5491

TANJANT MANİFOLD ÜZERİNDE METRİKLER, KONNEKSİYONLAR VE EĞRİLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

(MATEMATİK)

Aysel TURGUT

Şubat 1989

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Danışman
Doç. Dr. Erdoğan Esin

Sınav Jürisi

Başkan : Prof.Dr. H.Hilmi HACISALİHOĞLU

Üye : Doç.Dr. Arif SABUNCUOĞLU

Üye : Doç.Dr. Erdoğan ESİN

Bu Tez Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Ensitüsü Tez Yazım Esaslarına uygundur.

İÇİNDEKİLER Sayfa

TANJANT MANİFOLD ÜZERİNDE
METRİKLER, KONNEKSİYONLAR VE EĞRİLER
(Yüksek Lisans Tezi)

Aysel TURGUT
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Şubat 1989

ÖZ

Diferensiyellenebilir bir manifold üzerindeki bir Riemann metriğinden ve lineer bir konneksiyondan yararlanarak, bu manifoldun tanjant manifoldu üzerinde elde edilebilen temel metrikler ve konneksiyonların bir sınıflandırılması yapılmıştır. Ayrıca manifold üzerinde verilen herhangi bir eğriye tanjant manifold üzerinde karşılık gelen horizantal lift, doğal lift ve izdüşürülebilir eğrilerin yüksek mertebeden eğrilikleri hesaplanarak, orijinal eğri ile arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

METRICS, CONNECTIONS AND CURVES
ON TANGENT MANIFOLD

(M. Sc. Thesis)

Aysel TURGUT
GAZİ UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
February 1989

ABSTRACT

The main metrics and connections on the tangent manifold of a differentiable manifold, which can be obtained from a Riemannian metric and a linear connection on the manifold, were classified. In addition, higher order curvatures of the horizontal lift, natural lift and projectable curves on the tangent manifold corresponding to any given curve on the manifold were calculated and so the relationships with the original curve were studied.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı hazırlarken, değerli vakitlerini esirgemeden bana ayıran, bütün çalışmalarımı titizlikle inceleyen, her adımda bilgisine başvurduğum Sayın Hocam Doç. Dr. Erdoğan ESİN'e minnet ve şükranlarımı arz ederim.

SEMBOLLER

Sembol	Anlam
M	Herhangi bir C^∞- manifold.
$\mathcal{T}^0_0(M)$	M üzerinde tanımlı reel değerli C^∞-sınıfından diferensiyellenebilir fonksiyonların cebiri.
$\mathcal{T}^1_0(M)$	M üzerinde tanımlı vektör alanlarının modülü.
$\mathcal{T}^0_1(M)$	M üzerinde tanımlı 1-formların modülü.
$T_p(M)$	M nin herhangi bir p noktasındaki tanjant uzayı.
$\mathcal{T}^r_s(M)$	M üzerinde (r,s)-tipinden tensör alanlarının modülü.
∇	M üzerinde bir konneksiyon.
Γ^h_{ji}	∇ konneksiyonunun bileşenleri.
T	∇ konneksiyonunun torsiyon tensörü.
T^h_{ji}	Torsiyon tensörünün bileşenleri
R	∇ konneksiyonunun eğrilik tensör alanı.
R^h_{kji}	Eğrilik tensörünün bileşenleri.
g	M üzerinde bir Riemann metriği.
g_{ji}	Riemann metriğinin bileşenleri.
τ_{TM}	M nin tanjant demeti.
TM	M nin tanjant manifoldu.
$T_z(TM)$	TM nin z noktasındaki tanjant uzayı.
${}^v\mathcal{T}^1_0(TM)$	TM üzerinde tanımlı vertical vektör alanlarının modülü.

Sembol	Anlam
${}^{H}\mathcal{T}^{1}_{0}(TM)$	TM üzerinde tanımlı horizontal vektör alanlarının modülü.
${}^{P}\mathcal{T}^{1}_{0}(TM)$	TM üzerinde tanımlı izdüşürülebilir vektör alanlarının modülü.
$\bar{\mathcal{T}}^{0}_{0}(TM)$	$\mathcal{T}^{0}_{0}(M)$ cebirinin vertical lift'i.
$\bar{\mathcal{T}}^{1}_{0}(TM)$	TM üzerinde tanımlı vektör alanlarının $\bar{\mathcal{T}}^{0}_{0}(M)$-modülü.

BÖLÜM 1

TEMEL YAPILAR

1.1. Vektör Demetleri

1.1.1. TANIM (Vektör demeti (vector bundle)):

E, M, F C^∞- manifoldlar, $\pi_E : E \to M$ örten bir C^∞-dönüşüm olmak üzere $\tau_E = (E, \pi_E, M, F)$ sistemi aşağıdaki üç özelliği sağlıyorsa τ_E'ye bir (diferensiyellenebilir) vektör demeti denir:

V_1) M nin bir açık örtüsü $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ olmak üzere, eğer

$$(\pi_E \circ \psi_\alpha)(x,y) = x \ ; \ x \in U_\alpha \ , \ y \in F$$

olacak biçimde $\psi_\alpha : U_\alpha \times F \to \pi_E^{-1}(U_\alpha)$ diffeomorfizmlerin bir $\{\psi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ailesi vardır ;

V_2) $\forall x \in M$ için, $\pi_E^{-1}\{(x)\} = \pi_E^{-1}(x) = F_x$ ve F reel vektör uzaylarıdır;

V_3) $\forall x \in M$ ve $\forall \alpha \in I$ (I bir indis cümlesi) için, $\psi_{\alpha,x} : F \to F_x$ dönüşümleri lineer izomorfizmler olacak biçimde τ_E nin bir $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ sistemi vardır (1).

$\tau_E = (E, \pi_E, M, F)$ bir vektör demeti olsun. Bu durumda E'ye total uzay veya demet uzayı, π_E dönüşümüne doğal projeksiyon, M'ye baz uzayı ve F ye de lif modeli veya standart lif denir. Ayrıca $D = \{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ sistemine π'nin lokal ayrışması veya lokal koordinat temsilcisi ve herhangi bir $x \in M$ için $\pi_E^{-1}(x) = F_x = \{u \in E \mid \pi(u) = x\}$ cümlesine x üzerinde bir lif denir. Ayrıca, $\pi_E^{-1}(x)$ E'de bir kapalı imbedded altmanifolddur ve E total uzayı $\pi_E^{-1}(x)$ liflerinin ayrık birleşimidir.

1.1.2. TANIM (Aşikâr demet (trivial bundle)):

$\tau_E = (E, \pi_E, M, F)$ bir vektör demeti olsun. Eğer $E = M \times F$ ve π_E birinci izdüşüm fonksiyonu ise, τ_E'ye bir aşikâr demet denir (1).

1.1.3. TANIM (Kısıtlanmış demet) :

$\tau_E = (E, \pi_E, M, F)$ bir vektör demeti olsun. $O \subset M$ bir açık altmanifold olmak üzere $\tau_E|_O = (\pi_E^{-1}(O), \pi_E|_O, O, F)$ dörtlüsü bir vektör demeti olup bu vektör demetine kısıtlanmış vektör demeti denir; burada $\pi_E|_O$, π_E'nin $\pi_E^{-1}(O)$ açık cümlesi üzerine kısıtlanmışıdır(1).

1.1.4. TANIM (Alt vektör demeti (Subbundle)):

$\tau_E = (E, \pi_E, M, F)$ ve $\tau_{E'} = (E', \pi_{E'}, M', F')$ iki vektör demeti olsun. Eğer,

i) $M' = M$;

ii) $\forall x \in M'$ için F'_x lifi F_x lifinin bir alt vektör uzayı;

(iii) $j : E' \to E$ inclusion dönüşümü diferensiyellenebilir;

ise $\tau_{E'}$ vektör demetine τ_E vektör demetinin bir alt vektör demeti denir (1).

1.1.1. ÖRNEK (Tanjant demet) :

Bir n-boyutlu M C^{∞}-manifoldunun herhangi bir p noktasındaki tanjant uzayı $T_p(M)$ ve M'nin bütün p noktalarındaki $T_p(M)$ tanjant uzaylarının ayrık birleşimi

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p(M)$$

olsun TM den M manifoldu üzerine $\forall z \in TM$ için $\pi(z) = p$ şeklinde tanımlı π kanonik projeksiyon dönüşümü ile birlikte $\tau_{TM} = (TM, \pi, M, \mathbb{R}^n)$ dörtlüsü bir vektör demetidir. Bu demete M'nin tanjant demeti denir (1).

$\tau_E = (E, \pi_E, M, F)$ bir vektör demeti olsun. Bir

$$\pi_{TE} : TE \to E$$

dönüşümü $\forall z \in E$ için $\pi_{TE}^{-1}(z) = T_z(E)$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda

$$TE = \bigcup_{z \in E} T_z(E)$$

olmak üzere $\tau_{TE} = (TE, \pi_{TE}, E, \mathbb{R}^{n+r})$ dörtlüsü bir vektör demeti olup, bu E manifoldunun tanjant demetidir; burada $r = \text{boy}\, F$ dir.

1.1.5. TANIM (Vertical altuzay ve vertical tanjant vektör) :

$\tau_E = (E, \pi_E, M, F)$ bir vektör demeti olsun, $\forall z \in E$ için

$$V_z(E) = \ker(\pi_{E*}|_z) = \{A_z \mid A_z \in T_z(E),\ \pi_{E*}|_z(A_z) = 0\}$$

vektör uzayına, $T_z(E)$ tanjant uzayının vertical altuzayı ve $V_z(E)$ nin elemanlarına da vertical tanjant vektörler denir (1).

E üzerinde vektör alanlarının modülü $\mathcal{J}^1_0(E) = \mathfrak{X}(E)$ olmak üzere, $A \in \mathcal{J}^1_0(E)$ olsun. $\forall z \in E$ için $A_z \in V_z(E)$ ise A'ya vertical vektör alanı denir ve $A \in {}^V\mathcal{J}^1_0(E)$ yazılır.

1.1.1. TEOREM :

$\tau_{VE} = (VE, \pi_{VE}, E, \mathbb{R}^r)$ dörtlüsü τ_E nin bir alt vektör demeti olup, burada

$$VE = \bigcup_{z \in E} V_z(E), \qquad \pi_{VE} : \pi_E \big|_{VE}, \quad \pi^{-1}_{VE}(z) = V_z(E)$$

dir (1).

1.1.6. TANIM (Vertical altdemet) :

$\tau_{VE} = (VE, \pi_{VE}, E, \mathbb{R}^r)$ vektör demetine τ_E'nin vertical altdemeti denir (1).

Vektör uzaylarının (ya da modüllerin) direkt toplamına benzer bir kavramda vektör demetlerinin Whitney toplamı adı verilen toplamıdır. τ_1 ve τ_2 herhangi iki vektör demeti ve τ da bu iki demetin Whitney toplamı olan bir vektör demeti yani

$$\tau = \tau_1 \overset{W}{\oplus} \tau_2$$

olsun. Bu durumda F_τ, F_{τ_1} ve F_{τ_2} , sırasıyla, τ, τ_1 ve τ_2 nin lifleri olmak üzere

$$F_\tau = F_{\tau_1} \oplus F_{\tau_2}$$

dir; burada $\oplus$, adi direkt toplamı göstermektedir.

1.1.7. TANIM (Horizontal altdemet) :

$\tau_E = (E, \pi_E, M, F)$ bir vektör demeti ve $\tau_{VE} = (VE, \pi_{VE}, E, \mathbb{R}^r)$ τ_E'nin vertical altdemeti olsun. Bu durumda

$$\tau_E = \tau_{HE} \overset{W}{\oplus} \tau_{VE}$$

olacak biçimdeki τ_{HE} vektör demetine τ_E'nin horizontal altdemeti denir (1).

Tanımından $\tau_{HE} = (HE, \pi_{HE}, E, \mathbb{R}^n)$ şeklinde olup, burada

$$HE = \bigcup_{z\in E} H_z(E), \quad \pi_{HE} : \pi_E|_{HE}, \quad \pi_{HE}^{-1}(z) = H_z(E)$$

dir. Ayrıca $\forall z \in E$ için

$$T_z(E) = H_z(E) \oplus V_z(E), \quad TE = \bigcup_{z\in E} (H_z(E) \oplus V_z(E)) = HE \oplus VE$$

yazılabilir. $H_z(E)$ ye $T_z(E)$ nin horizontal altuzayı ve elemanlarına horizontal tanjant vektörler denir. $B \in \mathcal{J}_0^1(E)$ olsun. $\forall z \in E$ için $B_z \in H_z(E)$ ise B'ye horizontal vektör alanı denir ve $B \in {}^H\mathcal{J}_0^1(E)$ yazılır. Böylece herhangi bir $C \in \mathcal{J}_0^1(E)$ için,

$$C = B + A; \quad B \in {}^H\mathcal{J}_0^1(E), \quad A \in {}^V\mathcal{J}_0^1(E)$$

yazılabilmekte olup B ve A'ya, sırasıyla, C nin horizontal ve vertical bileşenleri denir ve

$$B = h(C), \quad A = \vartheta(C)$$

gösterimleri de kullanılır. Böylece

$$\mathcal{J}^1_0(E) = {}^H\mathcal{J}^1_0(E) \oplus {}^V\mathcal{J}^1_0(E)$$

dir.

1.2. Tanjant Demet

1.1.1 örnek ile verilin $\tau_{TM} = (TM, \pi, M, \mathbb{R}^n)$ tanjant demetini gözönüne alalım.

1.2.1. TEOREM :

TM total uzayı 2n-boyutlu bir C^∞- manifolddur(2).

1.2.1. TANIM (Tanjant manifold) :

TM C^∞-manifolduna, M'nin tanjant manifoldu denir (1).

(U,x) ikilisi, M C^∞-manifoldu için bir harita olsun $U \subset M$ bir açık altcümle olduğundan, $\pi^{-1}(U) = U'$ cümlesi TM'nin bir açık altcümlesi olur. U üzerindeki lokal koordinat sistemi $x = (x^1,\ldots,x^n)$ olmak üzere,

$$\begin{tikzcd}
U' \subset TM \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "v^i"'] & U \subset M \arrow[d, "x^i"] \\
& \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

diagramı değişmeli olacak biçimde,

$$v^i : U' \subset TM \to \mathbb{R} \qquad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

reel değerli fonksiyonlarını gözönüne alalım. Bu durumda herbir $z \in U'$ için

$$v^i(z) = (x^i \circ \pi)(z) = x^i(\pi(z)) = x^i(p)$$

dir. Ayrıca

$$v^{n+i} : U' \subset TM \to \mathbb{R} \qquad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

reel değerli fonksiyonları da herbir $z \in U'$ için

$$v^{n+i}(z) = dx^i(z) = z(x^i) \ : \ z\text{'nin } i\text{- inci bileşeni}$$

olarak tanımlansın. Böylece,

$$\left.\begin{aligned} & v^i = x^i \circ \pi, \ 1 \leqslant i \leqslant n \\ & v^{n+i}(z) = dx^i(z), \ z \in U' \end{aligned}\right\} \qquad (1.2.1)$$

sistemi elde edilir. Bu sistemi kısaca $\{v\}$, $v = (v^1,..,v^{2n})$ şeklinde gösterecek olursak, $\{v\}$ sistemi, TM için bir (lokal) koordinat sistemi ve (U',v) ikilisi de TM için bir (lokal) harita olur. $1 \leqslant i \leqslant n$ olmak üzere $v^{n+i} = y^i$ ile gösterilirse, TM'nin lokal koordinat sistemi

$$\{v\} = (v^i, v^{n+i}) = (x^i, y^i) = (x^1,\ldots,x^n,y^1,\ldots,y^n) = (x,y)$$

şeklinde ifade edilir. (x^i,y^i) şeklindeki gösterimde x^i, $x^i \circ \pi$ anlamındadır. (x^i,y^i) sistemine, (x^i) den indirgenmiş (lokal) koordinat sistemi denir. TM'nin herhangi bir z noktasındaki tanjant uzayı $T_z(TM)$ nin bir bazı $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\pi(z)}, \frac{\partial}{\partial y^i}\Big|_z ; 1 \leqslant i \leqslant n\}$ olup buna $T_z(TM)$'nin standart bazı denir. Böylece herbir $A_z \in T_z(TM)$ elemanı

$$A_z = \sum_{\alpha=1}^{2n} A^\alpha(z) \frac{\partial}{\partial v^\alpha}\Big|_z = \sum_{i=1}^{n} A^i(z) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\pi(z)} + \sum_{i=1}^{n} A^{n+i}(z) \frac{\partial}{\partial y^i}\Big|_z$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca TM üzerindeki C^∞ vektör alanlarının modülü $\mathcal{J}_0^1(TM)$ ile gösterilecek olursa, $\mathcal{J}_0^1(TM)$ nin standart bazı da $\{\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y^i}\ ;\ 1 \leq i \leq n\}$ olup buradaki $\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^i} \circ \pi$ anlamındadır.

TM 2n- boyutlu bir C^∞-manifold olduğundan

$$TTM = \bigcup_{z \in TM} T_z(TM)$$

olmak üzere $\tau_{TTM} = (TTM, \tilde{\pi}, TM, \mathbb{R}^{2n})$ dörtlüsü bir vektör demetidir (2). τ_{TTM} vektör demeti TM'nin tanjant demeti olup, M'nin ikinci tanjant demeti olarak da adlandırılır.

1.2.2. TEOREM :

n-boyutlu bir M C^∞-manifoldu, TM tanjant manifoldunun altmanifolduna diffeomorfdur.

İSPAT :

$O \in T_p(M)$ olmak üzere, $M' = \{(p,o) \mid p \in M\}$ cümlesi TM nin bir altmanifoldudur.

$$j : M \to M' \subset TM$$
$$p \to (p, o)$$

şeklinde tanımlanan inclusion dönüşümünü gözönüne alalım. j bir diffeomorfizmdir. Ayrıca j(M), TM de bir immersed altmanifolddur. Genellikle $j(M) = M'$ ile M manifoldu özdeşlenebilir.

1.3. Tanjant Demete Lift'ler

1.3.1. Vertical Lift'ler :

M üzerinde (r,s) tipinden tensör alanlarının modülü $\mathcal{T}^r_s(M)$ ve TM üzerinde (r,s) tipinden tensör alanlarının modülü $\mathcal{T}^r_s(TM)$ ile gösterilecek olursa,

$$\mathcal{T}(M) = \sum_{r,s} \mathcal{T}^r_s(M) \quad \text{ve} \quad \mathcal{T}(TM) = \sum_{r,s} \mathcal{T}^r_s(TM)$$

olmak üzere, $\mathcal{T}(M)$ cebirinden $\mathcal{T}(TM)$ cebirine sabit katsayılara göre bir içine lineer izomorfizm olan vertical operatörü aşağıdaki özelliklerle karakterize edilir (3):

V1) $S, T \in \mathcal{T}^r_s(M)$ için $(S \otimes T)^V = S^V \otimes T^V$;

V2) $f \in \mathcal{T}^0_0(M) = C^\infty(M,\mathbb{R})$ için, $f^V = f \circ \pi$;

V3) $f \in \mathcal{T}^0_0(M)$ için, $(df)^V = d(f^V)$;

V4) $f \in \mathcal{T}^0_0(M)$ ve $X \in \mathcal{T}^1_0(M) = \chi(M)$ için

$$X^V(\iota(df)) = (Xf)^V, \quad \iota(df) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} y^i \;;$$

dir. Burada ι lineer dönüşümü $\mathcal{T}(M)$ den $\mathcal{T}(TM)$ içine olup aşağıdaki özelliklerle karakterize edilir :

ι1) $S \in \mathcal{T}^r_s(M)$ ve $T \in \mathcal{T}(M)$ için,

$$\iota(S \otimes T) = (\iota S) \otimes T^V + (-1)^s S^V \otimes (\iota T) \;;$$

ι2) $f \in \mathcal{T}^0_0(M)$ için, $\iota f = 0$;

ι3) $f \in \mathcal{T}^0_0(M)$ için, $\iota(df) \equiv df \in \mathcal{T}^0_0(TM) = C^\infty(TM, \mathbb{R})$;

dir. Ayrıca $\iota(\mathcal{T}^r_s(M)) \subset \mathcal{T}^r_{s-1}(TM)$ dir. Bazen $\iota(df)$ yerine ∂f gösterimi de kullanılır.

1.3.1.1. ÖZELLİKLER :

$f,g \in \mathcal{T}_0^0(M)$, $X \in \mathcal{T}_0^1(M)$, $\omega \in \mathcal{T}_1^0(M) = \chi^*(M)$

olmak üzere

1) $(f.g)^V = f^V.g^V$

2) $X^V = \sum_{i=1}^{n} (X^i \circ \pi) \dfrac{\partial}{\partial y^i} : \begin{pmatrix} 0 \\ X^i \circ \pi \end{pmatrix}$

3) $\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right)^V = \dfrac{\partial}{\partial y^i}$, $(fX)^V = f^V X^V$

4) $\tilde{X} \in \mathcal{T}_0^1(TM) = \chi(TM)$ bir vertical vektör alanıdır. $\Longleftrightarrow$

$\tilde{X} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{X}^i \dfrac{\partial}{\partial y^i} : \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{X}^i \end{pmatrix}$, yani $dx^i(\tilde{X}) = 0$ dir.

5) $\omega^V = \sum_{i=1}^{n} (\omega_i)^V dx^i : (\omega_i \circ \pi \quad 0)$

6) $(dx^i)^V = dx^i \in \mathcal{T}_0^0(TM)$

7) $\tilde{\omega} \in \mathcal{T}_1^0(TM)$ bir vertical 1-formdur. $\Longleftrightarrow$

$\tilde{\omega} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\omega}_i \, dx^i : (\tilde{\omega}_i \quad 0)$ dir.

8) $(f\omega)^V = f^V \omega^V$

9) $F = \sum_{h,i=1}^{n} F_i^h \dfrac{\partial}{\partial x^h} \otimes dx^i \in \mathcal{T}_1^1(M)$ için $F^V : \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F_i^h \circ \pi & 0 \end{pmatrix}$

10) $G = \sum_{j,i=1}^{n} G_{ji} \, dx^j \otimes dx^i \in \mathcal{T}_2^0(M)$ için,

$$G^V : \begin{pmatrix} G_{ji} \circ \pi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

11) $G^V(X^V, Y^V) = 0$

12) $H = \sum_{h,i=1}^{n} H^{ih} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^h} \in \mathfrak{T}_0^2(M)$ için,

$$H^V : \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & H^{ih} \circ \pi \end{pmatrix}$$

13) $S,\ T \in \mathfrak{T}(M)$ için, $(S + T)^V = S^V + T^V$

14) $[X^V, Y^V] = 0$ dir (3).

1.3.1.1. TEOREM :

$f \in \mathfrak{T}_0^0(M)$ için $\dfrac{\partial f^V}{\partial (x^i \circ \pi)} = \dfrac{\partial f}{\partial x^i} \circ \pi$ ve $\dfrac{\partial f^V}{\partial y^i} = 0$

dır.

İSPAT :

Bir $f \in \mathfrak{T}_0^0(M)$ fonksiyonu için vertical liftinin tanımı gereğince herbir $z \in TM$ için $f^V(z) = f(\pi(z))$ yazılabilir. Böylece,

$$f^V(z^1, \ldots, z^n, z^{n+1}, \ldots, z^{2n}) = f(\pi^1(z), \ldots, \pi^n(z))$$

$$f^V(v^1(z), \ldots, v^n(z), v^{n+1}(z), \ldots, v^{2n}(z)) = f(x^1(\pi(z)), \ldots, x^n(\pi(z)))$$

$$f^V((x^1 \circ \pi)(z), \ldots, (x^n \circ \pi)(z), y^1(z), \ldots, y^n(z)) = f(x^1(\pi(z)), \ldots, x^n(\pi(z)))$$

eşitliklerinden herbir $z \in TM$ ve $1 \leqslant i \leqslant n$ için

$$\left.\frac{\partial f^V}{\partial (x^i \circ \pi)}\right|_z = \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_{\pi(z)}, \quad \left.\frac{\partial f^V}{\partial y^i}\right|_z = \left.\frac{\partial f}{\partial y^i}\right|_{\pi(z)} = 0$$

elde edilir. O halde

$$\frac{\partial f^V}{\partial (x^i \circ \pi)} = \frac{\partial f}{\partial x^i} \circ \pi, \qquad \frac{\partial f^V}{\partial y^i} = 0$$

dır.

1.3.2. Complete Lift'ler :

$\mathfrak{J}(M)$ den $\mathfrak{J}(TM)$ içine sabit katsayılara göre bir lineer izomorfizm olan complete operatörü aşağıdaki özelliklerle karakterize edilir (3) :

C1) $S,\ T \in \mathfrak{J}(M)$ için, $(S \otimes T)^C = S^C \otimes T^V + S^V \otimes T^C$;

C2) $f \in \mathfrak{J}_0^0(M)$ için, $f^C = \iota\,(df) = \partial f$;

C3) $f \in \mathfrak{J}_0^0(M)$ için, $(df)^C = d(f^C)$;

C4) $f \in \mathfrak{J}_0^0(M)$ ve $X \in \mathfrak{J}_0^1(M)$ için $X^C(f^C) = (Xf)^C$.

1.3.2.1. ÖZELLİKLER :

$f, g \in \mathfrak{J}_0^0(M)$, $X, Y \in \mathfrak{J}_0^1(M)$, $\omega \in \mathfrak{J}_1^0(M)$ olmak üzere,

1) $(f.g)^C = f^C.g^V + f^V.g^C$

2) $X^C = \sum_{h=1}^{n} (X^h \circ \pi) \frac{\partial}{\partial x^h} + \sum_{h=1}^{n} (X^h)^C \frac{\partial}{\partial y^h}$; $\begin{pmatrix} X^h \circ \pi \\ \partial X^h \end{pmatrix}$

3) $(\frac{\partial}{\partial x^i})^C = \frac{\partial}{\partial x^i}$

4) $(fX)^C = f^C X^V + f^V X^C$

5) $(Xf)^V = X^V(f^C)$

6) $[X^C, Y^V] = [X,Y]^V = [X^V, Y^C]$, $[X^C, Y^C] = [X,Y]^C$

7) $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{J}_0^1(TM)$ için $\tilde{X} = \tilde{Y}$ dir. $\Longleftrightarrow$ $\tilde{X}(f^C) = \tilde{Y}(f^C)$ dir.

8) $\omega^C = \sum_{i=1}^{n} \partial\omega_i\, dx^i + \sum_{i=1}^{n} (\omega_i \circ \pi) dy^i$: $(\partial\omega_i \quad \omega_i \circ \pi)$

9) $(f\omega)^C = f^C \omega^V + f^V \omega^C$

10) $(\omega(X))^{v} = \omega^{v}(X^{c}) = \omega^{c}(X^{v}), \ \omega^{c}(X^{c}) = (\omega(X))^{c}$

11) $(dx^{h})^{c} = dy^{h}$

12) $\tilde{\omega}, \tilde{\theta} \in \mathcal{J}_1^0(TM)$ için $\tilde{\omega} = \tilde{\theta}$ dir. $\Leftrightarrow \tilde{\omega}(X^{c}) = \tilde{\theta}(X^{c})$ dir.

13) $F \in \mathcal{J}_1^1(M)$ için, F^{c} : $\begin{pmatrix} F_i^h \circ \pi & 0 \\ \partial F_i^h & F_i^h \circ \pi \end{pmatrix}$

14) $G \in \mathcal{J}_2^0(M)$ için, G^{c} : $\begin{pmatrix} \partial G_{ji} & G_{ji} \circ \pi \\ G_{ji} \circ \pi & 0 \end{pmatrix}$

15) $G^{c}(X^{c}, Y^{c}) = (G(X,Y))^{c}$

16) $H \in \mathcal{J}_0^2(M)$ için, H^{c} : $\begin{pmatrix} 0 & H^{ih} \circ \pi \\ H^{ih} \circ \pi & \partial H^{ih} \end{pmatrix}$

17) $S, T \in \mathcal{J}(M)$ için $(S + T)^{c} = S^{c} + T^{c}$

18) $\tilde{S}, \tilde{T} \in \mathcal{J}_s^r(TM)$ olmak üzere, $X_1, \ldots, X_s \in \mathcal{J}_0^1(M)$ için $\tilde{S}(X_1^c, \ldots, X_s^c) = \tilde{T}(X_1^c, \ldots, X_s^c)$ ise $\tilde{S} = \tilde{T}$ dır (3).

1.3.2.1. TANIM (İzdüşürülebilir (projectable) vektör alanı):

Bir $\tilde{X} \in \mathcal{J}_0^1(TM)$ için eğer $\tilde{X} - X^{c}$ vertical vektör alanı olacak biçimde bir $X \in \mathcal{J}_0^1(M)$ varsa $\tilde{X}$ vektör alanına izdüşürülebilirdir ve X vektör alanına $\tilde{X}$ nın izdüşümü denir, $\pi_{\star}(\tilde{X}) = X$ yazılır (3).

TM üzerinde izdüşürülebilir vektör alanlarının cümlesi ${}^{P}\mathcal{J}_0^1(TM)$ ile gösterilecekdir. Ayrıca aşağıdakilerin her biri izdüşürülebilir vektör alanları için bir karakterizasyondur :

1) $\tilde{X} \in \mathcal{T}_0^1(TM)$ olmak üzere $\forall f \in \mathcal{T}_0^0(M)$ için, $\tilde{X}(f^V) \in \mathcal{T}_0^0(M)$ ise $\tilde{X}$ izdüşürülebilir bir vektör alanıdır.

2) $$\tilde{X} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{X}^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{i=1}^{n} \tilde{X}^{n+i} \frac{\partial}{\partial y^i} \in \mathcal{T}_0^1(TM)$$

olmak üzere $\tilde{X}^i \in \mathcal{T}_0^0(M)$ ise $\tilde{X}$ izdüşürülebilir bir vektör alanıdır.

1.3.3. Horizontal Lift'ler

$\mathcal{T}(M)$ den $\mathcal{T}(TM)$ içine sabit katsayılara göre bir lineer izomorfizm olan horizontal operatörü aşağıdaki özelliklerle karakterize edilir (3) :

H1) $S, T \in \mathcal{T}(M)$ için, $(S \otimes T)^H = S^H \otimes T^V + S^V \otimes T^H$

H2) $f \in \mathcal{T}_0^0(M)$ için, $f^H = 0$

H3) $S \in \mathcal{T}(M)$ için, $S^H = S^C - \nabla_\nu S$

olup, ∇ M manifoldunun lineer bir konneksiyonu ve ayrıca ν operatörü ise,

$$\nu : \mathcal{T}_s^r(M) \to \mathcal{T}_{s-1}^r(TM)$$

$$\nu(S) = \Sigma S_{j_1 \ldots j_s}^{i_1 \ldots i_r} \, y^{j_k} \frac{\partial}{\partial y^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial y^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes \widehat{dx^{j_k}} \otimes \ldots \otimes dx^{j_s}$$

$k \leqslant s$ şeklinde tanımlanır. $\widehat{dx^{j_k}}$ ile tensör çarpımda dx^{j_k} nın olmadığı anlatılmak istenmiştir. Burada $\nabla_\nu S = \nu(\nabla S)$ dir.

1.3.3.1. ÖZELLİKLER :

$f \in \mathcal{T}_0^0(M)$, $X \in \mathcal{T}_0^1(M)$, $\omega \in \mathcal{T}_1^0(M)$ ve $\Gamma_i^h = \sum_{k=1}^{n} y^k \Gamma_{ki}^h$

olmak üzere,

1) $X^H = \sum_{h=1}^{n} (X^h \circ \pi)\frac{\partial}{\partial x^h} + \sum_{h,i=1}^{n} (-\Gamma_i^h X^i) \circ \pi \frac{\partial}{\partial y^h} : \begin{pmatrix} X^h \circ \pi \\ -\sum_{i=1}^{n}(\Gamma_i^h X^i)\circ\pi \end{pmatrix}$

2) $X^H(f^V) = (X(f))^V, \; f^V X^H = (fX)^H$

3) $(\frac{\partial}{\partial x^i})^H = \frac{\partial}{\partial x^i} - \sum_{h=1}^{n} (\Gamma_i^h \circ \pi) \frac{\partial}{\partial y^h}$

4) $(dx^h)^H = dy^h + \sum_{i=1}^{n} (\Gamma_i^h \circ \pi)dx^i = \delta y^h$

5) $\tilde{X} \in \mathfrak{T}_0^1(TM)$ olsun. $\tilde{X}$ horizontal vektör alanıdır. $\Longleftrightarrow$
$\delta y^h(\tilde{X}) = \tilde{X}^{n+h} + \sum_{i=1}^{n} (\Gamma_i^h \circ \pi) \tilde{X}^i = 0$ dır.

6) $\omega^H = \sum_{h,i=1}^{n} (\Gamma_i^h \omega_h) \circ \pi \, dx^i + \sum_{i=1}^{n} (\omega_i \circ \pi)dy^i$

$\boxed{\omega^H} : (\sum_{h=1}^{n} (\Gamma_i^h \omega_h) \circ \pi \quad \omega_i \circ \pi)$

7) $\omega^H(X^V) = (\omega(X))^H, \; \omega^H(X^C) = \omega^C(\nabla_\nu X)$

8) $\omega^H(X^H) = 0$

9) $F \in \mathfrak{T}_1^1(M)$ için, $F^H : \begin{pmatrix} F_i^h \circ \pi & 0 \\ \sum_{t=1}^{n} (-\Gamma_t^h F_i^t + \Gamma_i^t F_t^h) \circ \pi & F_i^h \circ \pi \end{pmatrix}$

10) $G \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ için, $G^H : \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^{n} (\Gamma_j^t G_{ti} + \Gamma_i^t G_{jt})\circ\pi & G_{ji}\circ\pi \\ G_{ji} \circ \pi & 0 \end{pmatrix}$

11) $H \in \mathfrak{T}_0^2(M)$ için, $H^H : \begin{pmatrix} 0 & H^{ji} \circ \pi \\ H^{ji} \circ \pi & \sum_{t=1}^{n}(-\Gamma_t^j H^{ti} - \Gamma_t^i H^{jt})\circ\pi \end{pmatrix}$

12) $S, T \in \mathfrak{T}(M)$ için, $(S + T)^H = S^H + T^H$

13) $S \in \mathfrak{T}_s^0(M)$ veya $\mathfrak{T}_s^1(M)$ ve $X_1, \ldots, X_s \in \mathfrak{T}_0^1(M)$ için,

a) $S^V(X_1^H,\dots,X_s^H) = (S(X_1,\dots,X_s))^H$

b) $S^H(X_1^V,\dots,X_s^V) = 0$

c) $S^H(X_1^H,\dots,X_{t-1}^H, X_t^V, X_{t+1}^H,\dots,X_s^H) = (S(X_1,\dots,X_s))^V$

(burada $t = s, s-1,\dots,1$ dir)

d) $S^H(X_1^H,\dots,X_s^H) = (S(X_1,\dots,X_s))^H$ dir (3).

M manifoldu üzerinde lineer bir konneksiyon ∇ olsun. Bu durumda $\forall X, Y \in \mathcal{T}_0^1(M)$ için

$$\hat{\nabla}_X Y = \nabla_Y X + [X,Y]$$

şeklinde tanımlı $\hat{\nabla}$ da, M üzerinde lineer bir konneksiyondur. $\hat{\nabla}$ nın bileşenleri $\hat{\Gamma}_{ji}^h$ ve ∇ nın bileşenleri Γ_{ji}^h olmak üzere $\hat{\Gamma}_{ji}^h = \Gamma_{ij}^h$ dir. ∇, M de bir simetrik lineer konneksiyon ise $\hat{\nabla}$ ile ∇, M üzerinde aynı lineer konneksiyonlardır.

1.3.3.2. ÖZELLİKLER :

$\forall X,Y \in \mathcal{T}_0^1(M)$ ve $\hat{\nabla}$ nın eğrilik tensör alanı $\hat{R}$ olmak üzere,

a) $[X^V,Y^H] = [X,Y]^V - (\nabla_X Y)^V = -(\hat{\nabla}_Y X)^V$

b) $[X^H,Y^V] = (\nabla_Y X)^V + [X,Y]^V = (\hat{\nabla}_X Y)^V$

c) $[X^H,Y^H] = [X,Y]^H - \nu(\hat{R}(X,Y))$

şeklindedir. Eğer ∇, M üzerinde simetrik, lineer konneksiyon ise,

a') $[X^V,Y^H] = -(\nabla_Y X)^V$

b') $[X^H,Y^V] = (\nabla_X Y)^V$

c') $[X^H, Y^H] = [X,Y]^H - \nu(R(X,Y))$

dir (3).

1.3.3.1. TEOREM :

Herhangi bir $\tilde{X}_z \in T_z(TM)$ tanjant vektörü için

$$\tilde{X}_z \cong X^H_{\pi(z)} + Y^V_{\pi(z)}$$

olacak biçimde tek olarak belirtilmiş $X_{\pi(z)} \in T_{\pi(z)}(M)$, $Y_{\pi(z)} \in T_{\pi(z)}(M)$ tanjant vektörleri vardır.

İSPAT :

$\pi: TM \to M$ olmak üzere, $z \in TM$ için $\pi_{*}|_z : T_z(TM) \to T_{\pi(z)}(M)$ lineer dönüşümünün $H_z(TM)$ ye kısıtlanmışı olan

$$\begin{aligned} \pi_{*z}|_{H_z(TM)} : H_z(TM) &\to T_{\pi(z)}(M) \\ \tilde{A}_z &\to X_{\pi(z)} \end{aligned}$$

ve M manifoldu üzerinde verilen bir ∇ lineer konneksiyonunun konneksiyon dönüşümü $K: TTM \to TM$ olmak üzere, $z \in TM$ için $K_z : T_z(TM) \to T_{\pi(z)}(M)$ lineer dönüşümünün $V_z(TM)$ ye kısıtlanmışı olan

$$\begin{aligned} K_z|_{V_z(TM)} : V_z(TM) &\to T_{\pi(z)}(M) \\ \tilde{B}_z &\to Y_{\pi(z)} \end{aligned}$$

dönüşümleri lineer izomorfizmlerdir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} H_{\pi(z)} : T_{\pi(z)}(M) &\to H_z(TM) \\ X_{\pi(z)} &\to X^H_{\pi(z)} \end{aligned}$$

horizontal lift operatörü ile

$$V_{\pi(z)} : T_{\pi(z)}(M) \to V_z(TM)$$
$$Y_{\pi(z)} \to Y^V_{\pi(z)}$$

vertical lift operatörünün de lineer izomorfizmler olduğu kolayca görülebilir.

Herhangi bir $\tilde{X}_z \in T_z(TM)$ tanjant vektörü için,

$$\tilde{X}_z = h(\tilde{X}_z) + \vartheta(\tilde{X}_z) \tag{1.3.3.1}$$

yazılışı tek türlü olup, $T_z(TM) = H_z(TM) \oplus V_z(TM)$ den dolayı $\tilde{X}_z$ nin horizontal bileşeni $h(\tilde{X}_z) \in H_z(TM)$ ve vertical bileşeni $\vartheta(\tilde{X}_z) \in V_z(TM)$ dir. $h(\tilde{X}_z) = \tilde{A}_z$, $\vartheta(\tilde{X}_z) = \tilde{B}_z$ diyelim. Bu durumda lineer izomorfizmler altında

$$\begin{aligned} \left(H_{\pi(z)} \circ \pi_{*z} \big| H_z(TM)\right)(\tilde{A}_z) &= X^H_{\pi(z)} \\ \left(V_{\pi(z)} \circ K_z \big| V_z(TM)\right)(\tilde{B}_z) &= Y^V_{\pi(z)} \end{aligned} \tag{1.3.3.2}$$

olacak biçimde tek olarak belirtilmiş $X_{\pi(z)}, Y_{\pi(z)} \in T_{\pi(z)}(M)$ tanjant vektörleri vardır. Böylece (1.3.3.1) ve (1.3.3.2) den izomorfik anlamda, herbir $z \in TM$ için

$$\tilde{X}_{\pi(z)} \cong X^H_{\pi(z)} + Y^V_{\pi(z)}$$

yazılabilir.

1.3.3.1. SONUÇ :

TM üzerindeki herhangi bir $\tilde{X}$ vektör alanı için

$$\tilde{X} \cong X^H + Y^V$$

olacak biçimde, M üzerinde X ve Y vektör alanları vardır.

M üzerindeki reel değerli C^{∞} fonksiyonlarının halkası $\mathfrak{J}^0_0(M)$ nin vertical lifti olan halkayı $\bar{\mathfrak{J}}^0_0(TM)$ ve $\mathfrak{J}^1_0(TM)$ de $\bar{\mathfrak{J}}^0_0(TM)$ - modülü $\bar{\mathfrak{J}}^1_0(TM)$ ile gösterelim. Bu durumda herhangi bir $f \in \mathfrak{J}^0_0(M)$ için $f^V \in \bar{\mathfrak{J}}^0_0(TM)$ dir. Bir $X \in \mathfrak{J}^1_0(M)$ vektör alanının lift'leri de $\bar{\mathfrak{J}}^1_0(TM)$ nin elemanlarıdır. Ayrıca izdüşürülebilir vektör alanlarının cümlesi ${}^P\mathfrak{J}^1_0(TM)$ de $\bar{\mathfrak{J}}^0_0(TM)$ - modüldür.

1.3.3.1. UYARI :

Çalışmanın bundan sonraki bölümlerinde, kısalık için,

1) Tekrar edilen alt ve üst indis ya da alt ve üst indisler üzerinden toplam alınacaktır. Örneğin :

$$\left(X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) \equiv \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

şeklinde düşünülecektir.

2) $S \in \mathfrak{J}^r_s(M)$ tensör alanının TM ye liftlerinin bileşenlerinde,

$$\left(S^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}\right)^V = \left(S^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}\right) \circ \pi = S^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}$$

ifadesi kullanılacaktır.

1.4. Adapte Çatı :

1.4.1. TANIM (Adapte çatı) :

n-boyutlu bir C^{∞}-manifold M, bir haritası (U,x^h) ve M üzerinde lineer bir konneksiyon ∇ olmak üzere, M manifoldunun $X_{(i)} = \frac{\partial}{\partial x^i}$ n-tane lokal vektör alanlarının TM ye horizontal ve vertical liftlerinin (x^h, y^h) indirgenmiş koordinatlara göre ifadesi,

$$X^H_{(i)} : \begin{pmatrix} \delta^h_i \\ -\Gamma^h_i \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad X^V_{(i)} : \begin{pmatrix} 0 \\ \delta^h_i \end{pmatrix}$$

dir. Böylece elde edilen 2n-tane lokal vektör alanları TM üzerinde bir baz oluşturmakta olup

$$\{X^H_1, \ldots, X^H_n \, , \, X^V_1, \ldots, X^V_n\}$$

veya kısaca $\{X^H_{(i)}, X^V_{(i)}\}$ sistemine TM (veya $\pi^{-1}(U) = U'$) üzerinde ∇ lineer konneksiyonuna göre adapte çatı denir (3).

Herhangi bir $X \in \mathcal{J}^1_0(M)$ vektör alanının TM ye lift'lerinin adapte çatıya göre bileşenleri,

$$X^V : \begin{pmatrix} 0 \\ X^h \end{pmatrix}, \quad X^C : \begin{pmatrix} X^h \\ y^k \nabla_k X^h \end{pmatrix}, \quad X^H : \begin{pmatrix} X^h \\ 0 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Burada $\nabla_k X^h = \partial_k X^h + \Gamma^h_{kj} X^j$ dir.

1.4.1. TEOREM :

2n-boyutlu C^∞ tanjant manifold TM ve TM nin vektör alanlarının modülünün (x^i, y^i) indirgenmiş koordinatlara göre standart bazı $\{\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y^i}\}$ ve adapte çatısı $\{(\frac{\partial}{\partial x^i})^H, (\frac{\partial}{\partial x^i})^V\}$ olsun. Bu durumda;

1) Bir $\tilde{X}$ vektör alanının adapte çatıya göre ifadesi,

$$\tilde{X} = (h(\tilde{X}))^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^H + (\vartheta(\tilde{X}))^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^V : \begin{pmatrix} (h(\tilde{X}))^i \\ \\ (\vartheta(\tilde{X}))^i \end{pmatrix}$$

olsun. Bu durumda $\tilde{X}$ vektör alanının standart baza göre bileşenleri,

$$\left.\begin{aligned} \tilde{X}^i &= (h(\tilde{X}))^i \\ \tilde{X}^{n+i} &= (\vartheta(\tilde{X}))^i - \Gamma^i_j (h(\tilde{X}))^j \end{aligned}\right\} \quad 1 \leqslant i \leqslant n$$

şeklindedir.

2) Bir $\tilde{X}$ vektör alanının standart baza göre ifadesi,

$$\tilde{X} = \tilde{X}^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \tilde{X}^{n+i} \frac{\partial}{\partial y^i} : \begin{pmatrix} \tilde{X}^i \\ \\ \tilde{X}^{n+i} \end{pmatrix}$$

olsun. Bu durumda $\tilde{X}$ vektör alanının adapte çatıya göre bileşenleri,

$$\begin{aligned} (h(\tilde{X}))^i &= \tilde{X}^i \\ (\vartheta(\tilde{X}))^i &= \tilde{X}^{n+i} + \Gamma^i_j \tilde{X}^j \end{aligned}$$

şeklindedir.

İSPAT :

1) Bir $\tilde{X}$ vektör alanının vertical bileşeni

$\vartheta(\tilde{X}) = (\vartheta(\tilde{X}))^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^V = (\vartheta(\tilde{X}))^i \frac{\partial}{\partial y^i}$ ve horizontal bileşeni,

$$h(\tilde{X}) = (h(\tilde{X}))^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} - \Gamma^j_i \frac{\partial}{\partial y^j}\right) = (h(\tilde{X}))^i \frac{\partial}{\partial x^i} - \Gamma^j_i (h(\tilde{X}))^i \frac{\partial}{\partial y^j}$$

olduğundan,

$$\tilde{X} = (h(\tilde{X}))^i \frac{\partial}{\partial x^i} + [(\vartheta(\tilde{X}))^i - \Gamma^i_j (h(\tilde{X}))^j] \frac{\partial}{\partial y^i}$$

dır. $\tilde{X}$ vektör alanının standart baza göre ifadesi,

$$\tilde{X} = \tilde{X}^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \tilde{X}^{n+i} \frac{\partial}{\partial y^i}$$

olmak üzere,

$$[\tilde{X}^i - (h(X))^i] \frac{\partial}{\partial x^i} + [\tilde{X}^{n+i} - (\vartheta(\tilde{X}))^i + \Gamma^i_j (h(\tilde{X}))^j] \frac{\partial}{\partial y^i} = 0$$

dır. Bu durumda,

$$\tilde{X}^i = (h(\tilde{X}))^i$$

$$\tilde{X}^{n+i} = (\vartheta(\tilde{X}))^i - \Gamma^i_j (h(\tilde{X}))^j$$

dır.

2) Bir $\tilde{X}$ vektör alanı standart baza göre verilsin.

$$dx^i(\tilde{X}) = dx^i\left(\tilde{X}^j \frac{\partial}{\partial x^j} + \tilde{X}^{n+j} \frac{\partial}{\partial y^j}\right) = \tilde{X}^j \delta^i_j = \tilde{X}^i$$

ve

$$dx^i(\tilde{X}) = dx^i(h(\tilde{X}) + \vartheta(\tilde{X})) = dx^i(h(\tilde{X})) = (h(\tilde{X}))^i$$

ifadelerinden $(h(\tilde{X}))^i = \tilde{X}^i$ bulunur.

$$\delta y^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = dy^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) + \Gamma^i_k dx^k\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \Gamma^i_j$$

ve

$$\delta y^i\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) = dy^i\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) + \Gamma^i_k dx^k\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) = \delta^i_j$$

eşitliklerinden yararlanarak,

$$\delta y^i(\tilde{X}) = \Gamma^i_j \tilde{X}^j + \tilde{X}^{n+j}$$

ve

$$\delta y^i(\tilde{X}) = \delta y^i(h(\tilde{X}) + \vartheta(\tilde{X})) = dy^i(\vartheta(\tilde{X})) = (\vartheta(\tilde{X}))^i$$

bulunur. O halde, $(\vartheta(\tilde{X}))^i = \tilde{X}^{n+j} + \Gamma^i_j \tilde{X}^j$ dir.

1.4.2. TEOREM :

M üzerinde bir ∇ lineer konneksiyonuna göre, U' de bir adapte çatı $\{X^H_{(i)}, X^V_{(i)}\}$ olsun. Bu durumda $\{X^H_{(i)}, X^V_{(i)}\}$ adapte çatının duali $\{(dx^{(i)})^V, (dx^{(i)})^H\}$ dir (3).

M üzerinde temel bazı tensör alanlarının TM ye lift'lerinin adapte çatıya göre bileşenlerini verelim.

1. $\omega \in \mathcal{T}^0_1(M)$ için, $\omega^V: (\omega_i \;\; 0)$, $\omega^C: (y^k\nabla_k\omega_i \;\; \omega_i)$ $\omega^H: (0 \;\; \omega_i)$ dir. Burada $\nabla_k\omega_i = \partial_k\omega_i - \Gamma^j_{ki}\omega_j$ dir.

2. $F \in \mathcal{T}^1_1(M)$ için,

$$F^V: \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F^h_i & 0 \end{pmatrix}, \quad F^C: \begin{pmatrix} F^h_i & 0 \\ y^k\nabla_k F^h_i & F^h_i \end{pmatrix}, \quad F^H: \begin{pmatrix} F^h_i & 0 \\ 0 & F^h_i \end{pmatrix}$$

dir.

3. $G \in \mathcal{T}^0_2(M)$ için,

$$G^V: \begin{pmatrix} G_{ji} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G^C: \begin{pmatrix} y^k\nabla_k G_{ji} & G_{ji} \\ G_{ji} & 0 \end{pmatrix}, \quad G^H: \begin{pmatrix} 0 & G_{ji} \\ G_{ji} & 0 \end{pmatrix}$$

dir.

4. $H \in \mathcal{T}^2_0(M)$ için,

$$H^V: \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & H^{ji} \end{pmatrix}, \quad H^C: \begin{pmatrix} 0 & H^{ji} \\ H^{ji} & y^k\nabla_k H^{ji} \end{pmatrix}, \quad H^H: \begin{pmatrix} 0 & H^{ji} \\ H^{ji} & 0 \end{pmatrix}$$

dir.

1.5. Manifold Üzerinde Metrik Kavramı :

1.5.1. TANIM (Yarı-Riemann Metriği ve Yarı-Riemann Manifoldu) :

Diferensiyellenebilir bir manifold M olsun. Bir

$g: \mathcal{T}_0^1(M) \times \mathcal{T}_0^1(M) \xrightarrow{C^\infty} \mathcal{T}_0^0(M)$ dönüşümü,

(i) 2-lineer (bilineer),

(ii) Simetrik,

(iii) Dejenere olmayan (nondegenerate),

ise g ye M üzerinde bir yarı-Riemann metriği (veya metrik tensör) ve (M,g) ikilisine de bir yarı Riemann manifoldu denir (4).

(i) şartından g nin bir (0,2)-tensör alanı olduğu, (ii) şartından g ye karşılık gelen matris (g_{ji}) ise, (g_{ji}) nin simetrik yani her i,j için $g_{ji} = g_{ij}$ olduğunu, (iii) şartındanda sabit tutulmuş bir $X \in \mathcal{T}_0^1(M)$ ve her $Y \in \mathcal{T}_0^1(M)$ için $g(X,Y) = 0$ ise $X = 0$ olması gerektiğini anlıyoruz. Ayrıca simetrik $g \in \mathcal{T}_2^0(M)$ tensör alanının (iii) şartını sağlaması ile (g_{ji}) matrisinin regüler olması, yani $\det(g_{ji}) \neq 0$ olması denktir.

1.5.2. TANIM (Riemann Metriği ve Riemann Manifoldu) :

Diferensiyellenebilir bir manifold M olsun. Bir

$g: \mathcal{T}_0^1(M) \times \mathcal{T}_0^1(M) \xrightarrow{C^\infty} \mathcal{T}_0^0(M)$ dönüşümü,

(i) 2-lineer,

(ii) Simetrik,

(iii) Pozitif tanımlı;

ise g ye M üzerinde bir Riemann metriği ve (M,g) ikilisi de bir Riemann manifoldu denir (4).

(iii) şartından, sıfırdan farklı her $X \in \mathcal{T}_0^1(M)$ için $g(X,X) > 0$ olduğu anlaşılmaktadır.

1.5.1. SONUÇ :

(M,g) ikilisi bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda;

1) g dejenere değildir.

2) g pozitif yarı-tanımlıdır; yani her $X \in \mathcal{T}_0^1(M)$ için $g(X,X) \geq 0$ dır.

3) g ye karşılık gelen matris (g_{ji}) olmak üzere $\det(g_{ji}) > 0$ dır.

4) M nin bir haritası (U,x^h), $1 \leq h \leq n$, olmak üzere $g = g_{ji}\, dx^j \otimes dx^i$ şeklinde yazılabilir ve burada $g_{ji} = g(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^i})$, $g_{ji} = g_{ij}$ dir.

5) Her bir $p \in M$ için, g metriği $T_p(M)$ tanjant uzayı üzerinde, $g_p : T_p(M) \times T_p(M) \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$, $g_p(X_p,Y_p) = (g(X,Y))|_p$ şeklinde bir iç çarpım fonksiyonu tanımlar. Böylece $X_p:(a^j)$, $Y_p:(b^i)$ tanjant vektörleri için $g_p(X_p,Y_p) = g_{ji}a^j b^i$ dir.

6) $q: \mathcal{T}_0^1(M) \to \mathcal{T}_0^0(M)$, $q(X) = g(X,X)$; şeklinde tanımla q dönüşümü, g simetrik bilineer formuna karşılık gelen kuadratik form'dur. $f \in \mathcal{T}_0^0(M)$ için, $q(fX) = f^2 q(X) \neq fq(X)$ olduğundan q bir tensör değildir. q ya M manifoldunun çizgi element'i denir ve klasikde ds^2 ile gösterilir. $q = g_{ji}\, dx^j dx^i$ yazılabilmekte olup, burada dx^j ile dx^i

arasındaki işlem fonksiyonların çarpım işlemidir. Ayrıca manifoldun çizgi element'i verildiğinde, $\forall X, Y \in \mathcal{T}_0^1(M)$ için $g(X,Y) = \frac{1}{2}[q(X+Y) - q(X) - q(Y)]$ polarizasyon özdeşliği ile M üzerinde g metrik tensörü elde edilir.

7) $g = g_{ji} dx^j \otimes dx^i = g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j = g_{ji} dx^i \otimes dx^j$

dır.

1.6. Manifold Üzerinde Konneksiyon Kavramı

1.6.1. TANIM (Lineer konneksiyon) :

Bir C^∞ manifold M ve bir $\nabla : \mathcal{T}_0^1(M) \times \mathcal{T}_0^1(M) \to \mathcal{T}_0^1(M)$ dönüşümü verilsin. Eğer her $X, Y, Z \in \mathcal{T}_0^1(M)$ ve $\forall f \in \mathcal{T}_0^0(M)$ için,

(K_1) $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$

(K_2) $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$

(K_3) $\nabla_X (fY) = X(f) Y + f \nabla_X Y$

(K_4) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

ise, ∇ ya M üzerinde bir lineer konneksiyon denir (4).

M nin bir haritası (U, x^h) olsun. Bu durumda

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} = \Gamma_{ji}^h \frac{\partial}{\partial x^h}$$

yazılabilir ve burada Γ_{ji}^h ler ∇ nın (x^h) koordinat sistemine göre bileşenleri (Christoffel sembolleri) dir. Eğer Γ_{ji}^h ler diferensiyellenebilir ise ∇ lineer konneksiyonu diferensiyellenebilirdir. Bu çalışmada konneksiyonlar diferensiyellenebilir, yani $\Gamma_{ji}^h \in \mathcal{T}_0^0(M)$ alınacaktır.

1.6.2. TANIM (Metrik konneksiyon) :

(M,g) bir Riemann manifoldu ve

$$\nabla : \mathcal{T}^1_0(M) \times \mathcal{T}^1_0(M) \to \mathcal{T}^1_0(M)$$

M üzerinde lineer bir konneksiyon olsun. Eğer,

(K_5) $\nabla g \equiv 0$ veya her $X \in \mathcal{T}^1_0(M)$ için $\nabla_X g \equiv 0$

ise ∇ ya M üzerinde bir metrik konneksiyon denir (4).

Yukarıdaki tanımda $\forall X,Y,Z \in \mathcal{T}^1_0(M)$ için g nin X e göre kovaryant (tensör) türevi

$$(\nabla_X g)(Y,Z) = X(g(Y,Z)) - g(\nabla_X Y,Z) - g(Y,\nabla_X Z)$$

olduğundan,

$$X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y,Z) + g(Y,\nabla_X Z)$$

ifadesi (K_5) şartına denktir.

1.6.3. TANIM (Torsiyon tensörü) :

Diferensiyellenebilir bir manifold M ve M üzerinde lineer bir konneksiyon ∇ olsun.

$$T : \mathcal{T}^1_0(M) \times \mathcal{T}^1_0(M) \xrightarrow{\text{2-lineer}} \mathcal{T}^1_0(M)$$

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

şeklinde tanımlanan vektör değerli tensöre M üzerinde tanımlı ∇ lineer konneksiyonunun torsiyon tensörü denir (4).

Burada $[X,Y]$ Lie çarpımı, $\forall f \in \mathcal{T}^0_0(M)$ için,

$$[X,Y](f) = X(Yf) - Y(Xf)$$

şeklinde tanımlıdır.

M üzerinde bir ∇ lineer konneksiyonunun torsiyon tensörü T olsun. T nin $\mathcal{T}_0^0(M)$ - bilineer olduğu tanımından açıktır. Ayrıca $\mathcal{T}_0^1(M) \times \mathcal{T}_0^1(M)$ den $\mathcal{T}_0^1(M)$ ye 2-lineer dönüşümlerin uzayı $L^2(\mathcal{T}_0^1(M), \mathcal{T}_0^1(M); \mathcal{T}_0^1(M))$ ile $\mathcal{T}_2^1(M)$ izomorf olduklarından, T vektör değerli tensörünü

$$T : \mathcal{T}_1^0(M) \times \mathcal{T}_0^1(M) \times \mathcal{T}_0^1(M) \to \mathcal{T}_0^0(M)$$

şeklinde M üzerinde (1,2) - tipinden bir tensör alanı olarak da düşünebiliriz. Böylece

$$T = T_{ji}^h \frac{\partial}{\partial x^h} \otimes dx^j \otimes dx^i$$

yazılabilir. Buradan $T(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^i}) = T_{ji}^h \frac{\partial}{\partial x^h}$ olup, T nin T_{ji}^h bileşenleri ile ∇ nın Γ_{ji}^h bileşenleri arasında $T_{ji}^h = \Gamma_{ji}^h - \Gamma_{ij}^h$ bağıntısı vardır. Ayrıca T antisimetrik yani $T(X,Y) = - T(Y,X)$ dir. $T(X,Y)$ ye, $\mathcal{T}_0^1(M)$ de X ve Y ile belirtilen torsiyon ötelemesi (translation) denir.

1.6.4. TANIM (Simetrik konneksiyon) :

Diferensiyellenebilir bir manifold M ve M üzerinde bir ∇ lineer konneksiyonun torsiyon tensörü T olsun. $T \equiv 0$ ise ∇ lineer konneksiyonuna simetrikdir denir. Bazen simetrik yerine sıfır torsiyonlu ya da torsiyonsuz ifadeler de kullanılır (4).

M üzerinde simetrik bir ∇ lineer konneksiyonunun bileşenleri olan $\Gamma_{ji}^h \in \mathcal{T}_0^0(M)$ fonksiyonları simetrik, yani $\Gamma_{ji}^h = \Gamma_{ij}^h$ dir. Böylece M üzerinde (x^h) lokal koordinat sistemi için,

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

olur.

1.6.5. TANIM (Riemann konneksiyonu) :

(M,g) bir Riemann manifoldu ve

$$\nabla : \mathcal{T}_0^1(M) \times \mathcal{T}_0^1(M) \rightarrow \mathcal{T}_0^1(M)$$

M üzerinde bir metrik konneksiyon olsun. Eğer,

(K_6) ∇ simetrik

ise, ∇ ya M üzerinde Riemann konneksiyonu (veya Levi-Civita konneksiyonu) denir (4).

1.6.1. TEOREM :

Bir Riemann manifoldu üzerinde Riemann konneksiyonu tekdir (4).

1.6.6. TANIM (Eğrilik tensör alanı) :

M üzerinde lineer bir konneksiyon ∇ olsun.

$$R : \mathcal{T}_0^1(M) \times \mathcal{T}_0^1(M) \rightarrow L(\mathcal{T}_0^1(M), \mathcal{T}_0^1(M))$$

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z = R(X,Y,Z) &= [\nabla_X, \nabla_Y] Z - \nabla_{[X,Y]} Z \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan vektör değerli tensöre ∇ lineer konneksiyonunun eğrilik tensör alanı denir (4).

1.6.1. UYARI :

∇,M üzerinde Riemann konneksiyonu ise R ye ∇ Riemann konneksiyonunun Riemann eğrilik tensör alanı denir.

M üzerinde ∇ lineer konneksiyonunun eğrilik tensör alanı R olsun. Lokal koordinatlara göre $R = R^h_{kji} \frac{\partial}{\partial x^h} \otimes dx^k \otimes dx^j \otimes dx^i$ yazılabilir. Böylece R, M üzerinde (1,3) - tipinden bir tensör alanıdır. Buradan,

$$R(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^i}) \frac{\partial}{\partial x^k} = R^h_{kji} \frac{\partial}{\partial x^h}$$

olup, R nin R^h_{kji} bileşenleri ile ∇ nın Γ^h_{ji} bileşenleri arasında,

$$R^h_{kji} = \partial_j \Gamma^h_{ik} - \partial_i \Gamma^h_{jk} + \Gamma^h_{j\ell}\Gamma^\ell_{ik} - \Gamma^h_{i\ell}\Gamma^\ell_{jk}$$

bağıntısı vardır. Ayrıca $\forall X,Y \in \mathcal{T}^1_0(M)$ için $R(X,Y)=-R(Y,X)$ yani $R^h_{kji} = R^h_{kij}$ dir. $\mathcal{T}^1_0(M)$ nin bir endomorfizmi olan R(X,Y) ye, X ve Y ile belirtilen $\mathcal{T}^1_0(M)$ nin eğrilik transformasyonu veya eğrilik operatörü denir.

Eğer ∇ simetrik lineer bir konneksiyon ise, bu durumda

$$\sigma(R(X,Y)Z) = R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$$

yani,

$$R^h_{kji} + R^h_{jik} + R^h_{ikj} = 0$$

dir. Bir başka ifade ile,

$$\sigma(R(X,Y)Z) = \sigma\{(\nabla_X T)(Y,Z)\} + \sigma\{T(T(X,Y),Z)\} = 0$$

olup, burada

$$(\nabla_X T)(Y,Z) = \nabla_X(T(Y,Z)) - T(\nabla_X Y,Z) - T(Y, \nabla_X Z)$$

dır. Ayrıca $\sigma((\nabla_X R)(Y,Z)) = 0$ eşitliği $\forall X,Y,Z \in \mathfrak{T}_0^1(M)$ için yazılabilir.

1.6.2. TEOREM :

M bir C^∞-manifold ve ∇ ile ∇' de M üzerinde farklı iki konneksiyon olsun. Bu durumda,

$$B : \mathfrak{T}_0^1(M) \times \mathfrak{T}_0^1(M) \to \mathfrak{T}_0^1(M)$$

$$B(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla'_X Y$$

şeklinde tanımlı B dönüşümü $\mathfrak{T}_0^1(M)$ değerli 2-kovaryant tensördür (1).

1.6.3. TEOREM :

M bir C^∞-manifold, ∇ M üzerinde herhangi bir, lineer konneksiyon ve

$$\nabla' : \mathfrak{T}_0^1(M) \times \mathfrak{T}_0^1(M) \to \mathfrak{T}_0^1(M)$$

bir dönüşüm olsun. Bu durumda,

$$(\nabla - \nabla') \in \mathfrak{T}_2^1(M) \equiv L^2(\mathfrak{T}_0^1(M), \mathfrak{T}_0^1(M); \mathfrak{T}_0^1(M))$$

ise ∇', M üzerinde bir lineer konneksiyondur (1).

1.7. Manifold Üzerinde Bir Eğrinin Eğrilikleri:

n-boyutlu bir Riemann manifoldu (M,g), M üzerinde bir Riemann konneksiyonu ∇, Riemann metriği

$g = g_{ji} dx^j \otimes dx^i$ ve M nin bir haritası (U, x^h) olsun. M üzerinde yay parametresi s olan bir $\alpha : I \subseteq R \to M$

$$\alpha(s) = (\alpha^1(s), \ldots, \alpha^n(s)) = ((x^1 o\, \alpha)(s), \ldots, (x^n o\, \alpha)(s))$$

eğrisini gözönüne alalım. α nın birim teğet vektör alanı $T = \dot{\alpha}(s) = \frac{d\alpha^i}{ds} \frac{\partial}{\partial x^i}$ dir.

α boyunca T nin türetilmiş vektör alanı

$$\nabla_T T = \{\frac{d^2\alpha^h}{ds^2} + \Gamma^h_{ji} \frac{d\alpha^j}{ds} \frac{d\alpha^i}{ds}\} \frac{\partial}{\partial x^h}$$

T ye dik olduğundan $\nabla_T T = k_1 V_1$ dır. Burada V_1, T ye dik ($\nabla_T T$ nin doğrultusunda) bir birim vektör alanıdır.

α boyunca V_1 in türetilmiş vektör alanı birisi T ve V_1 cinsinden diğeride T ve V_1 'e dik iki bileşene ayrılırsa

$$\nabla_T V_1 = (\nabla_T V_1)_1 + (\nabla_T V_1)_2$$

şeklinde yazılabilir. Böylece $(\nabla_T V_1)_2 = k_2 V_2$ ve

$$\nabla_T V_1 = -k_1 T + k_2 V_2$$

elde edilir, burada V_2, V_1 e dik bir birim vektör alanıdır.

α boyunca V_2 nin türetilmiş vektör alanı $\nabla_T V_2$ yi birisi T, V_1 ve V_2 cinsinden diğeride bunlara dik iki bileşene ayrılırsa

$$\nabla_T V_2 = (\nabla_T V_2)_1 + (\nabla_T V_2)_2$$

şeklinde yazılabilir. Böylece,

$$(\nabla_T V_2)_2 = k_3 V_3$$

$$\nabla_T V_2 = -k_2 V_1 + k_3 V_3$$

elde edilir; burada V_3, V_2 e dik bir birim vektör alanıdır.

Bu düşünceye devam edilirse, k_i $(1 \leq i \leq n-1)$ lerden hiçbiri sıfır olmamak üzere $T = V_0, V_1, \ldots, V_{n-1}$ şeklinde n-tane ortonormal vektör alanı elde edilir. Bunun için α boyunca V_i nin türetilmiş vektör alanı $\nabla_T V_i$, birisi $T, V_1, \ldots, V_i$ cinsinden diğeride bunlara dik iki bileşene ayrılırsa,

$$\nabla_T V_i = (\nabla_T V_i)_1 + (\nabla_T V_i)_2$$

şeklinde yazılabilir. Böylece

$$(\nabla_T V_i)_2 = k_{i+1} V_{i+1}$$

$$\nabla_T V_i = -k_i V_{i-1} + k_{i+1} V_{i+1}, \quad k_0 = k_n = 0, \quad 0 \leq i \leq n-1$$

elde edilir; burada V_{i+1}, V_i lere dik bir birim vektör alanıdır.

Bu şekilde elde edilen ortonormal

$$\{T = V_0, V_1, \ldots, V_{n-1}\}$$

sistemine α eğrisinin Frenet çatısı ve k_i ye de α nın i-inci eğriliği denir.

BÖLÜM 2

TANJANT MANİFOLD ÜZERİNDE METRİKLER

n- boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold M, M üzerinde lineer bir konneksiyon ∇ ve M üzerinde bir Riemann metriği $g = g_{ji}dx^j \otimes dx^i$: (g_{ji}) olsun. Bu durumda TM üzerinde tanımlanabilen başlıca metrikler ve (x^h, y^h) indirgenmiş koordinatlardaki ifadeleri şunlardır :

1) $$g^H = (\Gamma_j^h g_{hi} + \Gamma_i^h g_{jh})dx^j \otimes dx^i + g_{ji}dx^j \otimes dy^i + g_{ji}dy^j \otimes dx^i$$

ve matris gösterimi

$$g^H: \begin{pmatrix} \Gamma_j^h g_{hi} + \Gamma_i^h g_{jh} & g_{ji} \\ g_{ji} & 0 \end{pmatrix}$$

olmak üzere g^H ya g nin TM ye horizontal lifti denir (3); burada

$$\Gamma_j^h = y^k \Gamma_{kj}^h \ , \ \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{kj}^h \frac{\partial}{\partial x^h}$$

olup, g^H bir pseudo-Riemann metriğidir.

2) $$g^C = \partial g_{ji}dx^j \otimes dx^i + g_{ji}dx^j \otimes dy^i + g_{ji}dy^j \otimes dx^i$$

ve matris gösterimi

$$g^C : \begin{pmatrix} \partial g_{ji} & g_{ji} \\ g_{ji} & 0 \end{pmatrix}$$

olmak üzere g^C ye g nin TM ye complete lifti denir (3); burada $\partial g_{ji} = y^k(\partial_k g_{ji})$, $\partial_k g_{ji} = \dfrac{\partial g_{ji}}{\partial x^k}$ olup, g^C bir pseudo-Riemann metriğidir.

3) $g^V = g_{ji} dx^j \otimes dx^i$: $\begin{pmatrix} g_{ji} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

olmak üzere g^V ye, g nin TM ye vertical lifti denir (3). g^V TM üzerinde yalnızca bir simetrik bilineer formdur.

4) $g^D = (g_{ji} + g_{hk}\Gamma^h_j\Gamma^k_i)dx^j \otimes dx^i + \Gamma^k_j g_{ki} dx^j \otimes dy^i$

$$+ \Gamma^k_i g_{jk} dy^j \otimes dx^i + g_{ji} dy^j \otimes dy^i ,$$

$$g^D : \begin{pmatrix} g_{ji} + g_{hk}\Gamma^h_j\Gamma^k_i & \Gamma^k_j g_{ki} \\ \Gamma^k_i g_{jk} & g_{ji} \end{pmatrix}$$

olmak üzere g^D ye g nin TM ye diagonal lifti (Sasaki lifti, indirgenmiş metrik veya Sasaki anlamında metrik) denir (5). g^D bir Riemann metriğidir.

Eğer M üzerinde g metriğinin bir pseudo-Riemann metriği olması halinde de g^D yine TM de bir Riemann metriğidir.

5) g nin TM ye vertical ve complete liftlerinin toplamı, TM tanjant manifoldu üzerinde,

$$g^V + g^C = g^{VC} = (g_{ji} + \partial g_{ji})dx^j \otimes dx^i + g_{ji} dx^j \otimes dy^i$$
$$+ g_{ji} dy^j \otimes dx^i$$

$$g^{vc} : \begin{pmatrix} g_{ji} + \partial g_{ji} & g_{ji} \\ g_{ji} & 0 \end{pmatrix}$$

olup, g^{vc} bir pseudo-Riemann metriğidir (3).

6) g nin TM ye vertical ve horizantal liftlerinin toplamı, TM tanjant manifoldu üzerinde,

$$g^V + g^H = g^{vH} = (g_{ji} + \Gamma^h_j g_{hi} + \Gamma^h_i g_{jh}) dx^j \otimes dx^i$$

$$+ g_{ji} dx^j \otimes dy^i + g_{ji} dy^j \otimes dx^i$$

$$g^{vH} : \begin{pmatrix} g_{ji} + \Gamma^h_j g_{hi} + \Gamma^h_i g_{jh} & g_{ji} \\ g_{ji} & 0 \end{pmatrix}$$

metriğini tanımlar. g^{vH} bir pseudo-Riemann metriğidir (3).

7) $\bar{g} = (\Gamma^h_i g_{jh} + \Gamma^h_j g_{hi} + \Gamma^h_j \Gamma^\ell_i g_{h\ell}) dx^j \otimes dx^i$

$$+ (g_{ji} + \Gamma^h_j g_{hi}) dx^j \otimes dy^i + (g_{ji} + \Gamma^\ell_i g_{j\ell}) dy^j \otimes dx^i$$

$$+ g_{ji} dy^j \otimes dy^i : \begin{pmatrix} \Gamma^h_i g_{jh} + \Gamma^h_j g_{hi} + \Gamma^h_j \Gamma^\ell_i g_{h\ell} & g_{ji} + \Gamma^h_j g_{hi} \\ g_{ji} + \Gamma^\ell_i g_{j\ell} & g_{ji} \end{pmatrix}$$

de, TM üzerinde bir pseudo-Riemann metriğidir (3).

8) TM üzerinde,

$$g' = g_{h\ell} \Gamma^h_j \Gamma^\ell_i dx^j \otimes dx^i + g_{hi} \Gamma^h_j dx^j \otimes dy^i$$

$$+ g_{jh} \Gamma^h_i dy^j \otimes dx^i + g_{ji} dy^j \otimes dy^i$$

$$g' : \begin{pmatrix} g_{h\ell}\Gamma_j^h\Gamma_i^\ell & g_{hi}\Gamma_j^h \\ g_{jh}\Gamma_i^h & g_{ji} \end{pmatrix}$$

eşitliğiyle tanımlı g' yalnızca simetrik bir bilineer formdur (3).

2.1. UYARI :

i) Buradaki söz konusu TM üzerindeki bütün metriklerde $g_{ji} = g_{ji} \circ \pi$ ve $\Gamma_{ji}^h = \Gamma_{ji}^h \circ \pi$ dir.

ii) $\mathcal{T}_0^1(TM)$ nin standart bazı $\{ \frac{\partial}{\partial v^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial v^{2n}} \}$ olmak üzere, genelde TM üzerinde bir metrik $1 \leq A,B \leq 2n$ için $G_{BA} dv^B \otimes dv^A$ şeklindedir.

iii) g^V ve g' nin her ikiside dejenere olduklarından TM üzerinde birer metrik oluşturmazlar. Her ikisi de birer simetrik bilineer formdur.

iv) Eğer ∇ lineer konneksiyonu M üzerinde bir metrik konneksiyon (yani $\nabla g = 0$) ise, bu durumda g nin ∇ ya göre kovaryant türevi olan

$$\nabla g = (\nabla_k g_{ji}) dx^j \otimes dx^i \otimes dx^k$$

tensörünün $\nabla_k g_{ji} = \partial_k g_{ji} - \Gamma_{kj}^h g_{hi} - \Gamma_{ki}^h g_{jh}$ bileşenleri her k,j,i için sıfır olacağından, $\partial_k g_{ji} = \Gamma_{kj}^h g_{hi} + \Gamma_{ki}^h g_{jh}$ yazılabilir. Böylece $g^H = g^C$ elde edilir. (Genelde, yani ∇ nın lineer bir konneksiyon olma durumunda, $g^H = g^C - \nabla_\gamma g$ olduğuna dikkat ediniz.)

v) g^D pseudo-Riemann metriği, $\forall \tilde{X},\tilde{Y} \in \mathcal{T}_0^1(TM)$ için,

$$g^D(\tilde{X},\tilde{Y}) = g(\pi_*(\tilde{X}),\pi_*(\tilde{Y})) + g(K(\tilde{X}),K(\tilde{Y}))$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada π tanjant demetinin projeksiyon dönüşümü ve K, ∇ lineer konneksiyonunun konneksiyon dönüşümüdür.

Şimdi bu metriklerin adapte çatıya göre ifadelerini verelim. (Burada da ∇,M üzerinde lineer bir konneksiyon olarak alınmaktadır.)

1') $g^H = g_{ji}dx^j \otimes \delta y^i + g_{ji}\delta y^j \otimes dx^i : \begin{pmatrix} 0 & g_{ji} \\ g_{ji} & 0 \end{pmatrix}$

2') $g^C = (y^k\nabla_k g_{ji})dx^j \otimes dx^i + g_{ji}dx^j \otimes \delta y^i$

$+ g_{ji}\delta y^j \otimes dx^i : \begin{pmatrix} y^k\nabla_k g_{ji} & g_{ji} \\ g_{ji} & 0 \end{pmatrix}$

3') $g^V = g_{ji}dx^j \otimes dx^i : \begin{pmatrix} g_{ji} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

4') $g^D = g_{ji}dx^j \otimes dx^i + g_{ji}\delta y^j \otimes \delta y^i : \begin{pmatrix} g_{ji} & 0 \\ 0 & g_{ji} \end{pmatrix}$

5') $g^{VC} = (g_{ji} + y^k\nabla_k g_{ji})dx^j \otimes dx^i + g_{ji}dx^j \otimes \delta y^i$

$+ g_{ji}\delta y^j \otimes dx^i : \begin{pmatrix} g_{ji} + y^k\nabla_k g_{ji} & g_{ji} \\ g_{ji} & 0 \end{pmatrix}$

Eğer ∇ metrik konneksiyon ise g^{VC} ile g^{VH} çakışır.

6') $g^{VH} = g_{ji}dx^j \otimes dx^i + g_{ji}dx^j \otimes \delta y^i$

$$+ g_{ji}\delta y^i \otimes dx^i : \begin{pmatrix} g_{ji} & g_{ji} \\ g_{ji} & 0 \end{pmatrix}$$

7') $\bar{g} = g_{ji}dx^j \otimes \delta y^i + g_{ji}\delta y^j \otimes dx^i$

$$+ \quad g_{ji}\delta y^j \otimes \delta y^i : \begin{pmatrix} 0 & g_{ji} \\ g_{ji} & g_{ji} \end{pmatrix}$$

Eğer ∇ metrik konneksiyon ise $\bar{g} = g^C + g'$ dir.

8') $g' = g_{ji}\delta y^j \otimes \delta y^i$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g_{ji} \end{pmatrix}$

şeklindedir.

M üzerinde bir Riemann metriğinin TM ye diagonal liftinin TM üzerinde bir Riemann metriği olduğunu, ispat tekniğini vermek amacı ile gösterelim.

2.1. TEOREM :

M üzerinde bir g Riemann metriğinin TM ye diagonal lifti g^D, TM üzerinde bir Riemann metriğidir.

İSPAT :

i) g^D nin adapte çatıya göre ifadesini ve dx^i, δy^i lerin $\mathfrak{J}_0^0(TM)$-lineer olduğunu gözönüne alırsak,

$\forall \tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z} \in \mathfrak{J}_0^1(TM)$ ve $\forall \tilde{f} \in \mathfrak{J}_0^0(TM)$ için,

$$g^D(\tilde{f}(\tilde{X} + \tilde{Y}), \tilde{Z}) = (g_{ji}dx^j \otimes dx^i + g_{ji}\delta y^j \otimes \delta y^i)(\tilde{f}(\tilde{X} + \tilde{Y}), \tilde{Z})$$

$$= g_{ji}dx^j(\tilde{f}(\tilde{X}+\tilde{Y})dx^i(\tilde{Z}) + g_{ji}\delta y^j(\tilde{f}(\tilde{X}+\tilde{Y}))\delta y^i(\tilde{Z})$$

$$= \tilde{f}(g_{ji}dx^j \otimes dx^i + g_{ji}\delta y^j \otimes \delta y^i)(\tilde{X},\tilde{Z})$$

$$+ \tilde{f}(g_{ji}dx^j \otimes dx^i + g_{ji}\delta y^j \otimes \delta y^i)(\tilde{Y},\tilde{Z})$$

$$= \tilde{f}g^D(\tilde{X},\tilde{Z}) + \tilde{f}\, g^D(\tilde{Y},\tilde{Z})$$

dir. Böylece g^D 1-inci bileşene göre lineerdir. g^D nin 2-inci bileşene göre lineerliğini göstermeye gerek yoktur. Çünkü g^D nin simetrik olduğu gösterildiği zaman g^D nin 2-inci bileşene göre de lineer olduğu ortaya çıkar.

ii) g^D simetriktir. Çünkü $\forall\tilde{X},\tilde{Y} \in \mathcal{J}_0^1(TM)$ için,

$$g^D(\tilde{X},\tilde{Y}) = g_{ij}dx^i(\tilde{X})dx^j(\tilde{Y}) + g_{ij}\delta y^i(\tilde{X})\delta y^j(\tilde{Y})$$

$$= g_{ij}dx^j(\tilde{Y})dx^i(\tilde{X}) + g_{ij}\delta y^j(\tilde{Y})\delta y^i(\tilde{X})$$

$$= g^D(\tilde{Y},\tilde{X})$$

dir.

iii) g^D nin pozitif tanımlı olduğunu göstermek için olmayana ergi yöntemini kullanalım.

g^D pozitif tanımlı olmasın. Yani en az bir $\tilde{X}$ vektör alanı için, $g^D(\tilde{X},\tilde{X}) \not> 0$ olsun. O zaman $g^D(\tilde{X},\tilde{X}) \leq 0$ yani g^D negatif yarı tanımlı olur. Bir negatif yarı tanımlı metrik için $\det(g^D_{BA}) \leq 0$ dır. Oysa g^D ye adapte çatıya göre karşılık gelen matris,

$$(g^D_{BA}) : \begin{pmatrix} g_{ji} & 0 \\ 0 & g_{ji} \end{pmatrix}$$

ve $\det(g^D_{BA}) > 0$ olduğundan kabulümüz yanlıştır. O halde g^D pozitif tanımlıdır.

2.2. TEOREM :

(M,g) bir Riemann manifoldu olsun. g nın TM ye diagonal lifti g^D, $\forall\tilde{X},\tilde{Y} \in \mathcal{T}^1_0(TM)$ için $\tilde{X}$ ile $\tilde{Y}$ nin sırasıyla horizontal ve vertical bileşenleri $h(\tilde{X})$, $h(\tilde{Y})$ ve $\vartheta(\tilde{X})$, $\vartheta(\tilde{Y})$ olmak üzere

$$g^D(\tilde{X},\tilde{Y}) = g^D(h(\tilde{X}),\ h(\tilde{Y})) + g^D(\vartheta(\tilde{X}),\ \vartheta(\tilde{Y}))$$

şeklindedir.

İSPAT :

$\forall\tilde{X},\tilde{Y} \in \mathcal{T}^1_0(TM)$ için,

$$g^D(h(\tilde{X}),h(\tilde{Y})) = g_{ji}(h(\tilde{X}))^j(h(\tilde{Y}))^i$$

$$g^D(\vartheta(\tilde{X}),\ \vartheta(\tilde{Y})) = g_{ji}(\vartheta(\tilde{X}))^j(\vartheta(\tilde{X}))^i$$

$$g^D(\vartheta(\tilde{X}),h(\tilde{Y})) = g^D(h(\tilde{X}),\vartheta(\tilde{Y})) = 0$$

dır. Böylece, $\tilde{X} = h(\tilde{X}) + \vartheta(\tilde{X})$ ve $\tilde{Y} = h(\tilde{Y}) + \vartheta(\tilde{Y})$ için

$$\begin{aligned} g^D(\tilde{X},\tilde{Y}) &= g^D(h(\tilde{X}),h(\tilde{Y})) + g^D(h(\tilde{X}),\vartheta(\tilde{Y})) \\ &\quad + g^D(\vartheta(\tilde{X}),h(\tilde{Y})) + g^D(\vartheta(\tilde{X}),\vartheta(\tilde{Y})) \\ &= g^D(h(\tilde{X}),h(\tilde{Y})) + g^D(\vartheta(\tilde{X}),\vartheta(\tilde{Y})) \end{aligned}$$

elde edilir.

BÖLÜM 3

TANJANT MANİFOLD ÜZERİNDE KONNEKSİYONLAR

n-boyutlu bir diferensiyellenebilir manifold M, M de bir lokal koordinat sistemi (x^h) ve M nin tanjant demeti $\tau_{TM} = (TM, \pi, M, \mathbb{R}^n)$ olmak üzere, 2n-boyutlu $TM = \bigcup_{p\in M} T_p(M)$ diferensiyellenebilir manifoldunu gözönüne alalım. TM üzerinde (x^h, y^h) indirgenmiş (lokal) koordinat sistemine göre bir $\tilde{\nabla}$ lineer konneksiyonunun bileşenlerinin (Christoffel sembolleri) $\tilde{\Gamma}^A_{BC}$, $1 \leqslant A,B,C \leqslant 2n$ ile gösterelim.

TM üzerinde herhangi iki $\tilde{X},\tilde{Y}$ vektör alanlarının indirgenmiş koordinat sistemine göre ifadeleri gözönüne alınırsa,

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y} &= \tilde{X}^q\partial_q(\tilde{Y}^p)\partial_p + \tilde{X}^q\tilde{Y}^p\tilde{\nabla}_{\partial_q}\partial_p \\ &+ \tilde{X}^q\partial_q(\tilde{Y}^{\bar{p}})\partial_{\bar{p}} + \tilde{X}^q\tilde{Y}^{\bar{p}}\tilde{\nabla}_{\partial_q}\partial_{\bar{p}} \\ &+ \tilde{X}^{\bar{q}}\partial_{\bar{q}}(\tilde{Y}^p)\partial_p + \tilde{X}^{\bar{q}}\tilde{Y}^p\tilde{\nabla}_{\partial_{\bar{q}}}\partial_p \\ &+ \tilde{X}^{\bar{q}}\partial_{\bar{q}}(\tilde{Y}^{\bar{p}})\partial_{\bar{p}} + \tilde{X}^{\bar{q}}\tilde{Y}^{\bar{p}}\tilde{\nabla}_{\partial_{\bar{q}}}\partial_{\bar{p}}\end{aligned}$$

şeklinde olup, burada $\partial_p = \dfrac{\partial}{\partial x^p}$, $\partial_{\bar{p}} = \dfrac{\partial}{\partial y^p}$ dir.

$$\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y} = (\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y})^h\partial_h + (\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y})^{\bar{h}}\partial_{\bar{h}}$$

$$\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y} = \{\tilde{X}^{q}(\partial_{q}(\tilde{Y}^{h}) + \tilde{\Gamma}^{h}_{qp}\tilde{Y}^{p} + \tilde{\Gamma}^{h}_{q\bar{p}}\tilde{Y}^{\bar{p}})$$
$$+ \tilde{X}^{\bar{q}}(\partial_{\bar{q}}(\tilde{Y}^{h}) + \tilde{\Gamma}^{h}_{\bar{q}p}\tilde{Y}^{p} + \tilde{\Gamma}^{h}_{\bar{q}\bar{p}}\tilde{Y}^{\bar{p}})\}\partial_{h}$$
$$+ \{\tilde{X}^{q}(\partial_{q}(\tilde{Y}^{\bar{h}}) + \tilde{\Gamma}^{\bar{h}}_{qp}\tilde{Y}^{p} + \tilde{\Gamma}^{\bar{h}}_{q\bar{p}}\tilde{Y}^{\bar{p}})$$
$$+ \tilde{X}^{\bar{q}}(\partial_{\bar{q}}(\tilde{Y}^{\bar{h}}) + \tilde{\Gamma}^{\bar{h}}_{\bar{q}p}\tilde{Y}^{p} + \tilde{\Gamma}^{\bar{h}}_{\bar{q}\bar{p}}\tilde{Y}^{\bar{p}})\}\partial_{\bar{h}}$$

dir.

TM üzerinde herhangi iki $\tilde{X},\tilde{Y}$ vektör alanlarının adapte çatıya göre ifadeleri gözönüne alınırsa;

$$\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y} = \tilde{\nabla}_{\vartheta(\tilde{X})}\vartheta(\tilde{Y}) + \tilde{\nabla}_{\vartheta(\tilde{X})}h(\tilde{Y}) + \tilde{\nabla}_{h(\tilde{X})}\vartheta(\tilde{Y}) + \tilde{\nabla}_{h(\tilde{X})}h(\tilde{Y})$$

şeklinde olup,

$$\tilde{\nabla}_{\vartheta(\tilde{X})}\vartheta(\tilde{Y}) = (\vartheta(\tilde{X}))^{q}(\partial_{q})^{V}(\vartheta(\tilde{Y}))^{p}(\partial_{p})^{V} + (\vartheta(\tilde{X}))^{q}(\vartheta(\tilde{Y}))^{p}\tilde{\nabla}_{(\partial_{q})^{V}}(\partial_{p})^{V}$$
$$\tilde{\nabla}_{\vartheta(\tilde{X})}h(\tilde{Y}) = (\vartheta(\tilde{X}))^{q}(\partial_{q})^{V}(h(\tilde{Y}))^{p}(\partial_{p})^{H} + (\vartheta(\tilde{X}))^{q}(h(\tilde{Y}))^{p}\tilde{\nabla}_{(\partial_{q})^{V}}(\partial_{p})^{H}$$
$$\tilde{\nabla}_{h(\tilde{X})}\vartheta(\tilde{Y}) = (h(\tilde{X}))^{q}(\partial_{q})^{H}(\vartheta(\tilde{Y}))^{p}(\partial_{p})^{V} + (h(\tilde{X}))^{q}(\vartheta(\tilde{Y}))^{p}\tilde{\nabla}_{(\partial_{q})^{H}}(\partial_{p})^{V}$$
$$\tilde{\nabla}_{h(\tilde{X})}h(\tilde{Y}) = (h(\tilde{X}))^{q}(\partial_{q})^{H}(h(\tilde{Y}))^{p}(\partial_{p})^{H} + (h(\tilde{X}))^{q}(h(\tilde{Y}))^{p}\tilde{\nabla}_{(\partial_{q})^{H}}(\partial_{p})^{H}$$

dir. Bir başka ifade ile

$$\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y} = (\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y})^{h}(\partial_{h})^{H} + [(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y})^{\bar{h}} - y^{k}\Gamma^{h}_{kq}(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y})^{q}](\partial_{h})^{V}$$

şeklindedir.

$\tilde{\nabla}$ lineer konneksiyonunun torsiyon tensörü $\tilde{T}$ olsun. $\tilde{T}$ nin indirgenmiş koordinat sistemine göre ifadesi,

$$\tilde{T} = \tilde{T}^{C}_{BA}\frac{\partial}{\partial v^{C}} \otimes dv^{B} \otimes dv^{A}$$

$$\tilde{T} = \tilde{T}^{h}_{qp}\frac{\partial}{\partial x^{h}} \otimes dx^{q} \otimes dx^{p} + \tilde{T}^{h}_{\bar{q}p}\frac{\partial}{\partial x^{h}} \otimes dy^{q} \otimes dx^{p}$$

$$+ \tilde{T}^{h}_{q\bar{p}}\frac{\partial}{\partial x^{h}} \otimes dx^{q} \otimes dy^{p} + \tilde{T}^{h}_{\bar{q}\bar{p}}\frac{\partial}{\partial x^{h}} \otimes dy^{q} \otimes dy^{p}$$

$$+ \tilde{T}^{\bar{h}}_{qp}\frac{\partial}{\partial y^{h}} \otimes dx^{q} \otimes dx^{p} + \tilde{T}^{\bar{h}}_{\bar{q}p}\frac{\partial}{\partial y^{h}} \otimes dy^{q} \otimes dx^{p}$$

$$+ \tilde{T}^{\bar{h}}_{q\bar{p}}\frac{\partial}{\partial y^{h}} \otimes dx^{q} \otimes dy^{p} + \tilde{T}^{\bar{h}}_{\bar{q}\bar{p}}\frac{\partial}{\partial y^{h}} \otimes dy^{q} \otimes dy^{p}$$

olup, TM üzerinde (1,2) tipinden bir tensör alanıdır.

$\tilde{\nabla}$ lineer konneksiyonunun eğrilik tensör alanı $\tilde{R}$ olsun. $\tilde{R}$ nin indirgenmiş koordinat sistemine göre ifadesi;

$$\tilde{R} = \tilde{R}^{D}_{CBA}\frac{\partial}{\partial v^{D}} \otimes dv^{C} \otimes dv^{B} \otimes dv^{A}$$

$$\tilde{R} = \tilde{R}^{h}_{kqp}\frac{\partial}{\partial x^{h}} \otimes dx^{k} \otimes dx^{q} \otimes dx^{p} + \tilde{R}^{h}_{\bar{k}qp}\frac{\partial}{\partial x^{h}} \otimes dy^{k} \otimes dx^{q} \otimes dx^{p}$$

$$+ \tilde{R}^{h}_{k\bar{q}p}\frac{\partial}{\partial x^{h}} \otimes dx^{k} \otimes dy^{q} \otimes dx^{p} + \tilde{R}^{h}_{kq\bar{p}}\frac{\partial}{\partial x^{h}} \otimes dx^{k} \otimes dx^{q} \otimes dy^{p}$$

$$+ \tilde{R}^{h}_{k\bar{q}\bar{p}}\frac{\partial}{\partial x^{h}} \otimes dx^{k} \otimes dy^{q} \otimes dy^{p} + \tilde{R}^{h}_{\bar{k}\bar{q}p}\frac{\partial}{\partial x^{h}} \otimes dy^{k} \otimes dy^{q} \otimes dx^{p}$$

$$+ \tilde{R}^{h}_{\bar{k}q\bar{p}}\frac{\partial}{\partial x^{h}} \otimes dy^{k} \otimes dx^{q} \otimes dy^{p} + \tilde{R}^{h}_{\bar{k}\bar{q}\bar{p}}\frac{\partial}{\partial x^{h}} \otimes dy^{k} \otimes dy^{q} \otimes dy^{p}$$

$$+ \tilde{R}^{\bar{h}}_{kqp}\frac{\partial}{\partial y^{h}} \otimes dx^{k} \otimes dx^{q} \otimes dx^{p} + \tilde{R}^{\bar{h}}_{\bar{k}qp}\frac{\partial}{\partial y^{h}} \otimes dy^{k} \otimes dx^{q} \otimes dx^{p}$$

$$+ \tilde{R}^{\bar{h}}_{k\bar{q}p}\frac{\partial}{\partial y^{h}} \otimes dx^{k} \otimes dy^{q} \otimes dx^{p} + \tilde{R}^{\bar{h}}_{kq\bar{p}}\frac{\partial}{\partial y^{h}} \otimes dx^{k} \otimes dx^{q} \otimes dy^{p}$$

$$+ \tilde{R}^{\bar{h}}_{k\bar{q}\bar{p}}\frac{\partial}{\partial y^{h}} \otimes dx^{k} \otimes dy^{q} \otimes dy^{p} + \tilde{R}^{\bar{h}}_{\bar{k}\bar{q}p}\frac{\partial}{\partial y^{h}} \otimes dy^{k} \otimes dy^{q} \otimes dx^{p}$$

$$+ \tilde{R}^{\bar{h}}_{\bar{k}q\bar{p}}\frac{\partial}{\partial y^{h}} \otimes dy^{k} \otimes dx^{q} \otimes dy^{p} + \tilde{R}^{\bar{h}}_{\bar{k}\bar{q}\bar{p}}\frac{\partial}{\partial y^{h}} \otimes dy^{k} \otimes dy^{q} \otimes dy^{p}$$

olup, TM üzerinde (1,3) tipinden bir tensör alanıdır.

M üzerinde bir ∇ lineer konneksiyonu verildiğinde

∇ dan yararlanarak TM üzerinde konneksiyonlar elde edilebilir. Bundan sonraki kesimlerde bu konneksiyonlar incelecektir.

3.1. ∇^H Konneksiyonu :

TM tanjânt manifoldunun yapısı gereği, üzerinde yapılan bazı işlemler herhangi bir manifold üzerinde yapılan işlemlerden farklıdır. Bazı teknikleri görebilmek açısından ∇^H konneksiyonu ile ilgili ifadelerin ispatları verilecektir. Diğer konneksiyonlarla ilgili ispatlarda benzer yollar kullanılabileceğinden, diğerleri için ispat verilmeyecektir.

3.1.1. TEOREM :

M bir C^∞ manifold M üzerinde lineer bir konneksiyon ∇ olsun. Bu durumda $\forall X,Y \in \mathcal{T}^1_0(M)$ için,

$$\text{(i)}\quad \nabla^H_{X^V} Y^V = 0 \qquad \text{(ii)}\quad \nabla^H_{X^V} Y^H = 0$$

$$\text{(iii)}\quad \nabla^H_{X^H} Y^V = (\nabla_X Y)^V \qquad \text{(iv)}\quad \nabla^H_{X^H} Y^H = (\nabla_X Y)^H$$

şartlarını sağlayan ∇^H, TM üzerinde lineer bir konneksiyondur (∇^H konneksiyonuna, ∇ nın TM ye horizontal lifti denir (3)).

İSPAT :

1) $\forall X,Y,Z \in \mathcal{T}^1_0(M)$ için,

a) $\nabla^H_{X^V + Y^V} Z^V = \nabla^H_{(X+Y)^V} Z^V = 0$, $\nabla^H_{X^V} Z^V = 0$ ve

$\nabla^H_{Y^V} Z^V = 0$ ifadelerinden,

$$\nabla^H_{X^V+Y^V} Z^V = \nabla^H_{X^V} Z^V + \nabla^H_{Y^V} Z^V$$

dir.

b) $\nabla^H_{X^V+Y^V} Z^H = \nabla^H_{(X+Y)^V} Z^H = 0$, $\nabla^H_{X^V} Z^H = 0$ ve $\nabla^H_{Y^V} Z^H = 0$ ifadelerinden,

$$\nabla^H_{X^V+Y^V} Z^H = \nabla^H_{X^V} Z^H + \nabla^H_{Y^V} Z^H$$

dir.

c) $\nabla^H_{X^H+Y^H} Z^V = \nabla^H_{(X+Y)^H} Z^V = (\nabla_{X+Y} Z)^V = \nabla^H_{X^H} Z^V + \nabla^H_{Y^H} Z^V$

dir.

d) $\nabla^H_{X^H+Y^H} Z^H = (\nabla_X Z)^H + (\nabla_Y Z)^H = \nabla^H_{X^H} Z^H + \nabla^H_{Y^H} Z^H$

dir.

2) $\forall X, Y \in \mathcal{T}^1_0(M)$ ve $f \in \mathcal{T}^0_0(M)$ için,

a) $\nabla^H_{f^V X^V} Y^V = \nabla^H_{(fX)^V} Y^V = 0$ ve $\nabla^H_{X^V} Y^V = 0$ ifadelerinden,

$$\nabla^H_{f^V X^V} Y^V = f^V \nabla^H_{X^V} Y^V$$

dir.

b) $\nabla^H_{f^V X^V} Y^H = 0$ ve $\nabla^H_{X^V} Y^H = 0$ ifadelerinden,

$$\nabla^H_{f^V X^V} Y^H = f^V \nabla^H_{X^V} Y^H$$

dır.

c) $\nabla^H_{f^V X^H} Y^V = \nabla^H_{(fX)^H} Y^V = (\nabla_{fX} Y)^V = f^V \nabla^H_{X^H} Y^V$

dir.

d) $\nabla^H_{f^V X^H} Y^H = (\nabla_{fX} Y)^H = f^V (\nabla_X Y)^H = f^V \nabla^H_{X^H} Y^H$

dir.

3) $\forall X, Y \in \mathcal{T}^1_0(M)$ ve $f \in \mathcal{T}^0_0(M)$ için,

a) $\nabla^H_{X^V}(f^V Y^V) = 0$ ve $X^V(f^V) = 0$ ifadelerinden,

$$\nabla^H_{X^V}(f^V Y^V) = X^V(f^V) Y^V + f^V \nabla^H_{X^V} Y^V$$

dir.

b) $\nabla^H_{X^V}(f^V Y^H) = 0$ ve $X^V(f^V) = 0$ ifadelerinden,

$$\nabla^H_{X^V}(f^V Y^H) = X^V(f^V) Y^H + f^V \nabla^H_{X^V} Y^H$$

dir.

c) $\nabla^H_{X^H}(f^V Y^V) = (\nabla_X (fY))^V = (X(f) Y)^V + f^V (\nabla_X Y)^V$

$$= X^H(f^V) Y^V + f^V \nabla^H_{X^H} Y^V$$

dir.

d) $\nabla^H_{X^H}(f^V Y^H) = (\nabla_X (fY))^H = (X(f))^V Y^H + f^V (\nabla_X Y)^H$

$$= X^H(f^V) Y^H + f^V \nabla^H_{X^H} Y^H$$

dir.

4) $\forall X, Y, Z \in \mathcal{T}^1_0(M)$ için,

a) $\nabla^H_{X^V}(Y^V + Z^V) = 0$, $\nabla^H_{X^V} Y^V = 0$ ve $\nabla^H_{X^V} Z^V = 0$

ifadelerinden

$$\nabla^H_{X^V}(Y^V + Z^V) = \nabla^H_{X^V} Y^V + \nabla^H_{X^V} Z^V$$

dir.

b) $\nabla^H_{X^V}(Y^H + Z^H) = 0$, $\nabla^H_{X^V}Y^H = 0$ ve $\nabla^H_{X^V}Z^H = 0$ ifadelerinden,

$$\nabla^H_{X^V}(Y^H + Z^H) = \nabla^H_{X^V}Y^H + \nabla^H_{X^V}Z^H$$

dır.

c) $\nabla^H_{X^H}(Y^V + Z^V) = (\nabla_X(Y + Z))^V = (\nabla_X Y)^V + (\nabla_X Z)^V$

$$= \nabla^H_{X^H}Y^V + \nabla^H_{X^H}Z^V$$

dir.

d) $\nabla^H_{X^H}(Y^H + Z^H) = (\nabla_X(Y + Z))^H = \nabla^H_{X^H}Y^H + \nabla^H_{X^H}Z^H$

dir.

Sonuç olarak ∇^H lineer bir konneksiyondur.

3.1.2. TEOREM :

M üzerinde bir ∇ lineer konneksiyonun bileşenleri Γ^h_{qp} ve ∇^H nın indirgenmiş koordinat sistemine göre bileşenleri ${}^H\Gamma^A_{BC}$ $1 \leq A,B,C \leq 2n$ olmak üzere,

$$^H\Gamma^h_{qp} = \Gamma^h_{qp}, \quad ^H\Gamma^h_{\bar{q}p} = 0, \quad ^H\Gamma^h_{q\bar{p}} = 0, \quad ^H\Gamma^h_{\bar{q}\bar{p}} = 0$$

$$^H\Gamma^{\bar{h}}_{qp} = \partial\Gamma^h_{qp} - y^k R^h_{pkq}, \quad ^H\Gamma^{\bar{h}}_{\bar{q}p} = \Gamma^h_{qp} = {}^H\Gamma^{\bar{h}}_{q\bar{p}}, \quad ^H\Gamma^{\bar{h}}_{\bar{q}\bar{p}} = 0$$

şeklindedir.

İSPAT :

$$(\partial_q)^H = \partial_q - \Gamma^\ell_q \partial_{\bar{\ell}}, \quad (\partial_q)^V = \partial_{\bar{q}}, \quad (\partial_p)^H = \partial_p - \Gamma^s_p \partial_{\bar{s}}$$

ve $(\partial_p)^V = \partial_{\bar{p}}$ baz vektör alanlarını gözönüne alalım.

$$\nabla^H_{(\partial_q)^V}(\partial_p)^V = \nabla^H_{\partial_{\bar q}}\partial_{\bar p} = 0 \Rightarrow {}^H\Gamma^h_{\bar q\bar p}\,\partial_h + {}^H\Gamma^{\bar h}_{\bar q\bar p}\partial_{\bar h} = 0$$

bulunur ve buradan ${}^H\Gamma^h_{\bar q\bar p} = 0$ ve ${}^H\Gamma^{\bar h}_{\bar q\bar p} = 0.$

$$\nabla^H_{(\partial_q)^V}(\partial_p)^H = \nabla^H_{\partial_{\bar q}}\partial_p - \Gamma^h_{qp}\partial_{\bar h} = 0 \Rightarrow {}^H\Gamma^h_{\bar q p}\partial_h + ({}^H\Gamma^{\bar h}_{\bar q p} - \Gamma^h_{qp})\partial_{\bar h} = 0$$

bulunur ve buradan ${}^H\Gamma^h_{\bar q p} = 0$ ve ${}^H\Gamma^{\bar h}_{\bar q p} = \Gamma^h_{qp}$

$$\nabla^H_{(\partial_q)^H}(\partial_p)^V = \nabla^H_{\partial_q}\partial_{\bar p} = (\nabla_{\partial_q}\partial_p)^V \Rightarrow {}^H\Gamma^h_{q\bar p}\partial_h + {}^H\Gamma^{\bar h}_{q\bar p}\,\partial_{\bar h} = \Gamma^h_{qp}\,\partial_{\bar h}$$

bulunur ve buradan ${}^H\Gamma^h_{q\bar p} = 0$ ve ${}^H\Gamma^{\bar h}_{q\bar p} = \Gamma^h_{qp}.$

$$\nabla^H_{(\partial_q)^H}(\partial_p)^H = (\nabla_{\partial_q}\partial_p)^H$$

ifadesinden,

$$\begin{pmatrix} {}^H\Gamma^h_{qp} \\ \\ {}^H\Gamma^{\bar h}_{qp} + y^k(-\partial_q\Gamma^h_{kp} - \Gamma^\ell_{kp}\Gamma^h_{q\ell}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma^h_{qp} \\ \\ \partial\Gamma^h_{qp} - y^k(\partial_k\Gamma^h_{qp} + \Gamma^h_{k\ell}\,\Gamma^\ell_{qp}) \end{pmatrix}$$

bulunur ve buradan ${}^H\Gamma^h_{qp} = \Gamma^h_{qp}$ ve ${}^H\Gamma^{\bar h}_{qp} = \partial\Gamma^h_{qp} - y^k R^h_{pkq}$ dir.

3.1.3. TEOREM

M üzerinde bir ∇ lineer konneksiyonun torsiyon tensörü T, bileşenleri T^h_{qp} ve ∇^H lineer konneksiyonun torsiyon tensörü ${}^HT$, indirgenmiş koordinat sistemine göre bileşenleri ${}^HT^A_{BC}$, $1 \leq A,B,C \leq 2n$ olsun. Bu durumda;

a) $\forall X,Y \in \mathcal{T}^1_0(M)$ için,

${}^HT(X^V,Y^V) = 0$

$$^{H}T(X^V,Y^H) = {}^{H}T(X^H,Y^V) = (T(X,Y))^V$$

$$^{H}T(X^H,Y^H) = T^H(X^H,Y^H) + \nu(\hat{R}(X,Y))$$

şeklindedir.

b) ^{H}T nin indirgenmiş koordinat sistemine göre bileşenleri,

$$^{H}T^{h}_{qp} = T^{h}_{qp}, \quad {}^{H}T^{\bar{h}}_{qp} = y^{k}\hat{R}^{h}_{kqp} - \Gamma^{h}_{\ell}T^{\ell}_{qp} + \Gamma^{\ell}_{q}T^{h}_{\ell p} + \Gamma^{\ell}_{p}T^{h}_{q\ell}$$

$^{H}T^{\bar{h}}_{\bar{q}p} = {}^{H}T^{\bar{h}}_{q\bar{p}} = T^{h}_{qp}$ olup diğer bileşenleri sıfırdır.

c) $\hat{\nabla}$ lineer konneksiyonunun eğrilik tensör alanı $\hat{R} \equiv 0$ ise ∇^H nın torsiyon tensörü, ∇ nın torsiyon tensörünün horizontal liftidir.

İSPAT :

a) $\forall X,Y \in \mathcal{J}^1_0(M)$ için,

$$^{H}T(X^V,Y^V) = \nabla^H_{X^V}Y^V - \nabla^H_{Y^V}X^V - [X^V,Y^V] = 0$$

dir.

$$^{H}T(X^V,Y^H) = -(\nabla_Y X)^V + (\nabla_X Y)^V - [X,Y]^V = (T(X,Y))^V$$

dir.

$$^{H}T(X^H,Y^V) = (\nabla_X Y)^V - (\nabla_Y X)^V - [X,Y]^V = (T(X,Y))^V$$

dir.

$$^{H}T(X^H,Y^H) = (\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y])^H + \nu(\hat{R}(X,Y))$$

$$= (T(X,Y))^H + \nu(\hat{R}(X,Y))$$

$$= T^H(X^H,Y^H) + \nu(\hat{R}(X,Y))$$

şeklindedir.

b) $(\partial_q)^V = \partial_{\bar{q}}$, $(\partial_q)^H = \partial_q - \Gamma_q^\ell \partial_{\bar{\ell}}$, $(\partial_p)^V = \partial_{\bar{p}}$,

ve $(\partial_p)^H = \partial_p - \Gamma_p^s \partial_{\bar{s}}$ vektör alanlarını gözönüne alalım.

$$ {}^HT((\partial_q)^V, (\partial_p)^V) = {}^HT(\partial_{\bar{q}}, \partial_{\bar{p}}) = 0 \Rightarrow {}^HT^h_{\bar{q}\bar{p}} = 0 = {}^HT^{\bar{h}}_{\bar{q}\bar{p}} $$

dir.

$$ {}^HT((\partial_q)^V, (\partial_p)^H) = {}^HT(\partial_{\bar{q}}, \partial_p) = (T(\partial_q, \partial_p)^V $$

$$ \Rightarrow {}^HT^h_{\bar{q}p} = 0, \quad {}^HT^{\bar{h}}_{\bar{q}p} = T^h_{qp} $$

dir.

$$ {}^HT((\partial_q)^H, (\partial_p)^V) = {}^HT(\partial_q, \partial_{\bar{p}}) = (T(\partial_q, \partial_p))^V $$

$$ \Rightarrow {}^HT^h_{q\bar{p}} = 0, \quad {}^HT^{\bar{h}}_{q\bar{p}} = T^h_{qp} $$

dir.

$$ {}^HT((\partial_q)^H, (\partial_p)^H) = T^H((\partial_q)^H, (\partial_p)^H) + \nu(\hat{R}(\partial_q, \partial_p)) $$

ifadesinden,

$$ \begin{pmatrix} {}^HT^h_{qp} \\ \\ {}^HT^{\bar{h}}_{qp} - y^k(\Gamma^\ell_{kp} T^h_{q\ell} + \Gamma^s_{kq} T^h_{sp}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^h_{qp} \\ \\ -y^k(\Gamma^h_{kt} T^t_{qp} - \hat{R}^h_{kqp}) \end{pmatrix} $$

eşitliği bulunur. Buradan,

$$ {}^HT^h_{qp} = T^h_{qp} \quad \text{ve} \quad {}^HT^{\bar{h}}_{qp} = \Gamma^\ell_p T^h_{q\ell} + \Gamma^s_q T^h_{sp} - \Gamma^h_t T^t_{qp} + y^k \hat{R}^h_{kqp} $$

$$ {}^HT^{\bar{h}}_{qp} = -\Gamma^h_s T^s_{qp} + \Gamma^s_q T^h_{sp} + \Gamma^s_p T^h_{qs} + y^k \hat{R}^h_{kqp} $$

bulunur.

∇ nın torsiyon tensörünün TM ye horizontal liftinin indirgenmiş koordinat sistemine göre bileşenleri,

$$(T^H)^h_{qp} = T^h_{qp}, \quad (T^H)^{\bar{h}}_{qp} = -\Gamma^h_s T^s_{qp} + \Gamma^s_q T^h_{sp} + \Gamma^s_p T^h_{qs},$$

$(T^H)^{\bar{h}}_{\bar{q}p} = (T^H)^{\bar{h}}_{q\bar{p}} = T^h_{qp}$ olup diğer bileşenleri sıfırdır.

c) Teoremin b şıkkından $\bar{\nabla}^H$ nin torsiyon tensörü ${}^H T$ nin bileşenleri ile ∇ nın torsiyon tensörünün TM ye horizontal liftinin bileşenleri aynı olduğundan ${}^H T = T^H$ dir.

3.1.4. TEOREM :

∇ lineer koonneksiyonunun eğrilik tensörü R, bileşenleri R^h_{kqp} ve ∇^H nın eğrilik tensörü ${}^H R$, indirgenmiş koordinat sistemine göre bileşenleri ${}^H R^D_{CAB}$ $1 \leq A,B,C,D \leq 2n$ olsun. Bu durumda,

a) $\forall X,Y,Z \in \mathcal{J}^1_0(M)$ için,

$${}^H R(X^V,Y^V,Z^V) = 0,$$

$${}^H R(X^V,Y^V,Z^H) = 0,$$

$${}^H R(X^H,Y^V,Z^V) = 0 = {}^H R(X^V,Y^H,Z^V)$$

$${}^H R(X^H,Y^V,Z^H) = 0 = {}^H R(X^V,Y^H,Z^H)$$

$${}^H R(X^H,Y^H,Z^V) = R^H(X^H,Y^H,Z^V) + \nabla^H_{\nu(\hat{R}(X,Y))} Z^V$$

$${}^H R(X^H,Y^H,Z^H) = R^H(X^H,Y^H,Z^H) + \nabla^H_{\nu(\hat{R}(X,Y))} Z^H$$

şeklindedir.

b) ${}^H R$ nın indirgenmiş koordinat sistemine göre bileşenleri,

$$ {}^{H}R^{h}_{kqp} = R^{h}_{kqp},\quad {}^{H}R^{\bar h}_{kqp} = \Gamma^{m}_{k} R^{h}_{mqp} - \Gamma^{h}_{t} R^{t}_{kqp},\quad {}^{H}R^{\bar h}_{\bar k qp} = R^{h}_{kqp} $$

olup, diğer bileşenleri sıfırdır.

İSPAT :

a) $\forall \tilde X, \tilde Y, \tilde Z \in \mathfrak{J}^{1}_{0}(TM)$ için,

$$ {}^{H}R(\tilde X,\tilde Y,\tilde Z) = \nabla^{H}_{\tilde X}\nabla^{H}_{\tilde Y}\tilde Z - \nabla^{H}_{\tilde Y}\nabla^{H}_{\tilde X}\tilde Z - \nabla^{H}_{[\tilde X,\tilde Y]}\tilde Z $$

dir.

$$ {}^{H}R(X^{V},Y^{V},Z^{V}) = {}^{H}R(X^{V},Y^{V},Z^{H}) = 0 $$

olduğu açıktır.

$$ {}^{H}R(X^{H},Y^{V},Z^{V}) = -\nabla^{H}_{Y^{V}}(\nabla_{X}Z)^{V} - \nabla^{H}_{(\hat\nabla_{X}Y)^{V}} Z^{V} = 0 $$

$$ {}^{H}R(X^{H},Y^{V},Z^{H}) = -\nabla^{H}_{Y^{V}}(\nabla_{X}Z)^{H} - \nabla^{H}_{(\hat\nabla_{X}Y)^{V}} Z^{H} = 0 $$

$$ {}^{H}R(X^{V},Y^{H},Z^{V}) = \nabla^{H}_{X^{V}}(\nabla_{Y}Z)^{V} + \nabla^{H}_{(\hat\nabla_{Y}X)^{V}} Z^{V} = 0 $$

$$ {}^{H}R(X^{V},Y^{H},Z^{H}) = \nabla^{H}_{X^{V}}(\nabla_{Y}Z)^{H} + \nabla^{H}_{(\hat\nabla_{Y}X)^{V}} Z^{H} = 0 $$

$$ \begin{aligned} {}^{H}R(X^{H},Y^{H},Z^{V}) &= \nabla^{H}_{X^{H}}(\nabla_{Y}Z)^{V} - \nabla^{H}_{Y^{H}}(\nabla_{X}Z)^{V} - (\nabla_{[X,Y]}Z)^{V} \\ &\quad + \nabla^{H}_{\nu(\hat R(X,Y))} Z^{V} \\ &= R^{H}(X^{H},Y^{H},Z^{V}) + \nabla^{H}_{\nu(\hat R(X,Y))} Z^{V} \end{aligned} $$

$$ \begin{aligned} {}^{H}R(X^{H},Y^{H},Z^{H}) &= \nabla^{H}_{X^{H}}(\nabla_{Y}Z)^{H} - \nabla^{H}_{Y^{H}}(\nabla_{X}Z)^{H} - (\nabla_{[X,Y]}Z)^{H} \\ &\quad + \nabla^{H}_{\nu(\hat R(X,Y))} Z^{H} \\ &= R^{H}(X^{H},Y^{H},Z^{H}) + \nabla^{H}_{\nu(\hat R(X,Y))} Z^{H} \end{aligned} $$

dir.

b) ${}^{H}R$ nın 3-lineer ve $(\partial_q)^{V} = \partial_{\bar q}$, $(\partial_q)^{H} = \partial_q - \Gamma^{\ell}_{q}\partial_{\bar\ell}$

$$(\partial_p)^V = \partial_{\bar{p}},\ (\partial_p)^H = \partial_p - \Gamma_p^s \partial_{\bar{s}},\ (\partial_k)^V = \partial_{\bar{k}},\ (\partial_k)^H = \partial_k - \Gamma_k^m \partial_{\bar{m}}$$

vektör alanlarını gözönüne alalım.

$$^H R((\partial_q)^V,\ (\partial_p)^V, (\partial_k)^V) = {}^H R(\partial_{\bar{q}}, \partial_{\bar{p}}, \partial_{\bar{k}}) = 0$$

$$^H R^h_{\bar{k}\bar{q}\bar{p}} = 0 = {}^H R^{\bar{h}}_{\bar{k}\bar{q}\bar{p}}$$

$$^H R((\partial_q)^V,\ (\partial_p)^V, (\partial_k)^H) = {}^H R(\partial_{\bar{q}}, \partial_{\bar{p}}, \partial_k) = 0$$

$$^H R^h_{k\bar{q}\bar{p}} = 0 = {}^H R^{\bar{h}}_{k\bar{q}\bar{p}}$$

$$^H R((\partial_q)^H, (\partial_p)^V, (\partial_k)^V) = {}^H R(\partial_q, \partial_{\bar{p}}, \partial_{\bar{k}}) = 0$$

$$^H R^h_{\bar{k}q\bar{p}} = 0 = {}^H R^{\bar{h}}_{\bar{k}q\bar{p}}$$

$$^H R((\partial_q)^H, (\partial_p)^V, (\partial_k)^H) = {}^H R(\partial_q, \partial_{\bar{p}}, \partial_k) = 0$$

$$^H R^h_{kq\bar{p}} = 0 = {}^H R^{\bar{h}}_{kq\bar{p}}$$

$$^H R((\partial_q)^V, (\partial_p)^H, (\partial_k)^V) = {}^H R(\partial_{\bar{q}}, \partial_p, \partial_{\bar{k}}) = 0$$

$$^H R^h_{\bar{k}\bar{q}p} = 0 = {}^H R^{\bar{h}}_{\bar{k}\bar{q}p}$$

$$^H R((\partial_q)^V, (\partial_p)^H, (\partial_k)^H) = {}^H R(\partial_{\bar{q}}, \partial_p, \partial_k) = 0$$

$$^H R^h_{k\bar{q}p} = 0 = {}^H R^{\bar{h}}_{k\bar{q}p}$$

$$^H R((\partial_q)^H, (\partial_p)^H, (\partial_k)^V) = {}^H R(\partial_q, \partial_p, \partial_{\bar{k}}) = (R(\partial_q, \partial_p, \partial_k))^V$$

$$+ \nabla_\nu^H (\hat{R}(\partial_q, \partial_p))\partial_{\bar{k}}$$

$$^H R^h_{\bar{k}qp} = 0,\ {}^H R^{\bar{h}}_{\bar{k}qp} = R^h_{kqp}$$

$$^H R((\partial_q)^H, (\partial_p)^H, (\partial_k)^H) = {}^H R(\partial_q, \partial_p, \partial_k) - \Gamma_k^m (R(\partial_q, \partial_p, \partial_m))^V$$

$$= (R(\partial_q, \partial_p, \partial_k))^H + \nabla_\nu^H (\hat{R}(\partial_q, \partial_p))(\partial_k)^H$$

eşitliğinden,

$$\begin{pmatrix} {}^{H}R^{h}_{kqp} \\ \\ {}^{H}R^{\bar{h}}_{kqp} - \Gamma^{m}_{k}\, R^{h}_{mkq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^{h}_{kqp} \\ \\ -\Gamma^{h}_{t} R^{t}_{kqp} \end{pmatrix}$$

bulunur ve buradan,

$${}^{H}R^{h}_{kqp} = R^{h}_{kqp} \quad \text{ve} \quad {}^{H}R^{\bar{h}}_{kqp} = \Gamma^{m}_{k}\, R^{h}_{mqp} - \Gamma^{h}_{t} R^{t}_{kqp}$$

dir.

3.1.5. TEOREM

∇,M üzerinde lineer simetrik bir konneksiyon ve eğrilik tensör alanı $R \equiv 0$ ise ∇ nın TM ye horizontal lifti ∇^{H}, TM üzerinde simetrikdir.

İSPAT :

$\forall X,Y \in \mathcal{T}^{1}_{0}(M)$ için,

$$[X^{V},Y^{V}] = \nabla^{H}_{X^{V}}Y^{V} - \nabla^{H}_{Y^{V}}X^{V}$$

$$\nabla^{H}_{X^{V}}Y^{H} - \nabla^{H}_{Y^{H}}X^{V} = -(\nabla_{Y}X)^{V} = [X^{V},Y^{H}]$$

ve

$$\nabla^{H}_{X^{H}}Y^{H} - \nabla^{H}_{Y^{H}}X^{H} = (\nabla_{X}Y - \nabla_{Y}X)^{H} = [X,Y]^{H}$$
$$= [X^{H},Y^{H}]$$

dir.

$\forall \tilde{X},\tilde{Y} \in \mathcal{T}^{1}_{0}(TM)$ için $[\tilde{X},\tilde{Y}] = \nabla^{H}_{\tilde{X}}\tilde{Y} - \nabla^{H}_{\tilde{Y}}\tilde{X}$ olduğundan ∇^{H} simetrikdir.

3.1.1. UYARI :

∇,M üzerinde simetrik bir konneksiyon iken ∇^H, TM üzerinde simetrik değildir.

3.1.6. TEOREM :

(M,g) bir Riemann manifoldu ve ∇,M üzerinde g ye göre bir metrik konneksiyon olsun. Bu durumda aşağıdakiler verilebilir.

1) ∇^H, g^H metriğine göre bir metrik konneksiyondur,

2) ∇^H, g^{vH} metriğine göre bir metrik konneksiyondur,

3) ∇^H, g^D metriğine göre bir metrik konneksiyondur,

4) ∇^H, $\bar{g}$ metriğine göre bir metrik konneksiyondur.

İSPAT :

$\forall X \in \mathcal{J}^1_0(M)$ ve $\forall K \in \mathcal{J}(M)$ için,

(i) $\nabla^H_{X^c} K^H = (\nabla_X K)^H$

(ii) $\nabla^H_{X^c} K^V = (\nabla_X K)^V$

dır.

1) $\forall X \in \mathcal{J}^1_0(M)$ için (3) den,

$$\nabla^H_{X^c} g^H = (\nabla_X g)^H = 0$$

yazılabilir. O halde $\nabla^H g^H = 0$ olup ∇^H, g^H ya göre bir metrik konneksiyondur.

2) $\forall X \in \mathcal{J}^1_0(M)$ için,

$$\nabla^H_{X^c} g^{vH} = \nabla^H_{X^c} g^V + \nabla^H_{X^c} g^H = (\nabla_X g)^V + (\nabla_X g)^H = 0$$

dır. O halde ∇^H,g^{vH} ya göre bir metrik konneksiyondur.

3) $\forall X,Y,Z \in \mathcal{T}_0^1(M)$ için, $g^D(Y^V,Z^V) = g^D(Y^H,Z^H)$

$$= (g(Y,Z))^V, \quad g^D(Y^V,Z^H) = 0$$

dır.

a) $X^V[g^D(Y^V,Z^V)] = X^V[(g(Y,Z))^V] = 0,$

$g^D(\nabla^H_{X^V}Y^V,Z^V) = 0$ ve $g^D(Y^V, \nabla^H_{X^V}Z^V) = 0$ ifadelerinden,

$$X^V[g^D(Y^V,Z^V)] = g^D(\nabla^H_{X^V}Y^V,Z^V) + g^D(Y^V,\nabla^H_{X^V}Z^V)$$

dır.

b) $X^V[g^D(Y^V,Z^H)] = g^D(\nabla^H_{X^V}Y^V,Z^H) + g^D(Y^V, \nabla^H_{X^V}Z^H)$

olduğu açıktır.

c) $X^V[g^D(Y^H,Z^H)] = g^D(\nabla^H_{X^V}Y^H,Z^H) + g^D(Y^H, \nabla^H_{X^V}Z^H)$

olduğunu kolayca görebiliriz.

d) $X^H[g^D(Y^V,Z^V)] = (X[g(Y,Z)])^V$

$$= (g(\nabla_X Y,Z))^V + (g(Y,\nabla_X Z))^V$$

$$= g^D(\nabla^H_{X^H}Y^V,Z^V) + g^D(Y^V,\nabla^H_{X^H}Z^V)$$

dir.

e) $X^H[g^D(Y^V,Z^H)] = g^D(\nabla^H_{X^H}Y^V,Z^H) + g^D(Y^V,\nabla^H_{X^H}Z^H)$

olduğu açıktır.

f) $X^H[g^D(Y^H,Z^H)] = (X[g(Y,Z)])^V$

$$= g^D((\nabla_X Y)^H,Z^H) + g^D(Y^H,(\nabla_X Z)^H)$$

$$= g^D(\nabla^H_{X^H}Y^H,Z^H) + g^D(Y^H,\nabla^H_{X^H}Z^H)$$

dir.

Sonuç olarak ∇^H, g^D ye göre bir metrik konneksiyondur.

4) $\forall Y,Z \in \mathcal{T}_0^1(M)$ için $\bar{g}(Y^V,Z^V) = (g(Y,Z))^V = \bar{g}(Y^V,Z^H)$ ve $\bar{g}(Y^H,Z^H) = 0$ dır. Bir önceki şıkkın ispat yöntemiyle, ∇^H nın $\bar{g}$ metriğine göre bir metrik konneksiyon olduğu kolayca görülebilir.

3.1.7. TEOREM :

(M,g) bir Riemann manifoldu ve ∇, g ye göre bir Riemann konneksiyonu olsun. Bu takdirde Teorem-3.1.6 da söz konusu olan metriklere göre ∇^H, TM üzerinde bir Riemann konneksiyonu değildir.

İSPAT :

∇^H, TM üzerinde bir simetrik konneksiyon olmadığından dolayı, söz konusu olan metriklere göre bir Riemann konneksiyonu değildir.

3.2. ∇^C Konneksiyonu

3.2.1. TEOREM :

∇, M üzerinde lineer bir konneksiyon olsun. Bu durumda $\forall X,Y \in \mathcal{T}_0^1(M)$ için,

(i) $\nabla^C_{X^V} Y^V = 0$, (ii) $\nabla^C_{X^V} Y^H = 0$

(iii) $\nabla^C_{X^H} Y^V = (\nabla_X Y)^V$, (iv) $\nabla^C_{X^H} Y^H = (\nabla_X Y)^H + \nu(R(.,X)Y)$

şartlarını sağlayan ∇^C, TM üzerinde lineer bir konneksiyondur. (∇^C konneksiyonuna, ∇ nın TM ye complete lifti denir. (3)).

Bu teoremin ispatı Teorem 3.1.1 in ispat tekniğiyle görülebilir. Fakat bir diğer yöntem ise Teorem 1.6.3 ile

Teorem 3.1.1 in birlikte kullanılması ile elde edilebilir.

$\forall X,Y \in \mathcal{T}^1_0(M)$ için, $\nabla^c_{X^c} Y^c = (\nabla_X Y)^c$ olacak biçimde TM de bir tek ∇^c lineer konneksiyonu vardır. Ayrıca

$$\nabla^c_{X^v} Y^c = (\nabla_X Y)^v, \quad \nabla^c_{X^c} Y^v = (\nabla_X Y)^v$$

dir.

3.2.2. TEOREM :

M üzerinde bir ∇ lineer konneksiyonunun bileşenleri Γ^h_{qp} ve ∇^c nin indirgenmiş koordinat sistemine göre bileşenleri ${}^c\Gamma^A_{BD}$, $1 \leq A,B,D \leq 2n$ olmak üzere,

$${}^c\Gamma^h_{qp} = \Gamma^h_{qp}, \quad {}^c\Gamma^{\bar{h}}_{qp} = \partial\Gamma^h_{qp}, \quad {}^c\Gamma^{\bar{h}}_{\bar{q}p} = {}^c\Gamma^{\bar{h}}_{q\bar{p}} = \Gamma^h_{qp}$$

şeklinde olup diğer bileşenleri sıfırdır.

Teoremin ispatı Teorem 3.1.2 nin ispat tekniğiyle görülebilir. Fakat bir diğer yöntem ise; ∇^H ile ∇^c konneksiyonları arasındaki fark tensörünün, indirgenmiş koordinat sistemine göre bileşenlerinin hesaplanarak Teorem 3.1.2 nin kullanılmasıdır.

3.2.3. TEOREM :

∇ lineer konneksiyonunun torsiyon tensörünün TM ye complete lifti, ∇^c nin torsiyon tensörüdür. Ayrıca T^c nin indirgenmiş koordinat sistemine göre ifadesi,

$$(T^c)^h_{qp} = T^h_{qp}, \quad (T^c)^{\bar{h}}_{qp} = \partial T^h_{qp}, \quad (T^c)^{\bar{h}}_{\bar{q}p} = (T^c)^{\bar{h}}_{q\bar{p}} = T^h_{qp}$$

olup, diğer bileşenleri sıfırdır.

3.2.4. TEOREM

∇ lineer konneksiyonunun eğrilik tensörünün TM ye complete lifti, ∇^c nin eğrilik tensörüdür ve R^c nin indirgenmiş koordinat sistemine göre bileşenleri,

$$(R^c)^h_{kqp} = R^h_{kqp}, \quad (R^c)^{\bar{h}}_{kqp} = \partial R^h_{kqp},$$
$$(R^c)^{\bar{h}}_{kq\bar{p}} = (R^c)^{\bar{h}}_{k\bar{q}p} = (R^c)^{\bar{h}}_{\bar{k}qp} = R^h_{kqp}$$

olup, diğer bileşenleri sıfırdır.

3.2.5. TEOREM :

∇,M üzerinde lineer, simetrik bir konneksiyon olsun. Bu durumda ∇^c konneksiyonu TM üzerinde simetrikdir.

3.2.6. TEOREM :

(M,g) bir Riemann manifoldu ve ∇,g ye göre bir metrik konneksiyon olsun. Bu durumda aşağıdakiler verilebilir.

1) ∇^c, g^H metriğine göre bir metrik konneksiyondur,

2) ∇^c, g^{vH} metriğine göre bir metrik konneksiyondur,

3) ∇^c, g^D metriğine göre bir metrik konneksiyon değildir,

4) ∇^c, $\bar{g}$ metriğine göre bir metrik konneksiyon değildir.

3.2.7. TEOREM :

(M,g) bir Riemann manifoldu ve ∇,g ye göre bir Riemann konneksiyonu olsun. Bu durumda aşağıdakiler verilebilir.

1) ∇^C, g^H metriğine göre bir Riemann konneksiyonudur,

2) ∇^C, g^{vH} metriğine göre bir Riemann konneksiyonudur,

3) ∇^C, g^D metriğine göre bir Riemann konneksiyonu değildir,

4) ∇^C, $\bar{g}$ metriğine göre bir Riemann konneksiyonu değildir.

3.2.8. TEOREM :

(M,g) bir Riemann manifoldu olsun. g nin TM ye complete lifti g^C ile g^{VC} metriklerinin Riemann konneksiyonları aynıdır (3).

3.2.9. TEOREM :

M üzerinde bir ∇ lineer konneksiyonunun eğrilik tensör alanı R olsun. $\forall X,Y,Z \in \mathcal{T}_0^1(M)$ için,

1) $\nu_Z(R(X,Y)) = (R(X,Y,Z))^V$

2) $\nu_Z(R(.,X,Y)) = (R(Z,X,Y))^V$

3) $\nu_Z(R(X,.,Y)) = (R(X,Z,Y))^V$

dir.

3.3. $\bar{\nabla}$ Konneksiyonu :

3.3.1. TEOREM :

∇,M üzerine lineer bir konneksiyon olsun. Bu durumda $\forall X,Y \in \mathcal{T}_0^1(M)$ için

(i) $\bar\nabla_{X^V} Y^V = 0,$ (ii) $\bar\nabla_{X^V} Y^H = 0,$

(iii) $\bar\nabla_{X^H} Y^V = (\hat\nabla_X Y)^V$

(iv) $\bar\nabla_{X^H} Y^H = (\nabla_X Y - \frac{1}{2}T(X,Y))^H - \frac{1}{2}\,\nu(\hat R(X,Y))$

şartlarını sağlayan $\bar\nabla$, TM üzerinde lineer bir konneksiyondur (6).

3.3.2. TEOREM :

M üzerinde bir ∇ lineer konneksiyonunun bileşenleri Γ^h_{qp} ve $\bar\nabla$ nin indirgenmiş koordinat sistemine göre bileşenleri $\bar\Gamma^A_{BC}$, $1 \leq A,B,C \leq 2n$ olmak üzere

$$\bar\Gamma^h_{qp} = \Gamma^h_{qp} - \frac{1}{2}T^h_{qp},\quad \bar\Gamma^{\bar h}_{qp} = \partial\Gamma^h_{qp} - y^k R^h_{pkq} + \frac{1}{2}y^k(\Gamma^h_{ks}T^s_{qp} - \bar R^h_{kqp}),$$

$$\bar\Gamma^{\bar h}_{\bar q p} = \Gamma^h_{qp},\quad \bar\Gamma^{\bar h}_{q\bar p} = \hat\Gamma^h_{qp}$$

olup diğer bileşenleri sıfırdır.

3.3.3. TEOREM :

$\bar\nabla$ lineer konneksiyonunun torsiyon tensörü $\bar T \equiv 0$ dır.

3.3.1. UYARI :

$\bar\nabla$ lineer konneksiyonunun TM üzerinde simetrik olması için M üzerinde ∇ konneksiyonunun simetrik olması gerekmez.

3.3.4. TEOREM :

(M,g) bir Riemann manifoldu ve ∇, g ye göre bir metrik konneksiyon olsun. Bu durumda TM üzerinde $\bar{\nabla}$ lineer konneksiyonu; g^H, g^{vH}, g^D ve $\bar{g}$ metriklerinin hiç birine göre bir metrik konneksiyon değildir.

3.3.5. TEOREM :

(M,g) bir Riemann manifoldu ve ∇,g ye göre bir Riemann konneksiyonu olsun. Bu durumda $\bar{\nabla}$ konneksiyonu g^H, g^{vH}, g^D ve $\bar{g}$ metriklerinin hiç birine göre bir Riemann konneksiyonu değildir.

3.4. ∇' Konneksiyonu :

3.4.1. TEOREM :

∇,M üzerinde lineer bir konneksiyon olsun. Bu durumda $\forall X,Y \in \mathfrak{T}^1_0(M)$ için

$$\text{(i)}\ \nabla'_{X^V} Y^V = 0,\quad \text{(ii)}\ \nabla'_{X^V} Y^H = 0,\quad \text{(iii)}\ \nabla'_{X^H} Y^V = (\hat{\nabla}_X Y)^V$$

$$\text{(iv)}\ \nabla'_{X^H} Y^H = [\nabla_X Y - \tfrac{1}{2} T(X,Y)]^H - \nu(S(X,Y))$$

şartlarını sağlayan ∇', TM üzerinde lineer bir konneksiyondur. Burada S; $\forall X,Y,Z \in \mathfrak{T}^1_0(M)$ için

$$S(X,Y)Z = \hat{R}(X,Y)Z + \frac{1}{2}\,\sigma\{\hat{R}(X,Y)Z\}$$

şeklinde tanımlı M üzerinde bir tensör alanıdır (7).

3.4.2. TEOREM :

M üzerinde bir ∇ lineer konneksiyonunun bileşenleri Γ^h_{qp} ve ∇' nin indirgenmiş koordinat sistemine göre bileşenleri Γ'^A_{BC}, $1 \leq A,B,C \leq 2n$ olmak üzere,

$$\Gamma'^{h}_{qp} = \Gamma^{h}_{qp} - \frac{1}{2} T^{h}_{qp}, \quad \Gamma'^{\bar h}_{\bar q p} = \Gamma^{h}_{qp}, \quad \Gamma'^{\bar h}_{q\bar p} = \hat{\Gamma}^{h}_{qp},$$

$$\Gamma'^{\bar h}_{qp} = \partial\Gamma^{h}_{qp} + y^{k}(R^{h}_{pkq} + S^{h}_{kqp} - \frac{1}{2}\Gamma^{h}_{ks}T^{s}_{qp})$$

olup, diğer bileşenleri sıfırdır.

3.4.3. TEOREM :

∇' lineer konneksiyonunun torsiyon tensörü $T' \equiv 0$ dır.

3.4.1. UYARI :

∇' lineer konneksiyonunun TM üzerinde simetrik olması için M üzerindeki ∇ konneksiyonunun simetrik olması gerekmez.

3.4.4. TEOREM :

M üzerinde bir ∇ lineer simetrik konneksiyonun eğrilik tensör alanı R, ∇' konneksiyonunun eğrilik tensör alanı R' olsun. $\forall X,Y,Z \in \mathcal{T}^1_0(M)$ için,

$$R'(X^V,Y^V,Z^V) = 0$$

$$R'(X^V,Y^V,Z^H) = 0$$

$$R'(X^V,Y^H,Z^V) = 0$$

$$R'(X^V,Y^H,Z^H) = (R(X,Y,Z))^V$$

$$R'(X^H,Y^H,Z^V) = (R(X,Y,Z))^V$$

$$R'(X^H,Y^H,Z^H) = (R(X,Y,Z))^H - \overline{(\nabla R)(X,Y,Z)}$$

dir.

3.4.5. TEOREM

(M,g) bir Riemann manifoldu ve ∇, g ye göre bir metrik konneksiyon olsun. Bu durumda TM üzerinde ∇' lineer konneksiyonu, g^H, g^{vH}, g^D ve $\bar{g}$ metriklerinin hiç birine göre bir metrik konneksiyon değildir.

3.4.6. TEOREM :

(M,g) bir Riemann manifoldu ve ∇, g ye göre bir Riemann konneksiyonu olsun. Bu durumda ∇' konneksiyonu g^H, g^{vH}, g^D ve $\bar{g}$ metriklerinin hiç birine göre bir Riemann konneksiyonu değildir.

3.5. ∇'' Konneksiyonu :

3.5.1. TEOREM :

M üzerinde lineer bir konneksiyon ∇ olsun. Bu durumda $\forall X,Y,U \in \mathcal{T}^1_0(M)$ için,

(i) $\nabla''_{X^V} Y^V = 0$, (ii) $\nabla''_{X^V} Y^H = (T(X,Y))^V$,

(iii) $\nabla''_{X^H} Y^V = (\nabla_X Y)^V$

(iv) $\nabla''_{X^H} Y^H = (\nabla_X Y)^H + (R(U,X)Y)^V + ((\nabla_X T)(U,Y))^V$

şartlarını sağlayan ∇'', TM üzerinde lineer bir konneksiyondur (8).

3.5.2. TEOREM :

M üzerinde bir ∇ lineer konneksiyonunun bileşenleri Γ^h_{qp} ve ∇'' nin indirgenmiş koordinat sistemine göre bileşenleri Γ''^A_{BC}, $1 \leq A,B,C \leq 2n$ olmak üzere,

$$\Gamma''^{h}_{qp} = \Gamma^{h}_{qp}, \quad \Gamma''^{\bar h}_{\bar q p} = \Gamma^{h}_{qp} + T^{h}_{qp}, \quad \Gamma''^{\bar h}_{q\bar p} = \Gamma^{h}_{qp},$$

$$\Gamma''^{\bar h}_{qp} = \partial\Gamma^{h}_{qp} - y^{k}(R^{h}_{pkq} - R^{h}_{k\ell q}) - \Gamma^{\ell}_{q}T^{h}_{\ell p} + \nabla_{\partial_q}(T^{h}_{\ell p}) - \partial_q T^{h}_{\ell p}$$

olup, diğer bileşenleri sıfırdır.

3.5.3. TEOREM :

M üzerinde bir ∇ lineer konneksiyonunun torsiyon tensörü T, bileşenleri T^{h}_{qp} ve ∇'' lineer konneksiyonun torsiyon tensörü $\overset{''}{T}$, indirgenmiş koordinat sistemine göre bileşenleri $\overset{''}{T}{}^{A}_{BC}$, $1 \leqslant A,B,C \leqslant 2n$ olsun. Bu durumda,

a) $\forall X,Y,U \in \mathcal{T}^{1}_{0}(M)$ için,

$$\overset{''}{T}(X^{V},Y^{V}) = 0$$

$$\overset{''}{T}(X^{H},Y^{V}) = (T(X,Y))^{V}$$

$$\overset{''}{T}(X^{H},Y^{H}) = (T(X,Y))^{H} + (\sigma\{R(X,Y)U\})^{V}$$

dir.

b) $\overset{''}{T}$ nin indirgenmiş koordinat sistemine göre bileşenleri,

$$\overset{''}{T}{}^{h}_{qp} = T^{h}_{qp}, \quad \overset{''}{T}{}^{\bar h}_{\bar q p} = \overset{''}{T}{}^{\bar h}_{q\bar p} = T^{h}_{qp},$$

$$\overset{''}{T}{}^{\bar h}_{qp} = -\Gamma^{h}_{\ell}T^{\ell}_{qp} + \Gamma^{\ell}_{q}T^{h}_{\ell p} + \Gamma^{\ell}_{p}T^{h}_{q\ell} + R^{h}_{qpk} + R^{h}_{pkq} + R^{h}_{kqp}$$

olup diğer bileşenleri sıfırdır.

3.5.4. TEOREM :

M üzerinde bir ∇ lineer konneksiyonun eğrilik tensör alanı R, bileşenleri R^{h}_{kqp} ve ∇'' nin eğrilik tensör alanı $\overset{''}{R}$, indirgenmiş koordinat sistemine göre bileşenleri

$\overset{''}{R}{}^{D}_{CAB}$, $1 \leqslant A,B,C,D \leqslant 2n$ olsun. Bu durumda,

a) $\forall X,Y,Z,U \in \mathcal{J}^1_0(M)$ için,

$$\overset{''}{R}(X^V,Y^V,Z^V) = 0$$

$$\overset{''}{R}(X^V,Y^V,Z^H) = 0$$

$$\overset{''}{R}(X^H,Y^V,Z^V) = 0$$

$$\overset{''}{R}(X^H,Y^V,Z^H) = ((\nabla_X T)(Y,Z))^V$$

$$\overset{''}{R}(X^H,Y^H,Z^V) = (R(X,Y,Z))^V$$

$$\overset{''}{R}(X^H,Y^H,Z^H) = (R(X,Y,Z))^H + \{R(U,T(X,Y))Z$$

$$+ R(X,Y)T(U,Z) + T(R(X,Y)Z,U) + R(\nabla_X U,Y)Z - R(\nabla_Y U,X)Z\}^V$$

şeklindedir.

b) $\overset{''}{R}$ nin indirgenmiş koordinat sistemine göre bileşenleri,

$$\overset{''}{R}{}^{h}_{kqp} = R^{h}_{kqp}, \quad \overset{''}{R}{}^{\bar h}_{\bar k qp} = R^{h}_{kqp}, \quad \overset{''}{R}{}^{\bar h}_{kq\bar p} = -\nabla_p T^{h}_{qk}, \quad \overset{''}{R}{}^{\bar h}_{k\bar q p} = \nabla_q T^{h}_{pk}$$

$$\overset{''}{R}{}^{\bar h}_{kqp} = -\Gamma^{h}_{\ell} R^{\ell}_{qpk} + R^{h}_{k\ell s} T^{s}_{qp} + R^{h}_{sqp} T^{s}_{\ell k} + R^{s}_{kqp} \Gamma^{h}_{s\ell} + R^{h}_{ksp} - R^{h}_{ksq}$$

olup diğer bileşenleri sıfırdır.

3.5.5. TEOREM :

∇,M üzerinde lineer, simetrik bir konneksiyon olsun. Bu durumda ∇'', TM üzerinde simetrikdir.

3.5.6. TEOREM :

(M,g) bir Riemann manifoldu ve ∇,g ye göre bir metrik konneksiyon olsun. Bu durumda ∇'' konneksiyonu; g^H, g^{VH}, g^D ve $\bar g$ metriklerinin hiçbirine göre bir metrik konneksiyon değildir.

3.5.7. TEOREM :

(M,g) bir Riemann manfioldu ∇, g ye göre bir Riemann konneksiyonu olsun. Bu durumda ∇'' ile ∇^{c} konneksiyonları aynı konneksiyonlardır.

3.5.8. TEOREM :

(M,g) bir Riemann manifoldu ve ∇, g ye göre bir Riemann konneksiyonu olsun. Bu durumda aşağıdakiler verilebilir.

1) ∇'', g^{H} ya göre bir Riemann konneksiyonudur,

2) ∇'', g^{VH} ye göre bir Riemann konneksiyonudur,

3) ∇'', g^{D} ye göre bir Riemann konneksiyonu değildir.

4) ∇'', $\bar{g}$ ye göre bir Riemann konneksiyonu değildir.

Teoremin ispatı; Teorem 3.2.7 ile Teorem 3.5.7 ler kullanılarak kolayca görülebilir.

3.6. ∇^{o} Konneksiyonu :

3.6.1. TEOREM :

M üzerinde lineer bir konneksiyon ∇ olsun. Bu durumda $\forall X,Y,U \in \mathcal{T}^{1}_{0}(M)$ için,

(i) $\nabla^{o}_{X^{V}} Y^{V} = 0$ (ii) $\nabla^{o}_{X^{V}} Y^{H} = \frac{1}{2}(R(U,X,Y))^{H}$

(iii) $\nabla^{o}_{X^{H}} Y^{V} = (\nabla_{X} Y)^{V} + \frac{1}{2}(R(U,Y,X))^{H}$

(iv) $\nabla^{o}_{X^{H}} Y^{H} = (\nabla_{X} Y)^{H} - \frac{1}{2}(R(X,Y,U))^{V}$

şartlarını sağlayan ∇^o, TM üzerinde lineer bir konneksiyondur (9).

3.6.2. TEOREM :

∇, M üzerinde lineer bir konneksiyon ve bileşenleri Γ^h_{qp} olsun. ∇^o nin indirgenmiş koordinat sistemine göre bileşenleri Γ^{oA}_{BC} , $1 \leq A,B,C, \leq 2n$ olmak üzere,

$$\Gamma^{oh}_{qp} = \Gamma^h_{qp} + \frac{1}{2}(\Gamma^s_p R^h_{qkp} + \Gamma^\ell_q R^h_{pkq}), \quad \Gamma^{oh}_{\bar{q}p} = \frac{1}{2} R^h_{pkq}$$

$$\Gamma^{oh}_{q\bar{p}} = \frac{1}{2} R^h_{qkp}, \quad \Gamma^{oh}_{\bar{q}\bar{p}} = 0 = \Gamma^{o\bar{h}}_{\bar{q}\bar{p}}, \quad \Gamma^{o\bar{h}}_{\bar{q}p} = \Gamma^h_{qp} - \frac{1}{2}\Gamma^h_\ell R^\ell_{pkq},$$

$$\Gamma^{o\bar{h}}_{qp} = \partial\Gamma^h_{qp} - \frac{1}{2}(\Gamma^s_p \Gamma^h_\ell R^\ell_{qkp} + \Gamma^\ell_q \Gamma^h_s R^s_{pkq} + y^k R^h_{kqp}) - y^k R^h_{pkq},$$

$$\Gamma^{o\bar{h}}_{q\bar{p}} = \Gamma^h_{qp} - \frac{1}{2} \Gamma^h_\ell R^\ell_{qkp}$$

şeklindedir.

3.6.3. TEOREM :

∇, M üzerinde lineer bir konneksiyonun torsiyon tensörü T, bileşenleri T^h_{qp} ve ∇^o nin torsiyon tensörü T^o, indirgenmiş koordinat sistemine göre bileşenleri T^{oA}_{BC} , $1 \leq A,B,C \leq 2n$ olsun. Bu durumda,

a) $\forall X,Y \in \mathcal{T}^1_0(M)$ için,

$$T^o(X^V, Y^V) = 0$$

$$T^o(X^V, Y^H) = (T(X,Y))^V$$

$$T^o(X^H, Y^H) = (T(X,Y))^H + \nu(\hat{R}(X,Y)) - \nu(R(X,Y))$$

dir.

b) T^o nın indirgenmiş koordinat sistemine göre bileşenleri,

$$T^{oh}_{qp} = T^h_{qp}, \quad T^{o\bar h}_{qp} = -\Gamma^h_{\ell} T^{\ell}_{qp} + \Gamma^{\ell}_{q} T^h_{\ell p} + \Gamma^{\ell}_{p} T^h_{q\ell} + y^k(\hat{R}^h_{kqp} - R^h_{kqp})$$

$$T^{o\bar h}_{\bar q p} = T^{o\bar h}_{q\bar p} = T^h_{qp}$$

olup diğer bileşenleri sıfırdır.

3.6.4. TEOREM :

M üzerinde lineer bir ∇ konneksiyonun eğrilik tensörü R olsun. ∇^o nin eğrilik tensör alanı R^o olmak üzere, $\forall X,Y,Z,U \in \mathfrak{T}^1_0(M)$ için,

$$R^o(X^V,Y^V,Z^V) = 0$$

$$R^o(X^V,Y^V,Z^H) = \left(R(X,Y,Z) + \frac{1}{4} R(U,X,R(U,Y,Z)) - \frac{1}{4}R(U,Y,R(U,X,Z))\right)^H$$

$$R^o(X^H,Y^V,Z^V) = -\left(\frac{1}{2}R(Y,Z,X) + \frac{1}{4}R(U,Y,R(U,Z,X))\right)^H$$

$$R^o(X^H,Y^V,Z^H) = \left(\frac{1}{4}R(R(U,Y,Z),X,U) + \frac{1}{2}R(X,Z,Y)\right)^V + \left(\frac{1}{2}(\nabla_X R)(U,Y,Z)\right)^H$$

$$R^o(X^H,Y^H,Z^V) = \left(R(X,Y,Z) + \frac{1}{4}R(R(U,Z,Y),X,U) - \frac{1}{4}R(R(U,Z,X),Y,U)\right)^V + \frac{1}{2}\left((\nabla_X R)(U,Z,Y) - (\nabla_Y R)(U,Z,X)\right)^H$$

$$R^o(X^H,Y^H,Z^H) = \frac{1}{2}\left((\nabla_Z R)(X,Y,U)\right)^V + \left(R(X,Y,Z) + \frac{1}{4}R(U,R(Z,Y,U),X) + \frac{1}{4}R(U,R(X,Z,U),Y) + \frac{1}{2}R(U,R(X,Y,U),Z)\right)^H$$

şeklindedir.

3.6.5. TEOREM :

M üzerinde lineer simetrik bir konneksiyon ∇ olsun.

Bu durumda ∇^{o},TM üzerinde simetrik bir konneksiyondur.

3.6.6. TEOREM :

(M,g) bir Riemann manifoldu ve ∇,g ye göre bir metrik konneksiyon olsun. Bu durumda TM üzerinde ∇^{o} lineer simetrik konneksiyonu; g^{H}, g^{vH}, g^{D} ve $\bar{g}$ metriklerinin hiç birine göre bir metrik konneksiyon değildir.

3.6.7. TEOREM :

(M,g) bir Riemann manifoldu ve ∇,g ye göre bir Riemann konneksiyonu olsun. Bu durumda aşağıdakiler verilebilir.

1) ∇^{o},g^{H} metriğine göre bir Riemann konneksiyonu değildir,

2) ∇^{o},g^{vH} metriğine göre bir Riemann konneksiyonu değildir,

3) ∇^{o},g^{D} metriğine göre bir Riemann konneksiyonudur,

4) ∇^{o},$\bar{g}$ metriğine göre bir Riemann konneksiyonu değildir.

3.7. $\nabla^{\bullet}$ Konneksiyonu :

3.7.1. TEOREM :

M üzerinde lineer bir konneksiyon ∇ olsun.
$\forall\tilde{X},\tilde{Y} \in \mathcal{T}^{1}_{0}(TM)$ için, $\nabla^{\bullet}_{\tilde{X}}\tilde{Y} = \nabla_{\tilde{X}}\tilde{Y} + B(\tilde{X},\tilde{Y})(V)$ ve

$$\vartheta(\nabla^{\bullet}_{h(\tilde{X})}h(\tilde{Y}) + \nabla^{\bullet}_{h(\tilde{Y})}h(\tilde{X})) = 0,\quad h(\nabla^{\bullet}_{h(\tilde{X})}\vartheta(\tilde{Y}) + \nabla^{\bullet}_{\vartheta(\tilde{Y})}h(\tilde{X})) = 0$$

şartını sağlayan $\nabla^{\bullet}$, TM üzerinde lineer bir konneksiyondur. Burada,

$$2B(\tilde{X},\tilde{Y}) = -2(A(\tilde{X},\tilde{Y}) + A(\tilde{Y},\tilde{X})) + (A(h(\tilde{X}),h(\tilde{Y})) + A(h(\tilde{Y}),h(\tilde{X}))$$

$$+ (A(\vartheta(\tilde{X}),\vartheta(\tilde{Y})) + A(\vartheta(\tilde{Y}),\vartheta(\tilde{X})))$$

olup,

$$T_{\tilde{X}}\tilde{Y} = h(\nabla_{\vartheta(\tilde{X})}\vartheta(\tilde{Y})) + \vartheta(\nabla_{\vartheta(\tilde{X})}h(\tilde{Y}))$$

$$O_{\tilde{X}}\tilde{Y} = h(\nabla_{h(\tilde{X})}\vartheta(\tilde{Y})) + \vartheta(\nabla_{h(\tilde{X})}h(\tilde{Y}))$$

$$A(\tilde{X},\tilde{Y}) = T_{\tilde{X}}\tilde{Y} + O_{\tilde{X}}\tilde{Y} = h(\nabla_{\tilde{X}}\vartheta(\tilde{Y})) + \vartheta(\nabla_{\tilde{X}}h(\tilde{Y}))$$

şeklindedir (10).

3.7.1. UYARI :

$\forall X,Y \in \mathcal{T}^1_0(M)$ için $\nabla^\bullet$ konneksiyonunun liftlerde aldığı değer,

(i) $\nabla^\bullet_{X^V} Y^V = 0$, (ii) $\nabla^\bullet_{X^V} Y^H = 0$, (iii) $\nabla^\bullet_{X^H} Y^V = (\nabla_X Y)^V$,

(iv) $\nabla^\bullet_{X^H} Y^H = (\nabla_X Y)^H - \frac{1}{2}\mathbf{v}(R(X,Y))$

şeklindedir (10).

3.7.2. TEOREM :

∇,M üzerinde bir lineer simetrik konneksiyon olsun, Bu durumda kesim 3.3 de tanımlı $\bar{\nabla}$ konneksiyon ile $\nabla^\bullet$ konneksiyonu, TM üzerinde aynı konneksiyonlardır.

BÖLÜM 4

TANJANT MANİFOLD ÜZERİNDE EĞRİLER VE EĞRİLİKLERİ

2n-boyutlu TM tanjant manifold üzerinde tanımlanan Saşaki anlamında g^D Riemann metriği ile birlikte (TM,g^D) Riemann manifoldu üzerinde Riemann konneksiyonu ∇^{o} ve M üzerinde herhangi bir α eğrisi verilmiş olsun.

4.1. Horizontal Lift Eğrileri ve Eğrilikleri

4.1.1. TANIM (Horizontal lift eğrisi):

TM üzerinde bir $\tilde{\alpha}: I \subseteq \mathbb{R} \to TM$

$$\tilde{\alpha}(s) = (\tilde{\alpha}^1(s),\dots,\tilde{\alpha}^n(s),\tilde{\alpha}^{n+1}(s),\dots,\tilde{\alpha}^{2n}(s))$$

$$= ((x^1 o\, \tilde{\alpha})(s),\dots,(x^n o \tilde{\alpha})(s),(y^1 o\, \tilde{\alpha})(s),\dots,(y^n o \tilde{\alpha})(s))$$

eğrisi verilsin. Bu durumda,

1) $\tilde{\alpha}$ nın projeksiyonu α, yani $\alpha = \pi \, o \, \tilde{\alpha}$,

2) $\tilde{\alpha}$ nın teğet vektör alanı bir horizontal vektör alanı,

şartlarını sağlayan $\tilde{\alpha}$ eğrisine, M manifoldu üzerinde bir α eğrisinin, TM ye horizontal lift'i denir ve α^H ile gösterilir (4).

4.1.1. TEOREM :

M üzerinde tanımlanan α eğrisinin birim teğet vektör alanı T olmak üzere α nın TM ye horizontal lift'i

α^H nın teğet vektör alanı,

$$\tilde{T} = \frac{d\alpha^p}{ds}\frac{\partial}{\partial x^p} + (-\Gamma^p_q)\frac{d\alpha^q}{ds}\frac{\partial}{\partial y^p}$$

dir. Burada s ile, α eğrisinin yay-parametresi gösterilmektedir.

İSPAT :

α^H horizontal liftinin tanımının birinci şartından, $(\pi \circ \alpha^H)(s) = \alpha(s)$ ifadesinden $(\alpha^H)^1(s) = \alpha(s),\dots,$ $(\alpha^H)^n(s) = \alpha^n(s)$ bulunur. α^H horizontal liftinin teğet vektör alanı, $\tilde{T} = \frac{d\alpha^p}{ds}\frac{\partial}{\partial x^p} + \frac{d(\alpha^H)^{n+p}}{ds}\frac{\partial}{\partial y^p}$ şeklindedir. Tanımın 2-nci şartından,

$$\frac{d(\alpha^H)^{n+p}}{ds} + \Gamma^p_q\frac{d\alpha^q}{ds} = 0,\ 1 \leq p \leq n$$

dir. O halde α^H horizontal liftinin teğet vektör alanı $\tilde{T} = \frac{d\alpha^p}{ds} + (-\Gamma^p_q)\frac{d\alpha^q}{ds}\frac{\partial}{\partial y^p}$ şeklindedir.

4.1.1. SONUÇ

α^H nın teğet vektör alanı $\tilde{T}$ ve α nın birim teğet vektör alanı T olsun.

1) $\pi_*(\tilde{T}) = T$ dir.

2) α^Hnın teğet vektör alanı, α nın birim teğet vektör alanının TM ye horizontal liftidir.

3) $\tilde{T}$ birim teğet vektör alanıdır.

İSPAT :

1) α^H nın teğet vektör alanı,

$$\tilde{T} = \frac{d\alpha^p}{ds}\frac{\partial}{\partial x^p} - \Gamma^p_q\frac{d\alpha^q}{ds}\frac{\partial}{\partial y^p}$$

şeklindedir. Bu durumda $\pi_*(\tilde{T}) = \frac{d\alpha^p}{ds}\frac{\partial}{\partial x^p} = T$ dır.

2) α nın birim teğet vektör alanı T nin horizontal lifti $T^H = \frac{d\alpha^p}{ds} + (-\Gamma^p_q)\frac{d\alpha^q}{ds}\frac{\partial}{\partial y^p}$ olup, Teorem 4.1.1 den $\tilde{T} = T^H$ dir.

3) $\tilde{T}$ nın normunun karesi,

$$\|\tilde{T}\|^2 = \|T^H\|^2 = g^D(T^H,T^H) = g(T,T)\circ\pi = 1$$

olup, T^H birim vektör alanıdır.

M üzerinde bir α eğrisinin TM ye horizontal lifti olan α^H eğrisinin, TM üzerindeki Frenet vektör alanları ile yüksek mertebeden eğriliklerini verelim.

α^H boyunca T^H nın türetilmiş vektör alanı

$$\nabla^o_{T^H} T^H = (\nabla_T T)^H - \frac{1}{2}(R(T,T,U))^V, \quad U\in\mathcal{J}^1_0(M)$$

şeklindedir. T^H birim teğet vektör alanı ve ∇^o, g^D ye göre bir metrik konneksiyon olduğundan, $g^D(\nabla^o_{T^H}T^H, T^H) = 0$ ifadesi bulunur ve buradan $\nabla^o_{T^H}T^H \perp T^H$ dir. $\nabla^o_{T^H}T^H$ doğrultusunda birim vektör alanı $\tilde{V}_1$ ve $\tilde{k}_1 = \|\nabla^o_{T^H}T^H\|$ olmak üzere $\nabla^o_{T^H}T^H = \tilde{k}_1\tilde{V}_1$ şeklinde olup $\tilde{V}_1$ vektör alanı T^H birim teğet vektör alanına diktir.

α^H boyunca $\tilde{V}_1$ nin türetilmiş vektör alanı birisi T^H ve $\tilde{V}_1$ cinsinden diğeri de T^H ve $\tilde{V}_1$ a dik iki bileşene ayrılırsa

$$\nabla^o_{T^H}\tilde{V}_1 = (\nabla^o_{T^H}\tilde{V}_1)_1 + (\nabla^o_{T^H}\tilde{V}_1)_2$$

şeklinde yazılabilir. $(\nabla^{o}_{T^H}\tilde{V}_1)_2$ doğrultusunda birim vektör alanı $\tilde{V}_1$ ve $\tilde{k}_2 = \|(\nabla^{o}_{T^H}\tilde{V}_1)_2\|$ olmak üzere,

$$(\nabla^{o}_{T^H}\tilde{V}_1)_2 = \tilde{k}_2\tilde{V}_2$$

şeklindedir. $\tilde{V}_2$ birim vektör alanı $\tilde{V}_1$ ve T^H birim vektör alanlarına dik olduğundan,

$$\nabla^{o}_{T^H}\tilde{V}_1 = -\tilde{k}_1 T^H + \tilde{k}_2\tilde{V}_2$$

dir.

α^H boyunca $\tilde{V}_2$ nin türetilmiş vektör alanı birisi $T^H,\tilde{V}_1,\tilde{V}_2$ cinsinden diğeri de $T^H,\tilde{V}_1$ ve $\tilde{V}_2$ a dik iki bileşene ayrılırsa,

$$\nabla^{o}_{T^H}\tilde{V}_2 = (\nabla^{o}_{T^H}\tilde{V}_2)_1 + (\nabla^{o}_{T^H}\tilde{V}_2)_2$$

şeklinde yazılabilir. $(\nabla^{o}_{T^H}\tilde{V}_2)_2$ doğrultusunda birim vektör alanı $\tilde{V}_3$ ve $\tilde{k}_3 = \|(\nabla^{o}_{T^H}\tilde{V}_2)_2\|$ olmak üzere,

$$(\nabla^{o}_{T^H}\tilde{V}_2)_2 = \tilde{k}_3\tilde{V}_3$$

şeklindedir. $\tilde{V}_3$ birim vektör alanı $\tilde{V}_2,\tilde{V}_1$ ve T^H birim vektör alanlarına dik olduğundan,

$$\nabla^{o}_{T^H}\tilde{V}_2 = -\tilde{k}_2\tilde{V}_1 + \tilde{k}_3\tilde{V}_3$$

dir.

Bu düşünceye devam edilirse, $\tilde{k}_B (1 \leq B \leq 2n-1)$ lerden hiçbiri sıfır olmamak üzere,

$$T^H = \tilde{V}_0, \tilde{V}_1, \ldots, \tilde{V}_{2n-1}$$

şeklinde 2n-tane ortonormal vektör alanı elde edilir.

Bunun için α^H boyunca $\tilde{V}_B$ nin türetilmiş vektör alanı $\nabla^o_{T^H}\tilde{V}_B$, birisi $T^H, \tilde{V}_1, \ldots, \tilde{V}_B$ cinsinden diğeride bunlara dik iki bileşene ayrılırsa,

$$\nabla^o_{T^H}\tilde{V}_B = (\nabla^o_{T^H}\tilde{V}_B)_1 + (\nabla^o_{T^H}\tilde{V}_B)_2$$

şeklinde yazılabilir. $(\nabla^o_{T^H}\tilde{V}_B)_2$ doğrultusunda birim vektör alanı $\tilde{V}_{B+1}$ ve $\tilde{k}_{B+1} = \|(\nabla^o_{T^H}\tilde{V}_B)_2\|$ olmak üzere

$$(\nabla^o_{T^H}\tilde{V}_B)_2 = \tilde{k}_{B+1}\tilde{V}_{B+1} \qquad 1 \leq B \cdot 2n - 1$$

şeklindedir. $\tilde{V}_{B+1}$ birim vektör alanı $\tilde{V}_B, \tilde{V}_{B-1}, \ldots, \tilde{V}_1$ ve T^H birim vektör alanlarına dik olduğundan,

$$\nabla^o_{T^H}\tilde{V}_B = -\tilde{k}_B\, \tilde{V}_{B-1} + \tilde{k}_{B+1}\tilde{V}_{B+1}\,, \quad \tilde{k}_0 = \tilde{k}_{2n} = 0, \ 0 \leq B \leq 2n-1$$

dir.

Bu şekilde elde edilen ortonormal

$$\{T^H = \tilde{V}_0, \tilde{V}_1, \ldots, \tilde{V}_{2n-1}\}$$

sistemine α^H eğrisinin Frenet çatısı ve $\tilde{k}_B$ ye α^H nın B-inci eğriliği denir.

Şimdi de M üzerinde bir α eğrisinin Frenet çatısı ve yüksek mertebeden eğrilikleri ile α nın TM ye horizontal lifti α^H nın Frenet çatısı ve yüksek mertebeden eğrilikleri arasındaki bağıntıları verelim.

4.1.2. TEOREM :

α eğrisinin birim teğet vektör alanı T, α nın TM ye horizontal lifti α^H nın birim teğet vektör alanı T^H olmak üzere,

$$\pi_*(\nabla^o_{T^H}T^H) = \nabla_T T$$

dir. (Bir diğer ifade ile, bu hal için π konneksiyon koruyan bir dönüşümdür).

İSPAT :

$$\pi_*(\nabla^o_{T^H}T^H) = \pi_*((\nabla_T T)^H - \frac{1}{2}(R(T,T,U))^V), \quad U \in \mathcal{J}^1_0(M)$$

$$= \pi_*((\nabla_T T)^H)$$

$$= \nabla_T T$$

dir.

4.1.3. TEOREM :

M üzerinde bir α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet çatısı $\{T_{\alpha(s)} = V_{0_{\alpha(s)}}, V_{1_{\alpha(s)}}, \ldots, V_{n-1_{\alpha(s)}}\}$, $1 \leq p \leq n-1$ olmak üzere α nın p-inci eğriliği k_p ve α nın TM ye horizantal lifti α^H nın, $\alpha^H(s)$ noktasındaki Frenet çatısı $\{\widetilde{T}_{\alpha^H(s)} = \widetilde{V}_{0_{\alpha^H(s)}}, \widetilde{V}_{1_{\alpha^H(s)}}, \ldots, \widetilde{V}_{2n-1_{\alpha^H(s)}}\}$ $1 \leq B \leq 2n-1$ olmak üzere α^H nın B-inci eğriliği $\widetilde{k}_B$ olsun.

1) α^H nın ilk n-tane Frenet vektörleri ile ilk n-tane eğrilikleri gözönüne alınsın. $1 \leq p \leq n-1$ olmak üzere,

$$\widetilde{k}_1^2\Big|_{\alpha^H(s)} = k_1^2\Big|_{\alpha(s)} + \|K(\nabla^o_{T^H_{\alpha^H(s)}} T^H_{\alpha^H(s)})\|^2$$

$$\pi_*(\widetilde{V}_{p_{\alpha^H(s)}}) = \xi_p V_{p_{\alpha(s)}} + \frac{1}{\widetilde{k}_p\big|_{\alpha^H(s)}} B_{p-1}, \quad \xi_p = \frac{k_p\big|_{\alpha(s)}}{\widetilde{k}_p\big|_{\alpha^H(s)}}$$

$$\pi_*(\nabla^o_{T^H_{\alpha^H(s)}} \widetilde{V}_{p_{\alpha^H(s)}})_1 = (\nabla_{T_{\alpha(s)}} V_{p_{\alpha(s)}})_1 + \sum_{q=2}^{p} \frac{\lambda_{q+1}}{\widetilde{k}_q\big|_{\alpha^H(s)}} B_{q-1},$$

$$\pi_*(\nabla^o_{T^H_{\alpha^H(s)}} \widetilde{V}_{p_{\alpha^H(s)}})_2 = (\nabla_{T_{\alpha(s)}} V_{p_{\alpha(s)}})_2 + B_p$$

$$\widetilde{k}^2_{p+1}\big|_{\alpha^H(s)} = k^2_{p+1}\big|_{\alpha(s)} + A_p$$

dir. Burada,

$$B_0 = 0 \text{ ve } B_p = \pi_*(\nabla^o_{T^H_{\alpha^H(s)}} \widetilde{V}_{p_{\alpha^H(s)}}) - \nabla_{T_{\alpha(s)}} V_{p_{\alpha(s)}}$$

$$- \sum_{q=2}^{p} \frac{\lambda_{q+1}}{\widetilde{k}_q\big|_{\alpha^H(s)}} B_{q-1}, \quad \lambda_{q+1} \in \mathbb{R}$$

$$A_p = 2g((\nabla_{T_{\alpha(s)}} V_{p_{\alpha(s)}})_2, B_p) + \|B_p\|^2 + \|K(\nabla^o_{T^H_{\alpha^H(s)}} \widetilde{V}_{p_{\alpha^H(s)}})_2\|^2$$

şeklindedir.

2) α^H eğrisinin $0 \leq p \leq n-1$ olmak üzere $\widetilde{V}_{n+p_{\alpha^H(s)}}$ Frenet vektörleri ile $\widetilde{k}_{n+p}$ eğriliklerini gözönüne alalım. Bu durumda,

$$\pi_*(\widetilde{V}_{n+p_{\alpha^H(s)}}) = \frac{1}{\widetilde{k}_{n+p}\big|_{\alpha^H(s)}} B_{n+p-1}$$

$$\pi_*(\nabla^o_{T^H_{\alpha^H(s)}} \widetilde{V}_{n+p_{\alpha^H(s)}})_1 = (\nabla_{T_{\alpha(s)}} V_{n-1_{\alpha(s)}})_1 + \sum_{q=1}^{n+p} \frac{\lambda_{q+1}}{\widetilde{k}_q\big|_{\alpha^H(s)}} B_{q-1}$$

$$\pi_\star(\nabla^{o}_{T^H_{\alpha^H(s)}} \tilde{V}_{n+p_{\alpha^H(s)}})_2 = B_{n+p}$$

$$\tilde{k}^2_{n+p+1}\Big|_{\alpha^H(s)} = A_{n+p}$$

dir. Burada,

$$B_{n+p} = \pi_\star(\nabla^{o}_{T^H_{\alpha^H(s)}} V_{n+p_{\alpha^H(s)}}) - \nabla_{T_{\alpha(s)}} V_{n-1_{\alpha(s)}}$$

$$- \sum_{q=2}^{n+p} \frac{\lambda_{q+1}}{\tilde{k}_q\Big|_{\alpha^H(s)}} B_{q-1}$$

ve

$$A_{n+p} = \| B_{n+p}\|^2 + \| K(\nabla^{o}_{T^H_{\alpha^H(s)}} V_{n+p_{\alpha^H(s)}})_2\|^2$$

şeklindedir.

İSPAT :

Teoremin ispatı tümevarım yöntemiyle yapılacaktır.

1) α^H nın 1-inci eğriliği $\tilde{k}_1$ olmak üzere,

$$\tilde{k}^2_1\Big|_{\alpha^H(s)} = \| \nabla^{o}_{T^H_{\alpha^H(s)}} T^H_{\alpha^H(s)} \|^2$$

$$= g(\pi_\star(\nabla^{o}_{T^H_{\alpha^H(s)}} T^H_{\alpha^H(s)}), \pi_\star(\nabla^{o}_{T^H_{\alpha^H(s)}} T^H_{\alpha^H(s)}))$$

$$+ g(K(\nabla^{o}_{T^H_{\alpha^H(s)}} T^H_{\alpha^H(s)}), K(\nabla^{o}_{T^H_{\alpha^H(s)}} T^H_{\alpha^H(s)}))$$

$$= k^2_1\Big|_{\alpha(s)} + \| K(\nabla^{o}_{T^H_{\alpha^H(s)}} T^H_{\alpha^H(s)})\|^2$$

dir.

α^H'nın $\alpha^H(s)$ noktasındaki 2-inci Frenet vektörü $\tilde{V}_1{}_{\alpha^H(s)}$ 'nin projeksiyonu

$$\pi_*(\tilde{V}_1{}_{\alpha^H(s)}) = \pi_*\left(\frac{1}{\tilde{k}_1\Big|_{\alpha^H(s)}} \nabla^o_{T^H_{\alpha^H(s)}} T^H_{\alpha^H(s)}\right)$$

$$= \frac{k_1\Big|_{\alpha(s)}}{\tilde{k}_1\Big|_{\alpha^H(s)}} V_1{}_{\alpha(s)} = \xi_1 V_1{}_{\alpha(s)}$$

dir. α^H boyunca $\tilde{V}_1{}_{\alpha^H(s)}$ nin türetilmiş vektörünün 1-inci bileşeninin projeksiyonu,

$$\pi_*(\nabla^o_{T^H_{\alpha^H(s)}} \tilde{V}_1{}_{\alpha^H(s)})_1 = \pi_*(\lambda_1 T^H_{\alpha^H(s)} + \lambda_2 \tilde{V}_1{}_{\alpha^H(s)})$$

$$= \lambda_1 T_{\alpha(s)} + \lambda_2 \xi_1 V_1{}_{\alpha(s)} = (\nabla_{T_{\alpha(s)}} V_1{}_{\alpha(s)})_1$$

olup $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ dir.

$$\pi_*(\nabla^o_{T^H_{\alpha^H(s)}} \tilde{V}_1{}_{\alpha^H(s)})_2 = \pi_*(\nabla^o_{T^H_{\alpha^H(s)}} \tilde{V}_1{}_{\alpha^H(s)})$$

$$- \pi_*(\nabla^o_{T^H_{\alpha^H(s)}} \tilde{V}_1{}_{\alpha^H(s)})_1$$

$$= \pi_*(\nabla^o_{T^H_{\alpha^H(s)}} \tilde{V}_1{}_{\alpha^H(s)}) + (\nabla_{T_{\alpha(s)}} V_1{}_{\alpha(s)})_2 - \nabla_{T_{\alpha(s)}} V_1{}_{\alpha(s)}$$

$$= (\nabla_{T_{\alpha(s)}} V_1{}_{\alpha(s)})_2 + B_1$$

olup burada,

$$B_1 = \pi_*(\nabla^o_{T^H_{\alpha^H(s)}} \tilde{V}_1{}_{\alpha^H(s)}) - \nabla_{T_{\alpha(s)}} V_1{}_{\alpha(s)}$$

dir.

α^H nın 2-inci eğriliği $\tilde{k}_2$ olmak üzere,

$$\tilde{k}_2^2\Big|_{\alpha^H(s)} = \|(\nabla^o_{T^H_{\alpha^H(s)}} \tilde{V}_1{}_{\alpha^H(s)})_2\|^2 = k_2^2\Big|_{\alpha(s)} + A_1$$

dir. Burada

$$A_1 = 2g((\nabla_{T_{\alpha(s)}} V_1{}_{\alpha(s)})_2, B_1) + \|B_1\|^2 + \|K(\nabla^o_{T^H_{\alpha^H(s)}} V_1{}_{\alpha^H(s)})_2\|^2$$

şeklindedir.

$p = 1$ için teoremin ispatı verildi. Şimdi $p - 1$ için teoremin doğruluğunu kabul edelim.

α^H nın $\alpha^H(s)$ noktasındaki $(p + 1)$-inci Frenet vektörü $\tilde{V}_p{}_{\alpha^H(s)}$ nin projeksiyonu,

$$\pi_*(\tilde{V}_p{}_{\alpha^H(s)}) = \pi_*(\frac{1}{\tilde{k}_p\Big|_{\alpha^H(s)}}(\nabla^o_{T^H_{\alpha^H(s)}} \tilde{V}_{p-1}{}_{\alpha^H(s)})_2)$$

$$= \frac{1}{\tilde{k}_p\Big|_{\alpha^H(s)}}((\nabla_{T_{\alpha(s)}} V_{p-1}{}_{\alpha(s)})_2 + B_{p-1})$$

$$= \xi_p V_p{}_{\alpha(s)} + \frac{1}{\tilde{k}_p\Big|_{\alpha^H(s)}} B_{p-1}$$

olup $\xi_p = \dfrac{k_p\Big|_{\alpha(s)}}{\tilde{k}_p\Big|_{\alpha^H(s)}}$ dir.

$\tilde{V}_p{}_{\alpha^H(s)}$ nin α^H boyunca türetilmiş vektörünün 1-inci bileşinin projeksiyonu,

$$\pi_*(\nabla^o_{T^H_{\alpha^H(s)}} \tilde{V}_p{}_{\alpha^H(s)})_1 = \pi_*(\nabla^o_{T^H_{\alpha^H(s)}} \tilde{V}_{p-1}{}_{\alpha^H(s)})_1 + \lambda_{p+1}\pi_*(\tilde{V}_p{}_{\alpha^H(s)})$$

$$= (\nabla_{T_{\alpha(s)}} \tilde{V}_{p-1\,\alpha(s)})_1 + \sum_{q=2}^{p-1} \frac{\lambda_{q+1}}{\tilde{k}_q\big|_{\alpha^H(s)}} B_{q-1} + \lambda_{p+1}\xi_p V_{p_{\alpha^H(s)}}$$

$$+ \frac{\lambda_{p+1}}{\tilde{k}_p\big|_{\alpha^H(s)}} B_{p-1}$$

$$= (\nabla_{T_{\alpha(s)}} V_{p_{\alpha(s)}})_1 + \sum_{q=2}^{p} \frac{\lambda_{q+1}}{\tilde{k}_q\big|_{\alpha^H(s)}} B_{q-1}$$

dir; 2-inci bileşeninin projeksiyonu,

$$\pi_\star(\overset{o}{\nabla}_{T^H_{\alpha^H(s)}} \tilde{V}_{p_{\alpha^H(s)}})_2 = \pi_\star(\overset{o}{\nabla}_{T^H_{\alpha^H(s)}} \tilde{V}_{p_{\alpha^H(s)}})$$

$$- \pi_\star(\overset{o}{\nabla}_{T^H_{\alpha^H(s)}} \tilde{\tilde{V}}_{p_{\alpha^H(s)}})_1$$

$$= (\nabla_{T_{\alpha(s)}} V_{p_{\alpha(s)}})_2 + B_p$$

olup, $B_p = \pi_\star(\overset{o}{\nabla}_{T^H_{\alpha^H(s)}} \tilde{V}_{p_{\alpha^H(s)}}) - \nabla_{T_{\alpha(s)}} V_{p_{\alpha(s)}}$

$$- \sum_{q=2}^{p} \frac{\lambda_{q+1}}{\tilde{k}_q\big|_{\alpha^H(s)}} B_{q-1}$$

dir. α^H nın $\alpha(s)$ noktasındaki $(p+1)$-inci eğriliğinin karesi,

$$\tilde{k}^2_{p+1}\big|_{\alpha^H(s)} = \| (\overset{o}{\nabla}_{T^H_{\alpha^H(s)}} \tilde{V}_{p_{\alpha^H(s)}})_2 \|^2$$

$$= g(\pi_\star(\overset{o}{\nabla}_{T^H_{\alpha^H(s)}} \tilde{V}_{p_{\alpha^H(s)}})_2, \pi_\star(\overset{o}{\nabla}_{T^H_{\alpha^H(s)}} V_{p_{\alpha^H(s)}})_2)$$

$$+ g(K(\overset{o}{\nabla}_{T^H_{\alpha^H(s)}} \tilde{V}_{p_{\alpha^H(s)}})_2, K(\overset{o}{\nabla}_{T^H_{\alpha^H(s)}} V_{p_{\alpha^H(s)}})_2)$$

$$\tilde{k}^2_{p+1}\Big|_{\alpha^H(s)} = k^2_{p+1}\Big|_{\alpha(s)} + A_p$$

olup,

$$A_p = 2g((\nabla_{T_{\alpha(s)}} V_{p_{\alpha(s)}})_2, B_p) + \|B_p\|^2 + \|K(\nabla^o_{T^H_{\alpha^H(s)}} \tilde{V}_{p_{\alpha^H(s)}})_2\|^2$$

dir.

2) α^H nın $\alpha^H(s)$ noktasındaki $(n+1)$-inci Frenet vektörü $\tilde{V}_{n_{\alpha^H(s)}}$ nin projeksiyonu,

$$\pi_*(\tilde{V}_{n_{\alpha^H(s)}}) = \pi_*\Big(\frac{1}{\tilde{k}_n\big|_{\alpha^H(s)}}(\nabla^o_{T^H_{\alpha^H(s)}} \tilde{V}_{n-1_{\alpha^H(s)}})_2\Big)$$

$$= \frac{1}{\tilde{k}_n\big|_{\alpha^H(s)}}((\nabla_{T_{\alpha(s)}} V_{n-1_{\alpha(s)}})_2 + B_{n-1})$$

$$= \frac{1}{\tilde{k}_n\big|_{\alpha^H(s)}} B_{n-1}$$

dir.

α^H boyunca $\tilde{V}_{n_{\alpha^H(s)}}$ nin türetilmiş vektör alanının 1-inci bileşeninin projeksiyonu,

$$\pi_*(\nabla^o_{T^H_{\alpha^H(s)}} \tilde{V}_{n_{\alpha^H(s)}})_1 = \pi_*(\nabla^o_{T^H_{\alpha^H(s)}} \tilde{V}_{n-1_{\alpha^H(s)}})_1 + \lambda_{n+1}\pi_*(\tilde{V}_{n_{\alpha^H(s)}})$$

$$= (\nabla_{T_{\alpha(s)}} V_{n-1_{\alpha(s)}})_1 + \sum_{q=2}^{n} \frac{\lambda_{q+1}}{\tilde{k}_q\big|_{\alpha^H(s)}} B_{q-1}$$

olup, 2-inci bileşeninin projeksiyonu,

$$\pi_\star(\nabla^o_{T^H_{\alpha^H(s)}} \tilde{V}_{n_{\alpha^H(s)}})_2 = \pi_\star(\nabla^o_{T^H_{\alpha^H(s)}} \tilde{V}_{n_{\alpha^H(s)}}) - (\nabla_{T_{\alpha(s)}} V_{n-1_{\alpha(s)}})_1$$

$$- \sum_{q=2}^{n} \frac{\lambda_{q+1}}{\tilde{k}_q\Big|_{\alpha^H(s)}} B_{q-1}$$

olup, $B_n = \pi_\star(\nabla^o_{T^H_{\alpha^H(s)}} \tilde{V}_{n_{\alpha^H(s)}}) - \nabla_{T_{\alpha(s)}} V_{n_{\alpha(s)}}$

$$- \sum_{q=2}^{n} \frac{\lambda_{q+1}}{\tilde{k}_q\Big|_{\alpha^H(s)}} B_{q-1}$$

dir.

α^H nın $(n+1)$-inci eğriliği $\tilde{k}_{n+1}$ olmak üzere,

$$\tilde{k}^2_{n+1}\Big|_{\alpha^H(s)} = \|(\nabla^o_{T^H_{\alpha^H(s)}} \tilde{V}_{n_{\alpha^H(s)}})_2\|^2$$

$$= \|B_n\|^2 + \|K(\nabla^o_{T^H_{\alpha^H(s)}} \tilde{V}_{n_{\alpha^H(s)}})_2\|^2 = A_n$$

dir.

$P = 1$ için teoremin 2-inci şıkkının ispatı verildi. $p-1$ için teoremin 2-inci şıkkı doğru olsun.

α^H nın $\alpha^H(s)$ noktasındaki $(n+p+1)$-inci Frenet vektörü $\tilde{V}_{n+p_{\alpha^H(s)}}$ nin projeksiyonu,

$$\pi_\star(\tilde{V}_{n+p_{\alpha^H(s)}}) = \pi_\star\Big(\frac{1}{\tilde{k}_{n+p}\Big|_{\alpha^H(s)}} (\nabla^o_{T^H_{\alpha^H(s)}} \tilde{V}_{n+p-1_{\alpha^H(s)}})_2\Big)$$

$$= \frac{1}{\tilde{k}_{n+p}\Big|_{\alpha^H(s)}} B_{n+p-1}, \quad 1 \leqslant p \leqslant n-1$$

dir.

α^H boyunca $\tilde{V}_{n+p}{}_{\alpha^H(s)}$ 'nin türetilmiş vektörünün 1-inci bileşeninin projeksiyonu,

$$\pi_\star(\nabla^o_{T^H_{\alpha^H(s)}} \tilde{V}_{n+p}{}_{\alpha^H(s)})_1 = \pi_\star(\nabla^o_{T^H_{\alpha^H(s)}} \tilde{V}_{n+p-1}{}_{\alpha^H(s)})_1 + \lambda_{n+p+1}\pi_\star(\tilde{V}_{n+p}{}_{\alpha^H(s)})$$

$$= (\nabla_{T_{\alpha(s)}} V_{n-1}{}_{\alpha(s)})_1 + \sum_{q=2}^{n+p} \frac{\lambda_{q+1}}{\tilde{k}_q\big|_{\alpha^H(s)}} B_{q-1}$$

olup, 2-inci bileşeninin projeksiyonu,

$$\pi_\star(\nabla^o_{T^H_{\alpha^H(s)}} \tilde{V}_{n+p}{}_{\alpha^H(s)})_2 = \pi_\star(\nabla^o_{T^H_{\alpha^H(s)}} \tilde{V}_{n+p}{}_{\alpha^H(s)})$$

$$- \nabla_{T_{\alpha(s)}} V_{n-1}{}_{\alpha(s)} - \sum_{q=2}^{n+p} \frac{\lambda_{q+1}}{\tilde{k}_q\big|_{\alpha^H(s)}} B_{q-1}$$

$$= B_{n+p}$$

dir.

α^H nın $(n+p+1)$-inci eğriliği $\tilde{k}_{n+p+1}$ olmak üzere,

$$\tilde{k}^2_{n+p+1}\big|_{\alpha^H(s)} = \| (\nabla^o_{T^H_{\alpha^H(s)}} \tilde{V}_{n+p}{}_{\alpha(s)})_2 \|^2$$

$$= \|B_{n+p}\|^2 + \|K(\nabla^o_{T^H_{\alpha^H(s)}} \tilde{V}_{n+p}{}_{\alpha^H(s)})_2\|^2$$

$$= A_{n+p}$$

dir.

TM üzerinde α^H eğrisinin $0 \leqslant p \leqslant n-1$ olmak üzere $\tilde{k}_{n+p}$ eğrilikleri ile α eğrisinin k_p eğrilikleri arasında bir bağıntı yoktur.

Eğer TM tanjant manifoldunu g^{vH} yarı-Riemann metriği ile birlikte düşünecek olursak (TM, g^{vH}) ikilisi bir yarı-Riemann manifoldu olur. g^{vH} metriğine göre TM üzerinde ∇^H metrik konneksiyonunu gözönüne alırsak aşağıdaki bilgiler elde edilir.

4.1.4. TEOREM :

TM üzerinde bir α^H horizontal lift eğrisini gözönüne alalım. $1 \leq i \leq n-1$ olmak üzere α^H nın $(i+1)$-inci Frenet vektör alanı $\tilde{V}_i$, i-inci eğriliği $\tilde{k}_i$ olsun. Bu durumda,

$$\tilde{k}_i = k_i \circ \pi \quad \text{ve} \quad \tilde{V}_i = V_i^H$$

dir.

İSPAT :

Teoremin ispatı tümevarımla yapılacaktır. α^H nın 1-inci eğriliği $\tilde{k}_1$ olmak üzere,

$$\tilde{k}_1^2 = \|\nabla^H_{T^H} T^H\|^2 = g^{vH}((\nabla_T T)^H, (\nabla_T T)^H) = k_1^2 \circ \pi$$

olup $\tilde{k}_1 = k_1 \circ \pi$ dir.

α nın 2-inci Frenet vektör alanı V_1 olmak üzere,

$$V_1^H = \left(\frac{1}{k_1}(\nabla_T T)\right)^H = \frac{1}{k_1 \circ \pi}(\nabla_T T)^H = \frac{1}{\tilde{k}_1}\nabla^H_{T^H} T^H = \tilde{V}_1$$

dir.

α^H nın i-1-inci eğriliği $\tilde{k}_{i-1} = k_{i-1} \circ \pi$ ve α^H nin i-inci Frenet vektör alanı $\tilde{V}_{i-1} = V_{i-1}^H$ olsun.

$(\nabla_T V_i)_2$ vektör alanı $T, V_1, \ldots, V_i$ birim vektör alanlarına dik olduğundan g^{vH} metriğine göre $((\nabla_T V_i)_2)^H$ vektör alanı $T^H, V_1^H, \ldots, V_i^H$ birim vektör alanlarına dikdir. Buradan,

$$((\nabla_T V_i)_2)^H = (\nabla_{T^H}^H V_i^H)_2$$

olup,

$$((\nabla_T V_i)_2)^H = ((\nabla_T V_i)^H)_2$$

dir.

α^H nın i-inci eğriliği $\tilde{k}_i$ olmak üzere,

$$\tilde{k}_i^2 = \| (\nabla_{T^H}^H V_{i-1}^H)_2 \|^2 = g^{vH}(((\nabla_T V_i)_2)^H, ((\nabla_T V_i)_2)^H) = k_i^2 \circ \pi$$

olup $\tilde{k}_i = k_i \circ \pi$ dir.

α nın $(i+1)$-inci Frenet vektör alanı V_i olmak üzere,

$$V_i^H = \left(\frac{1}{k_i}(\nabla_T V_{i-1})_2\right)^H = \frac{1}{\tilde{k}_i}(\nabla_{T^H}^H V_{i-1}^H)_2 = \tilde{V}_i$$

dir.

4.1.2. SONUÇ :

TM üzerinde bir α^H horizontal lift eğrisini gözönüne alalım. α^H nın n-inci eğriliği $\tilde{k}_n = 0$ dir.

İSPAT :

α^H nın n-inci eğriliği $\tilde{k}_n$ olmak üzere,

$$\tilde{k}_n^2 = \| (\nabla_{T^H}^H V_{n-1}^H)_2 \|^2$$

$$= g^{vH}(((\nabla_T V_{n-1})^H)_2, ((\nabla_T V_{n-1})^H)_2)$$

$$\tilde{k}_n^2 = g((\nabla_T V_{n-1})_2, (\nabla_T V_{n-1})_2) \circ \pi$$
$$= k_n^2 \circ \pi$$
$$= 0$$

olup $\tilde{k}_n = 0$ dir.

4.2. İzdüşürülebilir Eğriler ve Eğrilikleri

4.2.1. TANIM (İzdüşürülebilir eğri) :

TM üzerinde bir, $\tilde{\alpha}: I \subseteq \mathbb{R} \to TM$ eğrisi verilmiş olsun. Bu durumda $\alpha = \pi \circ \tilde{\alpha}$ olacak şekilde M deki bir α eğrisine, TM de $\tilde{\alpha}$ eğrisinin M ye izdüşümü (projeksiyonu veya projeksiyon eğrisi) ve $\tilde{\alpha}$ ya da izdüşürülebilir (projekte edilebilir) eğri denir (3).

$\tilde{\alpha}$ nın bileşenleri,

$$\tilde{\alpha}(t) = ((x^1 \circ \alpha)(t), \ldots (x^n \circ \alpha)(t), (y^1 \circ \tilde{\alpha})(t), \ldots, (y^n \circ \tilde{\alpha})(t))$$

olup $\tilde{\alpha}$ nın teğet vektör alanı

$$\tilde{T} = \frac{d\alpha^p}{dt} \frac{\partial}{\partial x^p} + \frac{d\tilde{\alpha}^{n+p}}{dt} \frac{\partial}{\partial y^p}$$

dir. $\tilde{\alpha}$ nın t parametresini, genelliği bozmaksızın yay-parametresi olarak düşünelim.

4.2.1. SONUÇ :

$\tilde{\alpha}$ eğrisinin birim teğet vektör alanının projeksiyonu α eğrisinin teğet vektör alanıdır.

İSPAT :

$\tilde{\alpha}$ eğrisinin birim teğet vektör alanının projeksiyonu

$$\pi_*(\widetilde{T}) = \frac{d\alpha^p}{dt}\frac{\partial}{\partial x^p} = T$$

dir.

4.2.2. SONUÇ

$\widetilde{\alpha}$ izdüşürülebilir eğrisinin birim teğet vektör alanı $\widetilde{T}$ olsun. $\widetilde{T}$ izdüşürülebilir bir vektör alanı ise,

$$\widetilde{T} = T^H + W_1 \ , \ W_1 \in {}^V\mathcal{T}_0^1(TM)$$

dir (5).

4.2.1. TEOREM :

$\widetilde{\alpha}$ izdüşürülebilir eğrisinin birim teğet vektör alanı $\widetilde{T}$ olmak üzere,

$$\pi_*(\overset{o}{\nabla}_{\widetilde{T}}\widetilde{T}) = \nabla_T T + F_1$$

dir. Burada, $F_1 = \pi_*(\overset{o}{\nabla}_{T^H}W_1 + \overset{o}{\nabla}_{W_1}(T^H + W_1))$ şeklindedir.

İSPAT :

$\widetilde{\alpha}$ boyunca $\widetilde{T}$ nin türetilmiş vektör alanı,

$$\overset{o}{\nabla}_{\widetilde{T}}\widetilde{T} = (\nabla_T T)^H - \frac{1}{2}(R(T,T,U))^V + \overset{o}{\nabla}_{T^H}W_1 + \overset{o}{\nabla}_{W_1}(T^H + W_1)$$

olup $\overset{o}{\nabla}_{\widetilde{T}}\widetilde{T}$ nin projeksiyonu,

$$\pi_*(\overset{o}{\nabla}_{\widetilde{T}}\widetilde{T}) = \nabla_T T + \pi_*(\overset{o}{\nabla}_{T^H}W_1 + \overset{o}{\nabla}_{W_1}(T^H + W_1)) = \nabla_T T + F_1$$

dir. Burada $F_1 = \pi_*(\overset{o}{\nabla}_{T^H}W_1 + \overset{o}{\nabla}_{W_1}(T^H + W_1))$ şeklindedir.

4.2.2. TEOREM :

M üzerinde bir α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki Frenet çatısı $\{T_{\alpha(t)} = V_{0_{\alpha(t)}}, \dots, V_{n-1_{\alpha(t)}}\}$, $1 \leq p \leq n-1$ olmak üzere α nın p-inci eğriliği k_p ve M ye izdüşümü α olan TM üzerindeki izdüşürülebilir eğri $\tilde{\alpha}$ nın, Frenet çatısı $\{\tilde{T}_{\tilde{\alpha}(t)} = \tilde{V}_{0_{\tilde{\alpha}(t)}}, \dots, \tilde{V}_{2n-1_{\tilde{\alpha}(t)}}\}$, $1 \leq B \leq 2n-1$ olmak üzere $\tilde{\alpha}$ nın B-inci eğriliği $\tilde{k}_B$ olsun.

1) $\tilde{\alpha}$ nın ilk n-tane Frenet vektörleri ile ilk n-tane eğrilikleri gözönüne alınsın. $1 \leq p \leq n-1$ olmak üzere,

$$\tilde{k}_1^2\Big|_{\tilde{\alpha}(t)} = k_1^2\Big|_{\alpha(t)} + A_1 ,$$

$$A_1 = 2g(\nabla_T T, F_1) + \|F_1\|^2 + \|K(\nabla^0_{\tilde{T}} \tilde{T})\|^2$$

$$\pi_*(\tilde{V}_{p_{\tilde{\alpha}(t)}}) = \xi_p V_p + \frac{1}{\tilde{k}_p\Big|_{\tilde{\alpha}(t)}} F_p, \quad \xi_p = \frac{k_p\Big|_{\alpha(t)}}{\tilde{k}_p\Big|_{\tilde{\alpha}(t)}}$$

$$\pi_*(\nabla^0_{\tilde{T}_{\tilde{\alpha}(t)}} \tilde{V}_{p_{\tilde{\alpha}(t)}})_1 = (\nabla_{T_{\alpha(t)}} V_{p_{\alpha(t)}})_1 + \sum_{q=1}^{p} \frac{\lambda_{q+1}}{\tilde{k}_q\Big|_{\tilde{\alpha}(t)}} F_q$$

$$\pi_*(\nabla^0_{\tilde{T}_{\tilde{\alpha}(t)}} \tilde{V}_{p_{\tilde{\alpha}(t)}})_2 = (\nabla_{T_{\alpha(t)}} V_{p_{\alpha(t)}})_2 + F_{p+1}$$

$$\tilde{k}_{p+1}^2\Big|_{\tilde{\alpha}(t)} = k_{p+1}^2\Big|_{\alpha(t)} + A_{p+1}$$

dir. Burada,

$$F_p = \pi_*(\nabla^0_{\tilde{T}_{\tilde{\alpha}(t)}} \tilde{V}_{p-1_{\tilde{\alpha}(t)}}) - \nabla_{T_{\alpha(t)}} V_{p-1_{\alpha(t)}} - \sum_{q=1}^{p-1} \frac{\lambda_{q+1}}{\tilde{k}_q\Big|_{\tilde{\alpha}(t)}} F_q$$

ve

$$A_{p+1} = 2g((\nabla_{T_{\alpha(t)}} V_{p_{\alpha(t)}})_2, F_{p+1}) + \|F_{p+1}\|^2$$

$$+ \|K(\nabla^{o}_{\tilde{T}_{\tilde{\alpha}(t)}} \tilde{V}_{p_{\tilde{\alpha}(t)}})_2\|^2$$

şeklindedir.

2) $\tilde{\alpha}$ eğrisinin $0 \leqslant p \leqslant n-1$ olmak üzere $\tilde{V}_{n+p_{\tilde{\alpha}(t)}}$ Frenet vektörleri ile $\tilde{k}_{n+p}$ eğriliklerini gözönüne alalım. Bu durumda,

$$\pi_*(\tilde{V}_{n+p_{\tilde{\alpha}(t)}})' = \frac{1}{\tilde{k}_{n+p}\big|_{\tilde{\alpha}(t)}} F_{n+p}$$

$$\pi_*(\nabla^{o}_{\tilde{T}_{\tilde{\alpha}(t)}} \tilde{V}_{n+p_{\tilde{\alpha}(t)}})_1 = (\nabla_{T_{\alpha(t)}} V_{n-1_{\alpha(t)}})_1 + \sum_{q=1}^{n+p} \frac{\lambda_{q+1}}{\tilde{k}_q\big|_{\tilde{\alpha}(t)}} F_q$$

$$\pi_*(\nabla^{o}_{\tilde{T}_{\tilde{\alpha}(t)}} \tilde{V}_{n+p_{\tilde{\alpha}(t)}})_2 = F_{n+p+1}$$

$$\tilde{k}^2_{n+p+1}\big|_{\tilde{\alpha}(t)} = A_{n+p+1}$$

dir. Burada,

$$F_{n+p} = \pi_*(\nabla^{o}_{\tilde{T}_{\tilde{\alpha}(t)}} \tilde{V}_{n+p-1_{\tilde{\alpha}(t)}}) - \nabla_{T_{\alpha(t)}} V_{n-1_{\alpha(t)}} - \sum_{q=1}^{n+p-1} \frac{\lambda_{q+1}}{\tilde{k}_q\big|_{\tilde{\alpha}(t)}} F_q$$

$\lambda_{q+1} \in \mathbb{R}$ ve

$$A_{n+p+1} = \|F_{n+p+1}\|^2 + \|K(\nabla^{o}_{\tilde{T}_{\tilde{\alpha}(t)}} \tilde{V}_{n+p_{\tilde{\alpha}(t)}})_2\|^2$$

şeklindedir.

Teoremin ispatı Teorem 4.1.3 ün ispat yöntemiyle yapılabilir.

4.2.3. TEOREM :

TM üzerinde g^c yarı-Riemann metriğini gözönüne alalım.

1) g^c ye göre metrik konneksiyon ∇^c olmak üzere TM üzerinde $\tilde{\alpha}$ eğrisi geodezik ise $\tilde{\alpha}$ nın M üzerindeki projeksiyon eğrisi α geodezikdir (3).

2) g^c ye göre metrik konneksiyon ∇^H olmak üzere TM üzerindeki $\tilde{\alpha}$ eğrisi geodezik ise $\tilde{\alpha}$ nın M üzerindeki projeksiyon eğrisi α geodezikdir.

4.2.2. TANIM (Doğal lift eğrisi):

TM üzerinde bir $\bar{\alpha} : I \subseteq \mathbb{R} \to TM$

$$\bar{\alpha}(t) = (\alpha^1(t),\ldots,\alpha^n(t),\frac{d\alpha^1}{dt}(t),\ldots,\frac{d\alpha^n}{dt}(t))$$

şeklinde tanımlanan $\bar{\alpha}$ eğrisine, M üzerindeki bir α eğrisinin doğal lifti denir (3).

4.2.3. SONUÇ :

Her doğal lift eğrisi bir projeksiyon eğrisidir (3).

Projeksiyon eğrileri için yapılan herşey doğal lift eğrileri için de geçerlidir.

4.2.4. SONUÇ :

M üzerinde bir geodezik eğri α olsun. Bu durumda α nın TM ye doğal lift eğrisi ∇^c konneksiyonuna göre geodeziktir (3).

KAYNAKLAR

1- Greub, W. Halperin, S. Vanstone, R., Connection, Curvature and Cohomology, Volume 1-2, Academic-Pres, New York, 1972

2- Civelek, Ş. İkinci Mertebeden Genişletilmiş Manifoldlar Üzerinde Lift'ler, (Yüksek Lisans), G.Ü.Fen Bilimleri Enstitüsü, Şubat 1988

3- Yano, K. Ishıhara, S., Tangent and Cotangent Bundle, Marcel Dekker Inc, New York 1973

4- Kobayashi, S. Nomizu, K., Foundations of Differential Geomertry, Volume 1, Interscience Publishers, New York 1963

5- Sasaki, S. "On The Differential Geometry of Tangent Bundles of Riemannian Manifolds" Tôhoku Math. J., 10, 338 (1958)

6- Yano, K. Ledger, A.J., "Linear Connections on Tangent Bundles" J.Londan Math. Soc. 38, 497 (1964)

7- Yano, K. Ledger, A.J. "The Tangent Bundle of a Locally Symetric Space" J. Londan Math. Soc. 40, 487 (1965)

8- Oproıu, V. "On The Differential Geomertry of The Tangent Bundles" Rev. Roum. Math. Pures Et. Appl. Tome XIII. 6, 847 (1968)

9- Kowalski, O. "Curvature of The Induced Riemannian Metric On The Tangent Bundle of A Riemannian Manifold" J. Fur. Die. Reine and Angew Math. 250, 124 (1971)

10- Davies, E.T. "On The Curvature of The Tangent Bundle"
Annali di Mat IV. 81, 193(1969)

ÖZGEÇMİŞ

ÖZGEÇMİŞ

Aysel TURGUT, 1964 yılında Niğde'nin Bor ilçesinde doğdu. 1982'de Ankara Gülveren Lisesi'nden mezun oldu. 1986'da Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nü bitirdi. Aynı yıl Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi'ne Araştırma Görevlisi olarak girdi. Halen bu göreve devam etmektedir.