_0)\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{F}} \tag{A.72}$$

İndis notasyonu kullanılarak,

$$\begin{aligned}A_{mNrM} = {} & \lambda\left[\frac{\partial(\mathrm{tr}\mathbf{E})}{\partial F_{rM}}F_{mN}+(\mathrm{tr}\mathbf{E})\frac{\partial F_{mN}}{\partial F_{rM}}\right]+2\mu\left[\frac{\partial F_{mL}}{\partial F_{rM}}E_{LN}+F_{mL}\frac{\partial E_{LN}}{\partial F_{rM}}\right]\\ & -\kappa_T\beta_0(\theta-\theta_0)\frac{\partial F_{mN}}{\partial F_{rM}}\end{aligned} \tag{A.73}$$

$$\begin{aligned}= {} & \lambda\left[F_{rM}F_{mN}+(\mathrm{tr}\mathbf{E})\delta_{mr}\delta_{NM}\right]+2\mu\left[\delta_{mr}\delta_{LM}E_{LN}+F_{mL}\frac{1}{2}\left[\left(\delta_{LM}F_{rN}\right)+\left(F_{rL}\delta_{NM}\right)\right]\right]\\ & -\kappa_T\beta_0(\theta-\theta_0)\delta_{mr}\delta_{NM}\end{aligned}$$

EK-1 (Devam) Bazı matematik eşitliklerin çıkarılışları

$$= \lambda\left[F_{rM}F_{mN} + (\mathrm{tr}\mathbf{E})\delta_{mr}\delta_{NM}\right] + 2\mu\left[\delta_{mr}E_{MN} + \frac{1}{2}F_{mM}F_{rN} + \frac{1}{2}F_{mL}F_{rL}\delta_{NM}\right]$$
$$- \kappa_T\beta_0(\theta - \theta_0)\delta_{mr}\delta_{NM}$$

$$A_{mNrM} = \lambda F_{rM}F_{mN} + \lambda(\mathrm{tr}\mathbf{E})\delta_{mr}\delta_{NM} + 2\mu\delta_{mr}E_{MN} + \mu F_{mM}F_{rN} + \mu F_{mL}F_{rL}\delta_{NM}$$
$$- \kappa_T\beta_0(\theta - \theta_0)\delta_{mr}\delta_{NM} \tag{A.74}$$

$$\mathbf{A} = \lambda(\mathbf{F}\otimes\mathbf{F}) + \lambda(\mathrm{tr}\mathbf{E})(\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}) + 2\mu(\mathbf{I}\otimes\mathbf{E}) + \mu(\mathbf{F}\otimes\mathbf{F}) + \mu(\mathbf{B}\otimes\mathbf{I}) - \kappa_T\beta_0(\theta-\theta_0)(\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}) \tag{A.75}$$

olarak 4. mertebe elastisite tansörü elde edilir.

<u>İkinci mertebe sıcaklık-deformasyon tansörünün bulunması</u>

$$\mathbf{B} = \rho_0\frac{\partial^2\psi}{\partial\mathbf{F}\partial\theta} \tag{A.76}$$

$$B_{kL} = \rho_0\frac{\partial^2\psi}{\partial F_{kL}\partial\theta} = -\kappa_T\beta_0\frac{\partial}{\partial\theta}\left((\theta-\theta_0)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F_{nK}}{\partial F_{kL}}F_{nK} + F_{nK}\frac{\partial F_{nK}}{\partial F_{kL}}\right)\right]\right) \tag{A.77}$$

$$B_{kL} = -\kappa_T\beta_0\frac{\partial}{\partial\theta}\left[(\theta-\theta_0)\left(\frac{1}{2}(\delta_{nk}\delta_{KL}F_{nK} + F_{nK}\delta_{nk}\delta_{KL})\right)\right]$$

$$B_{kL} = -\kappa_T\beta_0\frac{\partial}{\partial\theta}\left[(\theta-\theta_0)F_{nK}\delta_{nk}\delta_{KL}\right]$$

$$B_{kL} = -\kappa_T\beta_0\frac{\partial}{\partial\theta}\left[(\theta-\theta_0)F_{kL}\right]$$

$$B_{kL} = -\kappa_T\beta_0F_{kL} \tag{A.78}$$

EK-1 (Devam) Bazı matematik eşitliklerin çıkarılışları

$$\mathbf{B} = -\kappa_T \beta_0 \mathbf{F} \tag{A.79}$$

olarak 2. mertebe sıcaklık-deformasyon tansörü bulunur.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: ALYAVUZ, Bahadır
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 31.10.1977 Erzincan
Medeni hali	: Evli
E-posta	: balyavuz@gazi.edu.tr

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet tarihi**
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi/İnşaat Mühendisliği	2003
Lisans	Gazi Üniversitesi/İnşaat Mühendisliği	2001
Lise	Ankara İnşaat Teknik Lisesi	1995

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2002-2008	Gazi Üniversitesi/İnşaat Mühendisliği	Araştırma Görevlisi

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

1. Alyavuz, B., Gültop, T., “Weak shock waves and shear bands in thermoelastic solids”, ***Acta Mechanica***, 10.1007/s00707-008-0117-4.

2. Alyavuz, B.**,** "Dairesel Delikli Dikdörtgen Levhanın H-Tipi Sonlu Elemanlar ile Uyarmalı Analizi", ***Gazi Üniversitesi Müh. Mim. Fak. Dergisi***, 22 (1): 39-46 (2007).

3. Alyavuz, B.**,** Anıl, Ö., "Kolonlardan Yuvalı Temellere Aktarılan Yüklemenin Lineer Olmayan Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Analizi", ***Gazi Üniversitesi Müh. Mim. Fak. Dergisi***, 22 (3): 471-479 (2007).

4. Alyavuz, B.**,** "Stress Distribution in a Shear Wall-Frame Structure Using Unstructured-Refined Finite Element Mesh", ***G.U. Journal of Science***, 20 (1): 7-14 (2007).

5. Gültop, T., Alyavuz, B., "Termoelastik Kısıtlı Cisimlerde Zayıf Şok Dalgası Yayılması ve Kayma Bandı Oluşumu", ***15. Ulusal Mekanik Kongresi***, Süleyman Demirel Üniversitesi, Isparta, 465-475 (2007).

6. Gültop, T., Alyavuz, B., "Existence of Shear Bands in Thermoelastic Solids", ***Proceedings of the 6th European Solid Mechanics Conference ESMC 2006***, Budapest, Hungary (2006).

Hobiler

Doğa fotoğrafçılığı, Doğa yürüyüşleri, Dağcılık