

T.C.
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK EĞİTİMİ ANA BİLİM DALI

**ORTAÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ TEK VE İKİ
DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARIN LİMİTİ VE SÜREKLİLİĞİ İLE İLGİLİ
KAVRAM BİLGİLERİ ARASINDAKİ İLİŞKİLERİN İNCELENMESİ**

DOKTORA TEZİ

Hazırlayan
Abdullah Çağrı BİBER

ANKARA–2010

Abdullah Çağrı BİBER'in "ORTAÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ TEK VE İKİ DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARIN LİMİTİ VE SÜREKLİLİĞİ İLE İLGİLİ KAVRAM BİLGİLERİ ARASINDAKİ İLİŞKİLERİN İNCELENMESİ" başlıklı tezi 22.07.2010 tarihinde, jürimiz tarafından Matematik Eğitimi Anabilim Dalında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Adı-Soyadı

İmza

Üye (Tez Danışmanı): Prof. Dr. Ziya ARGÜN

Üye: Prof. Dr. Hasan Hüseyin UĞURLU

Üye: Doç. Dr. Ahmet ARIKAN

Üye: Doç. Dr. Ayşe UYAR

Üye: Doç. Dr. Oylum AKKUŞ

ÖZET

Ortaöğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Tek Ve İki Değişkenli Fonksiyonların Limiti Ve Sürekliliği İle İlgili Kavram Bilgileri Arasındaki İlişkilerin İncelenmesi

(Doktora Tezi)

Abdullah Çağrı BİBER

**Gazi Üniversitesi
Eğitim Bilimleri Enstitüsü
ANKARA-2010**

Bu tezin amacı, ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının limit ve süreklilik kavramları ile ilgili tek değişkenli fonksiyonlardaki sahip oldukları kavram bilgileri ile çok değişkenli fonksiyonlarda oluşturdukları kavram bilgileri arasında bir ilişkinin olup olmadığını araştırmaktır.

Araştırmada yarı deneysel yöntem (quasi-experimental research) izlenmiş olup, çalışmalarda tek grup üzerinde zamanlı test (ön ve son test) uygulamalarına dayanan bir tasarım kullanılmıştır. Bu yöntemin tercih edilme sebebi, yaklaşık bir yıllık bir veri toplama süreci gerektirmesidir. Burada sonuçları sunulan deneysel çalışma, 2007-2008 / 2008-2009 eğitim öğretim yıllarında ve toplam 10 haftalık bir süreçte gerçekleştirilmiştir.

Araştırmanın çalışma örneklemi Ankara’da yerleşik bir üniversitenin matematik eğitimi anabilim dalı ortaöğretim matematik öğretmenliği 1., 2. ve 3. sınıf öğrencileri olarak belirlenmiştir. Araştırmanın birinci bölümü 2007 Kasım ayında ortaöğretim matematik öğretmen adayı 45 1. sınıf öğrencisi ile, ikinci bölümü de 2008 Aralık ayında 2. sınıf öğrencisi olan aynı 37 öğretmen adayları ile yürütülmüştür.

Ayrıca araştırmaya katkı sağlayacağı düşünüldüğünden, 2007-2008 öğretim yılı sonunda topoloji dersini almış 22 3.sınıf matematik öğretmen adayına, herhangi iki topolojik uzay arasında tanımlanmış reel değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği hakkında, açık uçlu sorular içeren bir anket çalışması uygulanmıştır.

Toplanan veriler, nitel araştırmanın başlıca örüntüleri belirleme, kodlama ve kategorilere (temalara) ayırma işlemlerini kapsayan “içerik analizi” tekniğiyle analiz edilmiştir. Ayrıca, görüşülen ve gözlenen bireylerin görüşlerini çarpıcı bir biçimde yansıtmak amacıyla doğrudan alıntılara yer verilmiştir.

Araştırmada, adayların tek ve iki değişkenli reel fonksiyonlardaki limit ve süreklilik kavramları hakkında edinmesi gereken asgari kazanımlar belirlenerek, birer envanter oluşturulmuştur. Oluşturulan envanter çalışmaları sonucunda birbiriyle örtüşen 9 kriter ele alınarak, adayların tek değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği ile ilgili kavram bilgileri ile çok değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliğine ilişkin kavram bilgileri kıyaslanmış ve bu bilgiler arasındaki ilişkiler belirlenmiştir.

Araştırma sürecinde toplanan veriler kullanılarak, adayların tek ve iki değişkenli reel fonksiyonların limiti ve sürekliliği ile ilgili kavram bilgileri hakkında bazı sonuçlar ortaya konulmuş, yorumlar yapılmıştır. Ayrıca, adayların çok değişkenli fonksiyonların limit ve sürekliliği ile ilgili kavram bilgilerini yapılandırırken, tek değişkenli fonksiyonlarda oluşturdukları kavram bilgilerinin etkileri ve adayların yürüttükleri matematiksel genelleme ve soyutlama süreçlerinde yaşadıkları sıkıntılar ve sebepleri hakkında yorumlar yapılmıştır. Araştırma bulguları çerçevesinde, literatürle birlikte tartışmalara yer verilerek, hem uygulamaya hem de bu konularda araştırma yapmak isteyenlere ve eğitimcilere yönelik önerilerde bulunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Öğretmen Adayları, Tek Değişkenli Reel Fonksiyonlar, İki Değişkenli Reel Fonksiyonlar, Limit, Süreklilik

**The relations between Concept Knowledge Related to the Limits and
Continuity concepts in One variable Functions and in Two Variables
Functions of Prospective Secondary Mathematics Teachers**

PhD (Doctoral) Thesis

Abdullah Çağrı BİBER

**Gazi University
Institute of Educational Sciences**

ANKARA-2010

The purpose of this thesis is to investigate whether there is a relationship between the concept knowledge related to the limit and continuity of prospective secondary mathematics teachers formed in one-variable functions and in two variable functions.

In this research, quasi-experimental research method and a design based on timely test applications (pre and last test) on a single group were used. The reason for choosing this method is that it requires a data collection period of nearly a year to find responses to the research problems. The results of experimental study were presented here was carried out during the 2007-2008 / 2008-2009 academic years within a period of 10 weeks.

The sample of this study is selected among the 1st, 2nd and 3. undergraduate students of Mathematics Education Department of Education Faculty of a public university in Ankara. The first part of the research was conducted to 45 prospective secondary mathematics teachers who attending their first year at school during November-2007 and the second part were carried out by these 37 prospective teachers who participated in the first part of the research and they were in their second year, in December 2008.

Additionally, to contribute the research, we addressed some open ended questions to totally 48 third-year students who took topology course for to get their views about the limit and continuity of any two real-variable, topologic and spatially recognized functions.

The gathered data were analyzed by the “content analysis” comprising the main patterns of the qualitative research including determination, coding and categorizing. Direct citations were presented in order to reflect the opinions of the individuals interviewed and observed.

Inventories were formed about the specified topics by determining the minimum acquisitions that the students were required to get about the limit and continuity concepts of one-variable and multi-variable real functions in the studies. Nine criteria were examined in the inventory studies and it was determined whether there was a relationship between each of the overlapping competencies by comparing the competencies related to the limit and continuity of the one-variable functions of the prospective teachers and those of the multi-variable functions of the same candidates.

During the research, results were found out about the concept images of the limit and continuity of the one-variable and bi-variable real functions of the prospective teachers by using the data, and interpretations were made. Interpretations were also made about the effects of the concept images the prospective teachers formed related to these concepts in the one-variable functions while configuring their concept images related to the limit and continuity of multi-variable functions, and the problems the participants faced during the processes of mathematical generalization and abstraction. Moreover, within the framework of the research findings, discussions were made along with the literature and some suggestions were presented both for the application and the educators and those who want to research about these topics.

Key Words: Prospective Secondary Mathematics Teachers, one-variable Real Functions, two-variable Real Functions, Limit, Continuity.

TEŞEKKÜR

İlk olarak beni bu günlere getiren ve hayatımın tüm aşamasında bana destek olan sevgili annem-babam Ayşe ve Nusret BİBER'e, birlikte büyüdüğümüz kardeşime sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Doktora programının başlangıç aşamasında hayatımı birleştirdiğim ve tüm bu çalışma sürecinde bana her zaman destek olan, yoğun dönemlerimi anlayış ile karşılayan ve oğlum Nusret Göktuğ'u Dünya'ya getiren sevgili eşim Emine Didem'e teşekkür ediyorum.

Doktora tez danışmanlığımı üstlenen, çalışmamın her aşamasında desteğini eksik etmeyen, yol gösteren, bilgi ve deneyimlerini paylaşan sayın hocam Prof. Dr. Ziya ARGÜN'e kalbi şükranlarımı sunarım.

Tezin çeşitli aşamalarında değerli görüş ve düşüncelerinden yararlandığım sayın Doç. Dr. Ahmet ARIKAN, Prof. Dr. Bharat SRİRAMAN, Doç. Dr. Ayşe UYAR ve Gazi Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği Anabilim Dalının diğer değerli öğretim elemanlarına teşekkürlerimi sunuyorum.

Akademik çalışmalarım süresince desteklerini esirgemeyen ve gerekli izinleri sağlayan değerli amirlerim, sevgili mesai arkadaşlarım ve mensubu olduğum tüm Ziraat Bankası camiasına teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Son olarak bu çalışmanın örneklemini oluşturan Gazi Üniversitesi Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği öğrencilerine ilgi ve yardımlarından dolayı teşekkür ediyorum.

Abdullah Çağrı BİBER

2010

İÇİNDEKİLER

JURİ ÜYELERİNİN İMZA SAYFASI.....	i
ÖZET	ii
ABSTRACT.....	iv
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLER VE TABLOLAR LİSTESİ	x

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1. Problem Durumu.....	1
1.2. Araştırmanın Problem Cümlesi	3
1.3. Alt Problemler.....	3
1.4. Araştırmanın Önemi	4
1.5. Varsayımlar.....	11
1.6. Tezin Sınırlılıkları.....	11
1.7. Tanımlamalar	12

BÖLÜM 2

KAVRAMSAL ÇERÇEVE

2.1. Kavram Nedir?.....	14
2.2. Kavram Bilgisi Nedir?	15
2.3. İşlem Bilgisi Nedir?	17
2.4. Kavram Bilgisi ve İşlem Bilgisi Arasındaki İlişkiler.....	18
2.5. Kavram Tanımı ve Kavram İmajı	21
2.6. Genelleme ve Soyutlama Süreçleri.....	24
2.7. Limit ve süreklilik kavramlarının matematiksel yapıları.....	29
2.7.1. Tek değişkenli reel fonksiyonlarda limit ve süreklilik	29
2.7.2. İki değişkenli reel fonksiyonlarda limit ve süreklilik	31
2.8. Limit ve Süreklilik Kavramlarının Öğretimi ile ilgili Yayın ve Araştırmalar... 34	
2.8.1. Limit ve Süreklilik Kavramlarının Öğretimi ile ilgili Yurt Dışında	

Yapılan Çalışmalar	34
2.8.2. Limit ve Süreklilik Kavramlarının Öğretimi ile ilgili Yurt İçinde	
Yapılan Çalışmalar	33

BÖLÜM 3

YÖNTEM

3.1. Araştırmanın Modeli	42
3.2. Araştırmanın Deseni	42
3.3. Veri Analiz Yöntemi.....	44
3.4. Çalışma Evreni ve Örneklem	45
3.5. Tek Değişkenli ve İki Değişkenli Reel Fonksiyonların Limiti ve	
Sürekliliği Hakkında Matematik Öğretmen Adaylarının Kavram	
Görüntülerinin Tespiti ile İlgili Veri Toplama Araçları	45
3.5.1. Öntest.....	46
3.5.2. Bilişsel Düzey Belirleme Testleri	47
3.5.3. Yarı Yapılandırılmış Görüşmeler	48
3.5.4. Envanter Çalışması	49
3.5.5. Dersteki Gözlemler	50
3.5.6. Öğrenci Günlükleri	50

BÖLÜM 4

BULGULAR

4.1. Tek değişkenli reel fonksiyonlardaki limit ve süreklilik kavramları	
hakkındaki bulgular	51
4.1.1. Bilişsel düzey belirleme test bulguları.....	51
4.1.2. Yarı Yapılandırılmış Görüşme Sonuçları	78
4.1.2.1. Aday M.K. İle Yapılan Görüşme Sonuçları	78
4.1.2.2. Aday M.T. İle Yapılan Görüşme Sonuçları	79
4.1.2.3. Aday M.Y. İle Yapılan Görüşme Sonuçları	80
4.1.2.4. Aday G.K. İle Yapılan Görüşme Sonuçları	80
4.1.2.5. Aday A.S. İle Yapılan Görüşme Sonuçları.....	81
4.1.2.6. Aday H.Y. İle Yapılan Görüşme Sonuçları	81
4.1.2.7. Aday N.B. İle Yapılan Görüşme Sonuçları	82
4.1.2.8. Yarı Yapılandırılmış Görüşme Sonuçlarının Özeti	83

4.1.3. Envanter çalışması bulguları.....	85
4.1.4. Topoloji Dersi Almış 3. Sınıf Öğrencilerinin, limitin topoloji dersinde verilen tanımı ile limitin $\varepsilon - \delta$ tekniği ile verilen tanımı arasında bir bağ kurma konusunda bilişsel düzey belirleme test bulguları	90
4.2. İki değişkenli reel fonksiyonlardaki limit ve süreklilik kavramları hakkındaki bulgular	94
4.2.1. Ön test bulguları.....	94
4.2.2. Bilişsel Düzey Belirleme Testi Bulguları	101
4.2.3. Yarı Yapılandırılmış Görüşme Sonuçları	109
4.2.3.1. Aday H.Y. İle Yapılan Görüşme Sonuçları.....	110
4.2.3.2. Aday E.Ö. İle Yapılan Görüşme Sonuçları	111
4.2.3.3. Aday N.B. İle Yapılan Görüşme Sonuçları	111
4.2.3.4. Aday A.S. İle Yapılan Görüşme Sonuçları.....	112
4.2.3.5. Aday E.D. İle Yapılan Görüşme Sonuçları	113
4.2.3.6. Aday E.C. İle Yapılan Görüşme Sonuçları.....	114
4.2.3.7. Yarı Yapılandırılmış Görüşme Sonuçlarının Özeti	115
4.2.4. Envanter Çalışması Bulguları	117
4.3. Adayların tek değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği ile ilgili yeterlilikleri ile çok değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliğine ilişkin yeterliliklerinin kıyaslanması.....	120

BÖLÜM 5

SONUÇLAR, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

5. Sonuç, Tartışma ve Yorumlar.....	134
5.1. Adayların tek değişkenli reel fonksiyonların limiti ve sürekliliği ile ilgili kavram bilgileri ve kavram imajları hakkındaki sonuç, tartışma ve yorumlar.....	134
5.2. Adayların iki değişkenli reel fonksiyonların limiti ve sürekliliği ile ilgili kavram bilgileri ve kavram imajları hakkındaki sonuç, tartışma ve yorumlar.....	139
5.3. Adayların çok değişkenli fonksiyonların limit ve sürekliliği ile ilgili kavram bilgileri ve kavram imajlarını yapılandırırken tek değişkenli fonksiyonlarda bu kavramlarla ilgili oluşturdukları kavram bilgileri ve kavram imajlarının etkileri ve adayların yürüttükleri matematiksel	

genelleme ve soyutlama süreçlerinde yaşadıkları sıkıntılar hakkındaki sonuç, tartışma ve yorumlar.....	143
5.4. Öneriler	146
Kaynakça	150

ŞEKİLLER VE TABLOLAR LİSTESİ

Şekiller

Şekil 1	4
Şekil 2 Üretim fonksiyonu ve kayıtsızlık eğrileri	5
Şekil 3 Üretim fonksiyonu	6
Şekil 4 Üretim fonksiyonu-Sermaye (K) Sabit	6
Şekil 5 Üretim fonksiyonu-Üretim (q) Sabit	7
Şekil 6 Üretim tekniği	7
Şekil 7 Tek Değişkenli Reel Fonksiyonlarda Limit	30
Şekil 8 İki Değişkenli Reel Fonksiyonlarda Limit	31
Şekil 9 İki Değişkenli Reel Fonksiyonlarda Limit-Yaklaşım	33
Şekil 10 1. Soruya “Yaklaşma” cevabını veren gruptan bir cevap örneği	52
Şekil 11 1. Soruya “Sınır” cevabını veren gruptan bir cevap örneği	53
Şekil 12 2. Soruya “Yaklaşık sonuç elde etmek için” ve “Sonsuz kavramını somutlaştırmak için” cevabını veren gruplardan birer cevap örneği	54
Şekil 13 3. Soruya verilen cevaplardan birkaç örnek	57
Şekil 14 4. Soruya verilen cevaplardan birkaç örnek	60
Şekil 15 5-a. Sorusuna verilen cevaplardan birkaç örnek	62
Şekil 16 5-b. Sorusuna verilen cevaplardan birkaç örnek	63
Şekil 17 5-c. Sorusuna verilen cevaplardan birkaç örnek	65
Şekil 18 5-d. Sorusuna verilen cevaplardan birkaç örnek	66
Şekil 19 5-e. Sorusuna verilen cevaplardan birkaç örnek	69
Şekil 20 5-f. Sorusuna verilen cevaplardan birkaç örnek	70
Şekil 21 5-g. Sorusuna verilen cevaplardan birkaç örnek	71
Şekil 22 5-h. Sorusuna verilen cevaplardan birkaç örnek	73
Şekil 23 6. Soruya verilen cevaplardan bir örnek	74
Şekil 24 7. Soruya verilen cevaplardan iki örnek	75
Şekil 25 8. Soruya verilen cevaplardan birkaç örnek	76

Şekil 26 9. Soruya verilen cevaplardan bir örnek	78
Şekil 27 1. Soruya verilen cevaplardan birkaç örnek	102
Şekil 28 2. Soruya verilen cevaplardan birkaç örnek	104
Şekil 29 3. Soruya verilen cevaplardan birkaç örnek	106
Şekil 30 4. Soruya verilen cevaplardan birkaç örnek	109
Şekil 31 Bir cevap örneği.....	137
Şekil 32 Bir cevap örneği.....	140

Tablolar

Tablo 1 1. Soruya verilen gruplandırılmış cevapların dağılımı	51
Tablo 2 “Yaklaşma” cevap grubunun ayrıntı tablosu	52
Tablo 3 2. Soruya verilen cevapların gruplandırılmış halinin dağılımı	53
Tablo 4 1. Soruya, “yaklaşma” cevabını verenlerin 2. soruya verdikleri gruplandırılmış cevapları	55
Tablo 5 3. Soruya verilen cevapların gruplandırılmış halinin dağılımı	56
Tablo 6 1. Soruya ve 3. soruya verilen cevapların gruplandırılmış halinin matrisi. 57	
Tablo 7 2. Soruya ve 3. soruya verilen cevapların gruplandırılmış halinin matrisi. 58	
Tablo 8 4. Soruya verilen cevapların gruplandırılmış halinin dağılımı	59
Tablo 9 5-a. Soruya verilen cevapların gruplandırılmış halinin dağılımı	61
Tablo 10 5-b. Soruya verilen cevapların gruplandırılmış halinin dağılımı.....	62
Tablo 11 5-a ve 5-b sorularına aynı anda yanlış cevap verenler	63
Tablo 12 5-c. sorusuna verilen cevapların gruplandırılmış halinin dağılımı.....	64
Tablo 13 5-d sorusuna verilen cevapların gruplandırılmış halinin dağılımı.....	65
Tablo 14 5-c ve 5-d sorularına verilen cevapların kıyaslanması	67
Tablo 15 5-e sorusuna verilen cevapların gruplandırılmış halinin dağılımı	68
Tablo 16 5-f sorusuna verilen cevapların gruplandırılmış halinin dağılımı	69
Tablo 17 5-g sorusuna verilen cevapların gruplandırılmış halinin dağılımı.....	71
Tablo 18 5-h sorusuna verilen gruplandırılmış cevapların dağılımı	72
Tablo 19 6. soruya verilen cevapların gruplandırılmış halinin dağılımı.....	73
Tablo 20 7. soruya verilen cevapların gruplandırılmış halinin dağılımı.....	74
Tablo 21 8. soruya verilen cevapların gruplandırılmış halinin dağılımı.....	75
Tablo 22 9. soruya verilen gruplandırılmış cevapların dağılımı.....	77
Tablo 23 Adaylar M.K., M.T. ve M.Y. ile yapılan yarı yapılandırılmış görüşmelerin özet tablosu	83

Tablo 24 Adaylar G.K., A.S., H.Y. ve N.B. ile yapılan yarı yapılandırılmış görüşmelerin özet tablosu	84
Tablo 25 Tek değişkenli reel fonksiyonlardaki limit ve süreklilik kavramları hakkında kazanım envanteri.....	86
Tablo 26 En yüksek ortalamaya sahip ilk 3 kriter	88
Tablo 27 En düşük ortalamaya sahip son 3 kriter.....	89
Tablo 28 1. ve 2. soruya verilen cevapların gruplandırılmış şekli.....	91
Tablo 29 3. soruya verilen cevapların gruplandırılmış şekli	92
Tablo 30 3. ve 4. soruya verilen cevapların gruplandırılmış şekli.....	94
Tablo 31 1. Soruda yer alan fonksiyonun limiti hakkında verilen cevapların gruplandırılmış hali	95
Tablo 32 1. Soruda yer alan süreklilik hakkındaki cevapların gruplandırılmış hali.....	96
Tablo 33 1.ve 2. soruda yer alan fonksiyonun limiti hakkında verilen cevapların gruplandırılmış hallerinin matrisi	97
Tablo 34 1. ve 2. soruda yer alan süreklilik hakkında verilen cevapların gruplandırılmış hallerinin matrisi	99
Tablo 35 1. Soruya verilen cevapların gruplandırılmış halinin dağılımı	101
Tablo 36 2.soruda yer alan limit ve süreklilik hakkındaki cevapların gruplandırılmış hallerinin matrisi	103
Tablo 37 3.soruda yer alan limit ve süreklilik hakkındaki cevapların gruplandırılmış hallerinin matrisi	105
Tablo 38 2. ve 3.sorularda yer alan limit hakkındaki cevapların gruplandırılmış hallerinin matrisi	107
Tablo 39 4. Soruya verilen cevapların gruplandırılmış halinin dağılımı	108
Tablo 40 Adaylar H.Y., E.Ö. ve N.B. ile yapılan yarı yapılandırılmış görüşmelerin özet tablosu	115
Tablo 41 Adaylar A.S., E.D. ve E.C. ile yapılan yarı yapılandırılmış görüşmelerin özet tablosu	116
Tablo 42 İki değişkenli reel fonksiyonlardaki limit ve süreklilik kavramları hakkında kazanım envanteri.....	117
Tablo 43 En yüksek ortalamaya sahip ilk 3 kriter	119
Tablo 44 En düşük ortalamaya sahip son 3 kriter.....	120
Tablo 45 İlk kritere ait kıyas tablosu	122

Tablo 46 İkinci kritere ait kıyas tablosu	123
Tablo 47 Üçüncü kritere ait kıyas tablosu	124
Tablo 48 Dördüncü kritere ait kıyas tablosu.....	125
Tablo 49 Beşinci kritere ait kıyas tablosu.....	126
Tablo 50 Altıncı kritere ait kıyas tablosu.....	127
Tablo 51 Yedinci kritere ait kıyas tablosu	128
Tablo 52 Sekizinci kritere ait kıyas tablosu.....	130
Tablo 53 Dokuzuncu kritere ait kıyas tablosu	131
Tablo 54 Adaylara ait ortalama tablosu	132

Şemalar

Şema 1 Araştırmanın Deseni	44
----------------------------------	----

Grafikler

Grafik 1 Kriterlerin Ortalaması.....	88
Grafik 2 Kriterlerin Ortalaması.....	119
Grafik 3 Aday Ortalamaları	133
Grafik 4 Adayların matematiksel düşünme puanları ile AnalizI-II genelleme yapabilme puanları.	145

Resimler

Resim 1 Veri Tablosu Örneği	193
Resim 2 Özet Tablo Oluşturma 1. Adım	194
Resim 3 Özet Tablo Oluşturma 2. Adım	194
Resim 4 Özet Tablo Oluşturma 3. Adım	194
Resim 5 Özet Tablo Oluşturma Alanı.....	195
Resim 6 Özet Tablo Oluşturma Örneği	195
Resim 7 Özet Tabloda Eklenti Yapma	196

Ekler

Ek-1 Tek değişkenli reel fonksiyonların limit ve sürekliliği hakkındaki bilişsel düzey belirleme test soruları.....	164
--	-----

Ek-2 Tek değişkenli reel fonksiyonların limit ve sürekliliği hakkında yürütölen yarı yapılandırılmış görüşmeler	166
Ek-3 Topoloji Dersi Almış 3. Sınıf Öğrencilerinin, limitin topoloji dersinde verilen tanımı ile limitin $\varepsilon - \delta$ tekniği ile verilen tanımı arasında bir bağ kurma konusunda bilişsel düzey belirleme test soruları.....	178
Ek-4 Ön test soruları	179
Ek-5 İki değişkenli reel fonksiyonların limit ve sürekliliği hakkındaki bilişsel düzey belirleme test soruları.....	180
Ek-6 İki değişkenli reel fonksiyonların limit ve sürekliliği hakkında yürütölen yarı yapılandırılmış görüşmelerde adaylara yöneltilen sorular	180
Ek-7 Excel’de Özet Tablo Fonksiyonu ve Kullanımı.....	193
Özgeçmiş	197

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Bu bölümde; “Problem Durumu”, “Problem Cümlesi”, “Alt Problemler”, “Araştırmanın Önemi”, “Varsayımlar” ve “Sınırlamalar” alt başlıkları ele alınmıştır.

1.1. Problem Durumu

Matematiğin konusu; sayı, nokta, küme, geometrik şekiller, uzay gibi soyut nesneler ve bunlar arasındaki ilişkileri oluşturmaktır. Matematikçi, bu nesnelerin özelliklerini ve aralarındaki ilişkileri ortaya çıkarma, genelleme ve ulaştığı sonuçları ispatlama çabası içindedir (Yıldırım, 1999). Dolayısıyla matematik, ilişkileri bulma ve ispatlama çalışmasıdır. Matematik; kendine özgü amaç, yöntem ve sonuçlarıyla entellektüel değeri yüksek bir disiplin olarak algılanmalıdır. Özetle Matematik;

- Mantıksal ilişkileri bulmak ve bu ilişkileri anlamak,
- Bulunan bu ilişkileri sınıflandırmak ve bu ilişkilerin doğruluğunu kanıtlamak,
- Doğruluğu kanıtlanan bu ilişkileri genellemek ve hayata taşıyıp uygulayabilmek

esasları çerçevesinde ele alınmalıdır (Mirasyedioğlu, 2004). Başka bir ifadeyle, matematik ardışık soyutlama ve genellemeler süreci olarak geliştirilen fikirler (yapılar) ve bağıntılardan oluşan bir sistem olarak görülmektedir (New South Wales Department of Education and Australian Council for Educational Research, 1972).

Bu noktada matematikle ilgilenenlerin ve hatta matematik öğretmen adaylarının matematikte var olan mantıksal ilişkilerin farkında olup olmadıkları, ilişkilerin doğruluğunu kanıtlayabilme yeterliliğini ne kadar sergileyebildikleri ve doğruluğu kanıtlanan bu ilişkileri ne derece genelleyebildikleri ve soyutlayabildikleri sorusu matematik eğitimi araştırmacıları için büyük merak konusu olmuştur.

Bu araştırmada da özel olarak seçilen limit kavramı üzerinden matematik ğretmen adaylarının matematiksel kavramlar arasında var olan ilişkilerin farkında olup olmadıkları ve mevcut kavram bilgilerini kullanarak ne derece soyutlama ve genellemeler yapabildikleri konusunda incelemeler yapılmıştır. Moralı, Krglu ve elik'in (2004) belirttiği gibi yapılan çalışmalar, kavram oluşumunun beynin soyutlama yeteneğine bağlı olduğunu göstermektedir. Bu yüzden öğrencilerin soyutlama yapabilme yeteneklerinin gelişimi, kavramların öğrenilmesi için büyük önem arz etmektedir. Bu nedenle çalışmada, öğrencilerin limit ve süreklilikle ilgili kavram imajlarının tespitinin yanında soyutlama ve genelleme yetenekleri de araştırılmıştır.

Analizdeki en zor kavramlardan birisi olan limit, matematiksel n öğrenmeleri st düzey olan öğrenciler için bile öğrenilmesi güç olan bir kavram olarak karşımıza çıkmaktadır. Bunun sebeplerinden birini Sanchez (1996), "türev ve integral kavramlarının gelişiminde limit kavramının ne denli önemli olduğunun öğrenciler tarafından fark edilememesi" olarak ifade etmiştir. Matematik eğitimcilerinin çalışmaları limit kavramının, öğrenciler tarafından zor anlaşılan, öğretmenler tarafından ise ortaya konması zor olan bir kavram olduğunu göstermektedir (Sanchez, 1996). Özellikle limit kavramının cebirsel tanımlanmasında aşırı zorlanmaların olmasından söz edilmektedir. Yapılan bir araştırma, analiz derslerinde öğrencilerin genelde, bir fonksiyonun bir noktadaki limitini sezgisel olarak anlamlandırdıklarını, buna karşılık özellikle limiti tam olarak tanımlamada zorluk yaşadıklarını ortaya çıkarmıştır (Francis, 1992). Yapılan diğer bir araştırma ise, limit kavramının öz olarak ne anlama geldiğinin bilinmediğini, kavramsal anlamda sıkıntıların yaşandığını ve öğrencilerin, limitin ne anlama geldiğini bilmeden, limit ile ilgili işlemleri yapabildiklerini ortaya koymaktadır (Hofe, 1998).

Anlaşılması konusunda bu denli sıkıntı yaşanan bir kavram olan limit, orta ğretim ve niversite 1. Sınıf matematik dersi ğretim programlarının vazgeçilmez konuları arasındadır. Ancak niversitelerin, mühendislik, temel fen bilimleri, matematik ğretmenliği ve ekonomi gibi öğrencilerine daha ileri seviyelerde matematik bilgisi sunan bölümlerde, matematik bilgi seviyelerini geliştirebilmek için öğrencilerin daha önce hiç tanışmadıkları çok değişkenli fonksiyonlar ve çok değişkenli fonksiyonlarda matematiksel analiz dersleri verilmektedir. Genel itibariyle çok değişkenli fonksiyonlar ve limit, analiz için temel teşkil eden kavramlardır ve bu kavramlar konu itibariyle matematiğin diğer birçok alanı için (Karmaşık Analiz, Fonksiyonel Analiz, çeşitli

geometrilere, Cebir vb.) zemin oluşturmaktadır. Dolayısıyla, çok değişkenli fonksiyonlarda limit ve süreklilik kavramlarının öğrenilmesinde yaşanabilecek bir takım sıkıntılar, bu kavramlar üzerine inşa edilen diğer konuların öğrenilmesi sürecinde daha büyük problemler doğurabilecektir. Bu noktadan hareketle, tek değişkenli fonksiyonlardan çok değişkenli fonksiyonlara geçiş sürecinin ilk halkası olarak görülen iki değişkenli fonksiyonlarda, temel işlem olarak kabul edilen limit kavramının öğretimi araştırılması gerekli bir konu olarak görülmektedir. Matematik lisans öğrencilerinin ve bilhassa öğretmen adaylarının fonksiyonların limiti ve sürekliliği ile ilgili uygun kavram imajlarının oluşmasında veya yapılandırılmasında sadece tek değişkenli fonksiyonların kullanılmasının yeterli olmadığı söylenebilir. Bu nedenle bu tezde matematik öğretmen adaylarının limit ve süreklilik kavramları ile ilgili tek değişkenli fonksiyonlarda oluşturdukları kavram imajları ile çok değişkenli fonksiyonlarda oluşturdukları kavram imajları arasında bir ilişkinin olup olmadığı araştırılmıştır.

1.2. Araştırmanın Problem Cümlesi:

Matematik öğretmen adaylarının tek değişkenli fonksiyonlarla çok değişkenli fonksiyonların limiti-sürekliliği ile ilgili kavram imajları arasında ne tür benzerlikler ve farklılıklar vardır? Adaylar çok değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği ile ilgili kavram imajlarını yapılandırırken tek değişkenli fonksiyonlarda bu kavramlarla ilgili oluşturdukları kavram imajları ne ölçüde etkili olmaktadır?

1.3. Alt Problemler:

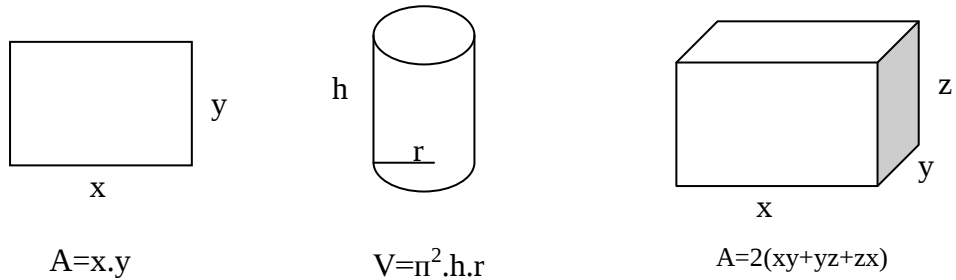
- 1) Matematik öğretmen adaylarının tek değişkenli fonksiyonların limit ve sürekliliği ile ilgili kavram bilgileri ve kavram imajları nelerdir?
- 2) Matematik öğretmen adaylarının iki değişkenli fonksiyonların limit ve sürekliliği ile ilgili kavram bilgileri ve kavram imajları nelerdir?
- 3) Matematik öğretmen adayları iki değişkenli fonksiyonların limit ve sürekliliği kavramlarını yapılandırırken tek değişkenli fonksiyonlar için bu kavramlarla ilgili sahip oldukları kavram bilgileri ve kavram imajları ne kadar etkili olmaktadır?
- 4) Tek ve iki değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği kavramlarının yapılandırılmasında ortaya çıkan temel zorluklar nelerdir?
- 5) Adayların yürüttükleri matematiksel genelleme ve soyutlama süreçlerinde yaşadıkları sıkıntılar nelerdir?

1.4. Araştırmanın Önemi:

Bu tezin amacı matematik öğretmen adaylarının limit ve süreklilik kavramları ile ilgili tek değişkenli fonksiyonlarda oluşturdukları kavram bilgileri ve kavram imajları ile iki değişkenli fonksiyonlarda oluşturdukları kavram bilgileri ve kavram imajları arasında bir ilişkinin olup olmadığını araştırmaktır. Böyle bir araştırmanın fonksiyonlarda limit ve süreklilik kavramlarının yapılandırılması çalışmaları dikkate alındığında, literatürde bir ilk olduğu söylenebilir. Araştırma sonucunda elde edilecek olan verilerin, tek ve çok değişkenli fonksiyonlarda ve hatta en genel anlamda fonksiyonların limit ve süreklilik kavramlarının öğretilmesi sürecinde eğitimciler tarafından dikkate alındığında önemli katkılar sağlayacağı düşünülmektedir.

Lise müfredatında tek değişkenli ve reel fonksiyonların limiti, sürekliliği, türevi ve integralleri gibi konular incelenip, bunlarla ilgili uygulamalar ele alınır. Bu fonksiyonlara tek değişkenli denilmesinin sebebi bağımsız değişkenin bir tane olmasıdır.

Günlük hayatta kullanılan fonksiyonların birçoğu birden fazla değişkene bağlıdır. Örneğin bir dikdörtgenin alanı, eni ile boyunun, bir silindirin hacmi taban alanı ile yüksekliğine, bir dikdörtgen prizmanın yüzey alanı üç boyutuna bağlıdır (Şekil 1).



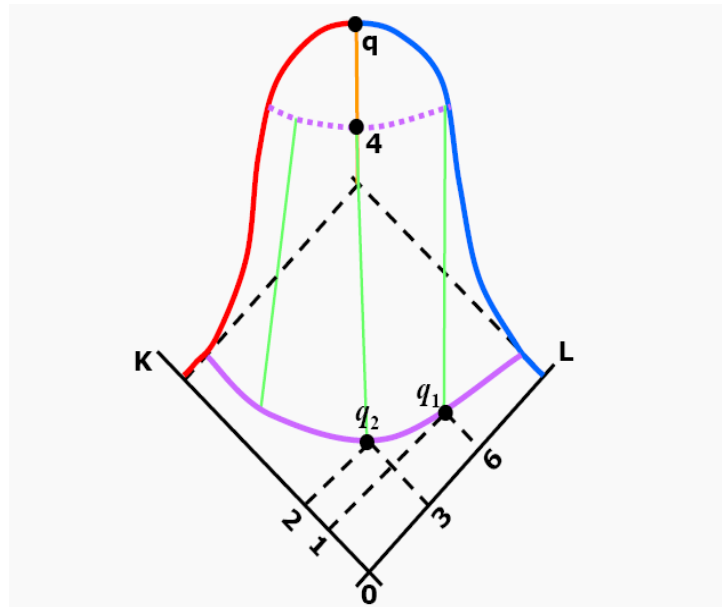
Şekil 1

Bu nedenle çok değişkenli fonksiyonların uygulama alanları, tek değişkenli fonksiyonlara nazaran daha geniştir. Uygulama alanı bu kadar geniş olan çok değişkenli fonksiyonlar, Analiz 1-2, Fonksiyonel Analiz, Vektörel Analiz, Diferansiyel Geometri, Uygulamalı Matematik gibi ilgili tüm matematik alanları için temel oluşturmaktadır. Çok değişkenli fonksiyonlar iktisat, olasılık, istatistik, akışkanlar dinamiği ve elektrik teorisinde çok sık kullanılır (Balcı, 1996).

$$F = \gamma \frac{m^* M}{R^2}$$

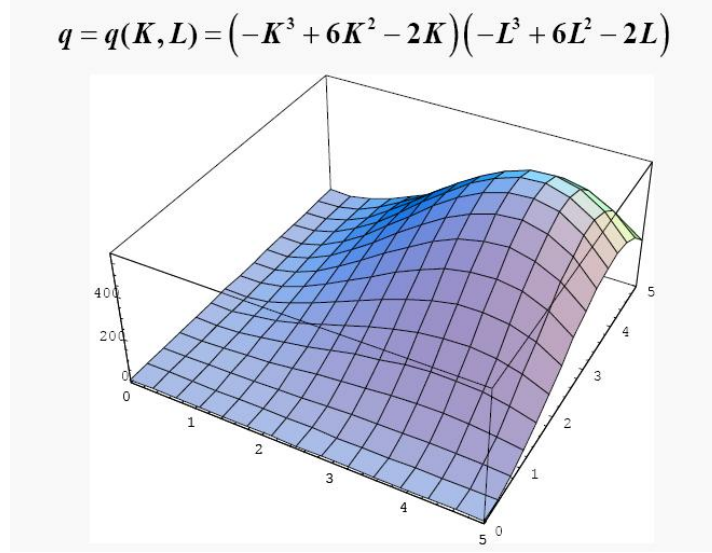
Yukarıda verilen formül, aralarındaki uzaklık R olan m ve M kütleleri arasındaki çekim kuvvetini ifade eder. Newton Kanunu olarak da bilinen kütle çekim yasası, çok değişkenli fonksiyonlara dair güzel bir örnektir. F kuvveti; γ -gravitasyon sabiti olmak üzere, m , M kütlelerinin ve R uzaklığının üç değişkenli fonksiyonudur.

Örneğin iktisat teorisinde önemli bir yer teşkil eden “üretim teorisi” konusu, tamamen çok değişkenli fonksiyonlar ve bunların özellikleri üzerine kurulmuştur.



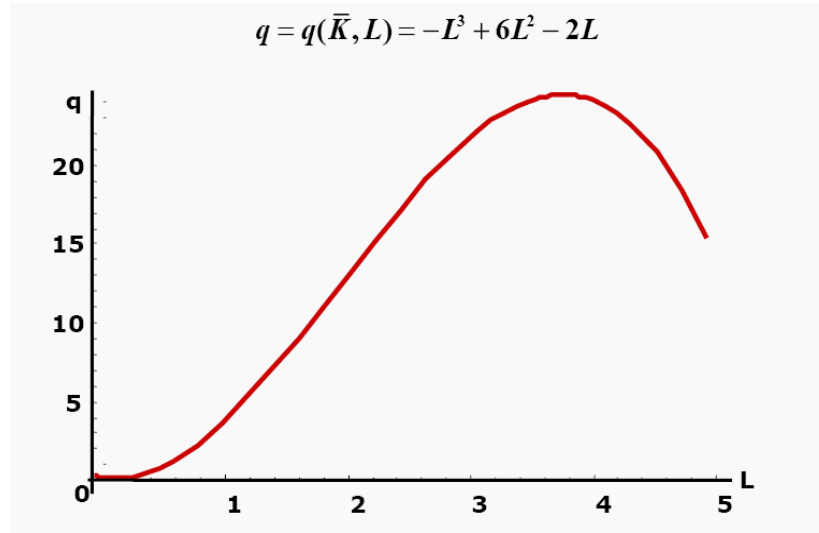
Şekil 2: Üretim fonksiyonu ve kayıtsızlık eğrileri

Şekil 2’de üretim fonksiyonunun grafiği, bireyin tüketim tercihlerini gösteren kayıtsızlık eğrileri ve üreticinin üretim tekniği olanaklarını gösteren eşürün eğrileri görülmektedir. Burada sermaye K , işgücü L ve üretim ise q harfleriyle gösterilmiştir.



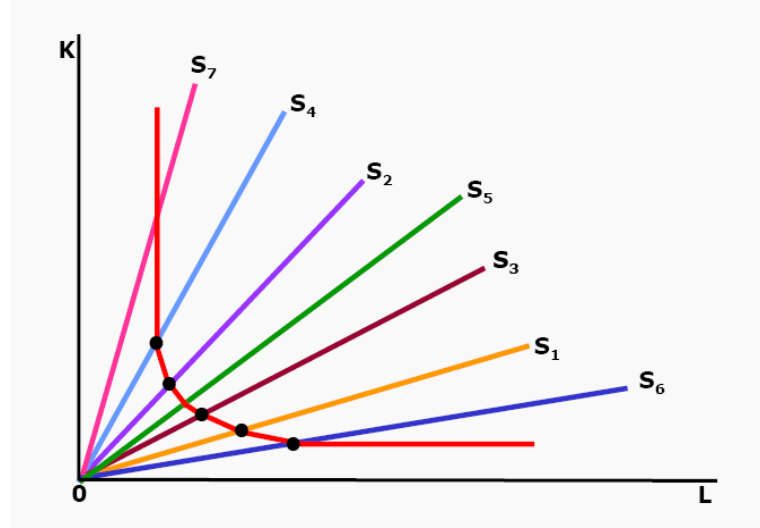
Şekil 3: Üretim fonksiyonu

Şekil 3'te ise üretim fonksiyonun grafiği görülmektedir.



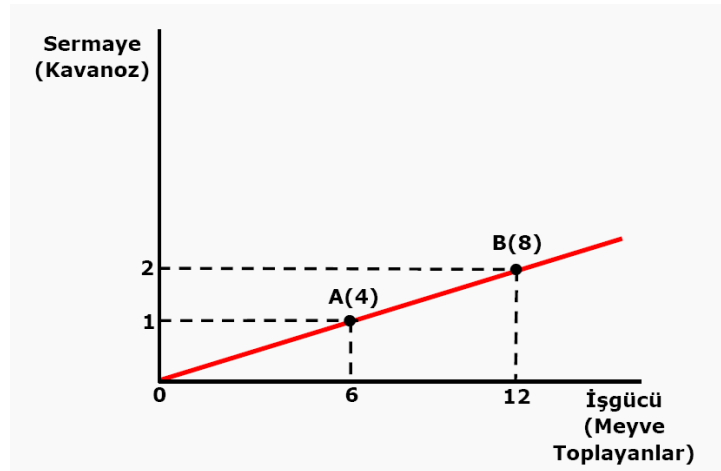
Şekil 4: Üretim fonksiyonu-Sermaye (K) Sabit

Şekil 4'de K-Sermaye değişkenin sabit tutulması halinde, üretim ile iş gücü arasındaki ilişki görülmektedir.



Şekil 5: Üretim fonksiyonu-Üretim (q) Sabit

Şekil 5’te q değişkenin sabit tutulması halinde üreticinin üretim tekniği olanaklarını gösteren eş ürün eğrileri yani üretim fonksiyonunun grafiği yer almaktadır.



Şekil 6: Üretim tekniği

Şekil 6’e göre birinci durumda 1 birim sermaye ve 6 birim işgücü kullanılarak, 4 birim reçel üretilmiştir. Aynı şekilde ikinci durumda 2 birim sermaye – 12 birim işgücü kullanılarak, 8 birim reçel üretilmiştir. Her iki üretim sürecinde kullanılan sermaye-işgücü oranı $1/6$ ’dır. Her iki üretim sürecinde sermaye-işgücü oranı sabit kaldığından, üretim sürecini doğrusal olarak tanımlanır.

Yüksek öğretim düzeyinde matematik öğrenenler, öğrenimlerinin her aşamasında "sayı" ve "fonksiyon" gibi iki temel kavram ile daima karşılaşır. Fonksiyon kavramının uygulamada ve üst kavramların oluşturulmasında kullanılabilmesi için ona ilişkin "limit", "türev", "süreklilik" ve "integral" kavramlarının da öğrenilmesi gerekir. Öte yandan, "süreklilik", "türev" ve "integral" kavramlarının, doğrudan "limit" kavramına bağlı olduğu da bilinmektedir (Sanchez, 1996). Yani, öğrenci "limit" kavramını tam olarak öğrenmeden, "süreklilik", "türev" ve "integral" kavramlarını oluşturması, öğrenmesi ve bu kavramları kullanarak matematik üretmesi çok zor ve hatta mümkün gözükmemektedir. Limit kavramına bu gözle bakıldığında ileri seviyedeki matematik için temel teşkil ettiğini görmek hiç de zor değildir. Kısaca üst düzey matematiğin temeli olan limit kavramı ile ilgili zihinde yapılandırılan yanlış kavram imajı ya da kavram yanılgıları daha ileriki aşamalarda matematiğin anlaşılması ve ilerletilmesi noktasında sıkıntılar doğurabilir. Yeni fikirleri mantıksal bir şekilde organize eden ve bunları kesin ifade ve çıkarımlar vererek inceltten, temkinli ve mantıksal bir bilinç etkinliği olan analiz işlemi yapmak için öncelikle lazım olan bilgilerin sentezi gerekmektedir. Bu yüzden limit kavramının tam öğrenilmesi yani sentez edilmesi, matematikte analiz yapacak olan özellikle işi matematik olanlar için çok önemlidir.

Bir fonksiyonun bir nokta etrafında nasıl davrandığını, o nokta etrafındaki noktalarda aldığı değerlerle gözlemleyebiliriz. Burada limiti anlama ve öğrenmedeki temel zorluk, iki nokta aynı olmadıkça birbirlerine ne kadar yakın olabileceğini zihninde canlandırma sorusudur. Bu sorunun cevabını çıplak gözle vermek mümkün değildir. Fonksiyonun incelenen nokta etrafında mümkün olduğunca fazla noktada aldığı değerler belirlenip, bu değerlerin hangi sayı etrafında yığıldığını sezip, sezilen bu sayının gerçekten limit olup olmadığı test edilerek limit tespit edilir. Ayrıca fonksiyonun incelenen noktada tanımlı olması da gerekmez.

Bütün fonksiyonlar için limit kavramının incelenmesinde ana fikir budur. Aslında bir fonksiyonun bir noktadaki limitinden bahsedildiğinde öğrencilerin aynı şeyi düşünüp düşünmediğini tespit etmek, öğrencilerin limit kavramını nasıl yapılandırdıklarını görmek açısından önemlidir. Öğrenci limit ve süreklilikle ilgili yukarıdaki düşünciyi bütün fonksiyonlar için kullandığında, bu kavramların anlaşılmasında sıkıntı çekilmeyeceği matematikçiler ve matematik eğitimcileri tarafından sıkça beyan edilir.

Matematik eğitimi araştırmacıları, özellikle üst düzey matematiği anlama süreçlerinin bileşenlerini ve bunların birbirini etkilemesinin önemini fark etmişlerdir (Dreyfus, 1989). Dreyfus (1989) elemanter süreçler ile ileri matematiksel düşünme arasında net bir ayrım söz konusu olmasa da, üst düzey matematikte tanımların soyutlanmasına ve genellemelere daha fazla odaklanmaya ihtiyaç duyulduğunu ifade etmektedir.

Soyutlama bilişsel yapının yeniden inşası sürecidir, matematiksel yapılardan zihinsel yapıların oluşturulmasıdır. Matematiksel nesneler arasındaki ilişki zihinde soyutlama faaliyeti ile kurulur. Soyutlama süreci genelleme ile yakından ilgilidir. Matematiksel genellemede bireysel bilgi yapısının gelişimi söz konusu iken, soyutlama zihinsel yapının yeniden kurulmasını gerektirir (Dreyfus, 1989).

Özellikle matematik eğitimi alan üniversite öğrencileri lisedeki öğrenimleri boyunca hep tek değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği ile meşgul olmuşlardır. Öğrencilerin çoğu çok değişkenli fonksiyonlar ve bu fonksiyonların limiti ve sürekliliği ile yüksek öğrenimin ilk dönemlerinde tanışacakları için, tek değişkenli fonksiyonlar için onlarda var olan limit ve süreklilik hakkındaki kavram imajlarındaki değişimin, soyutlamanın ve genellemelerin nasıl geliştiğini tespit etmek önemlidir.

Böylelikle limit kavramından dikey geçişte, örneğin "türev" ve "süreklilik" gibi üst kavramlara geçişler daha kolay olabilecektir. Bunun sonucunda öğrencilerin "limit kavramını" doğru yorumlayıp, diğer kavramlara geçişte edindikleri yeni öğrenmeleri rahat bir şekilde kullanabilecekleri düşünülmektedir (Bukova, 2006).

Matematiğin yapısına uygun bir öğretim şu üç amaca yönelik olmalıdır (Baykul, 1995: 31'den Van de Walle; 1989:6).

1. Öğrencilerin Matematikle ilgili kavramları anlamalarına
2. Matematikle ilgili işlemleri anlamalarına
3. Kavramların ve işlemlerin arasındaki bağların kurulmasına ve anlaşılmasına yardımcı olmak.

Matematik öğretiminde ilişkisel anlama; matematikteki yapıları anlama, sembollerle ifade etme ve bunun kolaylıklarından yararlanma, matematikteki işlemlerin metotlarını anlama ve bunları ifade etme, metot ve yöntemleri, kavramlardaki bağıntıları ve ilişkileri kurma olarak ifade edilebilir.

Matematikteki kavramların kendileri birer ilişkidir. Bu ilişkiler matematik içindeki başka kavramlarla da ilişkili olmalıdır. Matematikteki kavramların kazanılması için öğrencinin zihninde bu ilişkilerin oluşması gerekir (Baykul; 1995.33'den Van de Walle; 1989:7-8).

İlişkisel anlama öğretime daha çok yük getirir, daha çok araç kullanılmasına, gayret sarf edilmesine ve öğretmenin çalışmasını gerektirir; ayrıca daha çok zaman alır. Diğer taraftan öğrencilerin de öğrenmeye özellikle başlangıçta daha çok zaman ayırmalarını gerektirir. Ancak bu tür öğrenmenin öğrenci açısından birçok faydası vardır. Bunlar aşağıdaki gibi özetlenebilir (Hiebert ve Wearne, 1993):

- Öğrenme zevkli hale gelir, öğrenciler öğrenmeden haz duyarlar,
- Öğrenilenlerin hatırlanması kolaylaşır ve öğrenme daha kalıcı olur.
- Yeni kavramlar daha kolay öğrenilir, sonraki öğrenmelerde başkasının yardımına daha az ihtiyaç görülür; kendi kendine öğrenme kolaylaşır.
- Problem çözme becerisi gelişir, bu alandaki başarısı artar,
- Matematiğe olan kaygı azalır ve ona karşı olumlu tutum gelişir.

Diğer taraftan öğrencilere matematik öğretiminde ilişkisel anlamaya dayalı kavramları, işlemleri ve bunlar arasındaki bağları kurmalarına yardımcı olunabilirse, matematikteki başarının artması kaçınılmaz olacaktır (Van de Walle, 1989; Baykul, 1997).

Bu açıdan bakıldığında matematik öğretmen adaylarının limit ve süreklilik kavramları ile ilgili tek değişkenli ve çok değişkenli fonksiyonlarda oluşturdukları kavram bilgileri ve kavram imajları arasında bir ilişkinin olup olmadığını tespit etmek, öğrencilerin ileriki dönemlerde, konu hakkında ve konu ile bağlantılı diğer konularla ilgili daha iyi çıkarımlar geliştirebilmeleri için önem arz etmektedir.

1.5. Varsayımlar:

- Görüşmeye katılan öğretmen adaylarının; gerçek bilgi, duygu ve düşüncelerini yansıttıkları kabul edilmiştir.
- İstenmedik değişkenlerin, sonucu değiştirecek kadar etkili olmadığı varsayılmıştır.
- Kullanılan ölçme araçlarının kapsam geçerliliği için alınan uzman görüşlerinin yeterli olduğu varsayılmıştır.

1.6. Tezin Sınırlılıkları:

- 1) Araştırmanın çalışma evreni, bir devlet üniversitesinin orta öğretim fen ve matematik alan eğitimi bölümü matematik öğretmenliği anabilim dalında lisans eğitimi alan bir grup öğrenciyle sınırlandırılmıştır.
- 2) Araştırma, tek ve iki değişkenli fonksiyonlar için tanımlanan limit ve süreklilik kavramları ve bu kavramlara dair adayların sahip oldukları bilgi düzeylerini, onlarda bu kavramla ilgili olarak oluşan kavram imajlarını ve adayların bu kavramlar arasında var olan ilişki hakkındaki farkındalıklarını tespit etmekle sınırlıdır.
- 3) Araştırmanın uygulama safhası 2007-2008 / 2008-2009 öğretim yıllarında toplam 10 haftalık bir çalışma sürecinde tamamlanmıştır.
- 4) Araştırmanın dayanakları yurtiçi ve yurtdışından ulaşılabilen kaynaklar ile sınırlıdır.
- 5) Araştırma; adayların seçki dosyasında yer alan araçlardan (gözlem, mülakat, çoktan seçmeli ve açık uçlu sınavlar vb.) elde edilen verilerle sınırlıdır.

1.7. Tanımlamalar

Kavram İmajı: Zihinsel resimleri ve ilgili özellikleri ve süreçleri içeren konu ile ilgili bütün bilişsel yapı (Tall & Vinner, 1981).

Kavram Tanımı: Matematik topluluğunda kabul edildiği ve anlaşıldığı gibi formal tanım (Tall & Vinner, 1981).

Formal tanım (formal yaklaşım): Bir matematiksel kavramın evrensel olarak kabul görmüş, matematik otoritelerince benimsenmiş ve basılı kaynaklara geçmiş hali ile tanımlanmasıdır (Kabaca, 2006).

İnformal tanım (informal yaklaşım): Matematiksel kavramların, bireyin kendine has cümleleri ile kendi anladığı biçimde yapılan tanımlamalarıdır (Kabaca, 2006).

Yığılma Noktası: $A \subset R$ ve $a \in R$ olsun. a noktasının her δ –komşuluğunda A kümesinin a dan farklı en az bir elemanı varsa, bu a noktasına A kümesinin bir yığılma noktasıdır denir. (Balcı, 1996)

Komşuluk: $\varepsilon > 0$ ve $a \in R$ olsun, $K = \{x \in R : |x - a| < \varepsilon\}$ kümesine a nın ε komşuluğu denir. (Balcı, 1996)

Fonksiyon: A ve B iki küme olsun. A 'dan B ye olan bir f bağıntısı aşağıdaki özelliklere sahipse f 'ye A dan B ye bir fonksiyondur denir. (Balcı, 1996)

- i) Her $x \in A$ için $(x, y) \in f$ olacak şekilde B de en az bir y elemanı vardır.
- ii) $(x, y) \in f$ ve $(x, z) \in f \Rightarrow y = z$ dir.

Genelleme: Bilginin yeniden yapılanması ve genişlemesi demektir. Matematiksel genellemede mümkün olduğu kadar az temsille mümkün olduğu kadar çok şey anlatmak hedeftir (Morman, 1981).

Expansive (genişleyerek) genelleme: Bilişsel yapıyı ve fikirleri değiştirmeden sadece genişlemelerle yapılan genellemedir (Harel ve Tall,1989).

Reconstructive (yeniden yapılandırılmış) genelleme: Var olan bilişsel yapıyı yeniden yapılandırmayı gerektiren genelleme (Harel ve Tall,1989).

Soyutlama: Bilişsel yapının yeniden inşası sürecini ve matematiksel yapılardan zihinsel yapıların oluşturulması durumunu ifade eder. Matematiksel nesneler arasındaki ilişki zihinde soyutlama faaliyeti ile kurulur (Dreyfuss, 1991).

Generic (çıkarımsal) soyutlama: Öğrencilerin yürüttükleri bilişsel genişleme eylemlerinin kendilerini bir genellemeye götürdüğünü fark etmeleri, bir soyutlama işlemidir, bu türden soyutlamalara generic (çıkarımsal) soyutlama (Harel & Tall,1989) denir.

Formal (yapısal) soyutlama: Generic (çıkarımsal) soyutlamanın bir sonraki aşaması olup, bilişsel yeniden yapılanma gerektiren soyutlama türüdür (Harel & Tall,1989).

BÖLÜM 2

KAVRAMSAL ÇERÇEVE

2.1. Kavram Nedir?

Türk Dil Kurumu'nun Türkçe sözlüğünde kavram; “Nesnelerin veya olayların ortak özelliklerini kapsayan ve bir ortak ad altında toplayan genel tasarım, mefhum, kavrayış. Bir nesnenin veya düşüncenin zihindeki soyut ve genel tasarımı” olarak açıklanmaktadır (T. D. K. Türkçe Sözlük, 2005)

Kavram bir görüş veya düşüncenin, özellikle nesnelerin bir sınıfının genelleştirilmiş halidir. Kavram, psikolojide tanımlandığı şekliyle birbirinden bağımsız çeşitli elemanların bir bütün oluşturacak şekilde birleştirilmesinden doğan net bir fikirdir (Guralnik, 1986). Morris (1996) kavramı, bir düşüncenin zihindeki görüntüsü olarak tanımlamıştır. Altun'a (2001) göre kavram; sözcük olarak “belirli ortak özellikleri taşıyan nesne ve olayların adıdır”. Açı, üçgen, yüzey, benzerlik, limit, türev vs. birer matematik kavramlarıdır.

İnsan zihninde bilgi; kavramlar, kavramlar arasındaki ilişkiler bu kavramların ilişkileriyle birlikte bir araya gelmesiyle oluşan kurallardan oluşmaktadır. Olaylarda, süreçlerde ve cisimlerde algılanan bütünlüğe kavram denir (Novak 1983, Akt. Demirel 2005). Kavramlar, toplumsal olarak kabul edilmiş sözcüklerin anlamı olarak ifade edilebilecekleri gibi ortak özellikleri olan nesne, olay, fikir ve davranışların oluşturduğu sınıflamaların soyut temsilcisi olarak da ifade edilebilir. Doğuştan getirilen herhangi bir kavram yoktur (Albayrak, 2000). Dolayısıyla insanoğlu kavramları zihninde doğduktan sonra öğrenerek yapılandırır.

Kavramlar; adlandırma, gösterme ve tanımlama özelliğine sahiptirler. Adlandırma ve tanımlamalar başka kullanımlarıyla karşılıklı anlama ve anlaşmaya imkân verirler. Bu özellikleri nedeniyle de öğrenmenin vazgeçilmez öğelerinden biridir. Kavramlar, öğrenme-öğretme süreciyle bağlantılı kullanıldığında birtakım deneyimleri

sınıflandırmak ve bilgilendirmek gibi açık bir anlam kazanmaktadır (Beydoğan 1998). Kavram; algılamaya dayalı olduğu için bireyden bireye farklılık gösterebilir. Kavramlar hem soyut hem de somut özellikleri ayrı veya birlikte taşıyabilirler. Kavramlar farklı kültürler içinde farklı anlamlar taşıdığı gibi, aynı kültür içindeki bireyler arasında bile yaşantılara bağlı anlam farklılıkları gösterebilir (Beydoğan, 1998).

Yaşları, gelişim düzeyleri ve hatta içinde bulundukları ortam aynı özelliklere sahip olmasına rağmen çocukların sahip oldukları kavramlar, hem kapsam hem de tür açısından aynı değildir. Çünkü çocuklarda kavram gelişimini etkileyen pek çok faktör vardır. Bunlardan bazıları; duyu organları, zekâ, cinsiyet faktörü, kişilik, yaşantılar, öğrenme fırsatları, çocuklara sağlanan rehberlik düzeyi, yanlış anlamalardır (Beydoğan, 1998).

Kavram ile ilgili yukarıda verilen ifadelerden yola çıkarak, kavramlara dair aşağıda verilen ortak özelliklerden bahsedilebilir;

- Belirli ortak özellikleri taşıyan nesne ve olayların adıdır
- Doğuştan getirilen herhangi bir kavram yoktur
- Kavram; algılamaya dayalı olduğu için bireyden bireye farklılık gösterebilir.
- Kavramlar hem soyut hem de somut özellikleri, ayrı veya birlikte taşıyabilirler.
- Kavramlar farklı kültürler içinde farklı anlamlar taşıdığı gibi, aynı kültür içinde yer alan bireyler arasında bile yaşantılara bağlı anlam farklılıkları gösterebilir.

2.2. Kavram Bilgisi Nedir?

Kavramlar bilgi yapılarının ve anlam yapılandırmalarının temel elemanlarıdır. Kavramsal bilgi ise iyi yapılandırılmış ve sağlam ilişkilendirilmiş bilgi ağıdır. Kavramsal bilgi, depolanmış ve izole bir bilgi parçası değil, geniş ve iyi yapılanmış bir ağın parçasıdır. Buna göre kavramsal bilgi düzeyi; öğrencinin konuyu ya da kavramı bilme, hakkında fikir yürütebilme düzeyidir (Rittle-Johnson ve Koedinger, 2002; Star, 2002). Dolayısıyla kavram bilgisi matematiksel kavramların kendilerini ve bunlar arasındaki ilişkileri kapsar. Diğer bir deyişle matematiksel kavramların kendileri birer ilişkidirler, bu ilişkiler başka kavramlarla ilişkilidir. Örneğin; doğru tanımsız elemandır, fakat noktalardan oluşmuştur. O halde doğru kavramı nokta kavramıyla ilişkilidir. Daha iyi bir deyişle doğru kavramı, bir noktalar ilişkisidir. Sayılar arasındaki büyüklük,

küçüklük kavramları da sayılar arasında birer ilişkidir. Bu örnekler matematikteki bütün kavramlara genellenebilir (Hiebert, 1992). Dolayısıyla kavram bilgisi birey tarafından içsel olarak oluşturulmuş anlamlı ilişkilerdir. Kavram bilgisinde anlam önemlidir. Birey var olan bilgilerini kullanarak yeni bilgiyi zihninde yapılandırır, yeni bilgiyle bütünleştirerek içselleştirilir. Kavram bilgisi sadece kavramı tanımak veya kavramın tanımını ve adını bilmek değil, aynı zamanda kavramlar arasındaki karşılıklı geçişleri ve ilişkileri görebilmektir. Tek bir kavram kendi başına bir anlam ifade etmez. Kavram kendisinin anlamını taşıdığı grupla ilişkilendirilirse söz konusu kavramla ilgili anlam ortaya çıkar. Ne zaman yeni bilgi eski bilgi ile uygun bir şekilde ilişkilendirilebilir ve uzlaştırılabilir ise o zaman söz konusu kavramla ilgili anlama meydana gelir (Skemp, 1971).

Kavramsal bilginin düşünceler, gerçekler ve yöntemler arasında ilişki kurmak anlamına geldiği fikri yeni değildir. Brownel, Polya, McLellen ve Dewey gibi araştırmacıların klasikleşmiş çalışmalarında da yer almıştır. Matematiksel öğrenme üzerine çalışan hemen her araştırmacı, anlamının bilgi parçaları arasındaki ilişkiyi fark etmek olduğu görüşünde birleşmektedirler. Bir matematiksel düşünce, yöntem veya gerçek, mevcut bilgilerle güçlü ve çok sayıda bağlantı kurulabiliyorsa tam olarak anlaşılmıştır. Bu düşünceyle kavramsal anlama üzerine yapılmış çalışmalarda savunulan ortak fikir, anlamının bilgi parçaları arasındaki ilişkinin farkına varılması olduğudur. En basit tanımlamayla kavramsal anlama, bir matematiksel düşünce, gerçek ya da yöntemin kişinin kendi içinde yapılandığı içsel ağının bir parçası haline gelmesidir (Hiebert ve Carpenter, 1992; Novak ve Gowin, 1998).

Özetle kavramsal bilgi; kavramın tanımı ve özellikleri ile ilgili düşünme biçimini değişik şekillerde ortaya koyabilme, bunu yaparken terim, sembol ve işaretleri yerinde kullanma, tanım ve uygulamalarda matematiksel ilkeleri kullanabilme, kavramları örnekleme-karşı örnek verebilme, kavram ve ilkelerin ortak ve ayrık yanlarını belirleyerek karşılaştırma yapabilme, kavramların değişik biçimlerinin ve kullanım alanlarının matematiksel model ve yapılar ile bağlantılarını kurabilme, sonucu tahmin etme ve açıklayabilme gibi kazanımları içermektedir (NCTM, 2000). Buna göre kavramsal bilgi bağlamında yeterli gelişimi sağlamış olan öğrencinin; muhakeme ve iletişim becerisi de kavramın tanımı, ilişkilendirilmesi ve sunumu sırasında ortaya çıkacaktır.

2.3. İşlem Bilgisi Nedir?

İşlem bilgisi, onu meydana getiren iki ayrı kısım ile birlikte açıklanmaktadır. İşlem bilgisinin birinci kısmını matematiğin sembolleri ve dili oluşturur. İşlem bilgisinin ikinci kısmı ise kuralları, matematiksel problemi çözmek için kullanılan bağıntıları, somut nesneler üzerindeki işlemleri, görsel diyagramları, zihinsel hayalleri veya matematiksel sistemimizin standart olmayan diğer nesnelerini içerir (Hiebert ve Lefevre, 1986).

Öğrenciler işlemsel bilgilerini; uygun işlemi seçip doğru biçimde uygulama; sembolik yöntemler ve somut modeller kullanarak işlemin doğruluğunu ispatlama; problem durumunun gerektirdiği ölçüde işlemi değiştirme veya genişletme davranışlarıyla sergilerler. İşlemsel bilgi genellikle öğrencinin problem durumu uygun bir algoritmik süreçle ilişkilendirmesi, bu süreci doğru şekilde uygulaması ve sonuçları bu problem durum açısından açıklayabilmesi ile yansır (Porter ve Masingila, 2000; Camacho, 2002). Daha açık bir ifade ile kavramsal yapılarda işlemlerin algoritmik bir yapısı vardır. İşlemin önemli bir özelliği de bir bütün olarak düşünülmesidir. İşlemler sıraya konularak mantıklı adımlarla yürütülür ve sonuca gidilir. Örneğin 3 ile 2'nin toplanmasında 3'e önce 1 eklenip 4'ün, sonra tekrar 1 eklenip 5'in elde edilmesi bir işlemdir. Bu işlem her defa 1 eklenerek adım adım gerçekleştirilmiştir. İşlemlerin adım adım olması, bir işlemin bilgisayar programlarıyla gerçekleştirilmesine benzetilebilir. Bilgisayarda, işlemin programı bilgisayarın hafızasına yüklenir ve her defasında adım adım gerçekleştirilir. Program yüklendikten sonra bilgisayarın "işlem bilgisi"ne sahip olduğu ve o işlemi yapabileceği kabul edilir. Bu benzetme bizi, matematikte dört işlemi yapmanın süreç olarak mekanik bir olay olduğu sonucuna götürür (Van de Walle, 1989). Gerçekten bazı öğrenciler dört işlemi doğru olarak yapabildikleri halde, bu işlemlerle problem çözmede büyük zorluk çekmektedirler. Bunun sebebi, mekanik olan işlemlerin öğrenilmiş, fakat işlemlerin anlamlarının kavranmamış olmasıdır. (Kabaca, 2006)

Dolayısıyla özet olarak işlemsel bilgi; temel aritmetik işlemleri uygulayabilmek, gereken işlemi uygun olarak seçmek ve kullanmak, herhangi bir durum ile ilgili muhakeme yapabilmek, karşılaşılan bir problem durumunun çözüm basamakları arasında bağlantıları kurmak, karşılaştırmak ve ilişkilendirmek, çevrede görülen ya da sunulan bir durumu hesap yapmadan tahmin etmek ve yorumlamak; geometrik yapı oluşturmak,

grafik çizebilmek, onları okuyabilmek, sıralayabilmek; problem çözümünde verileri değiştirebilmek ve genişletebilmek, sembolik ya da somut modeller kullanarak yöntemin doğruluğunu ispatlayabilmek gibi kazanımları içermektedir. Öğrencinin bu kazanımları ortaya koyabilme düzeyi; kavramsal olarak belli ilkelere bağlı olan işlemlerin uygunluğu hakkında muhakeme edebilme, kullandığı farklı yöntemleri ve altında yatan nedenleri ilişkilendirebilme ve çözümünü uygun matematiksel dili kullanarak sunabilme becerilerinin gelişimi ile doğru orantılıdır (NCTM, 1991; CIAI, 2003).

2.4. Kavramsal ve İşlemsel Bilgiler Arasındaki İlişkiler

Kavramsal ve işlemsel ilişkiler arasındaki bağı kurma, uygun kavramları temsil etmede ve açıklamada kurallar ve işlemler bilgisini kavramlara uygun, anlamlı bir akıl yürütme ve semboller temeline oturtmadır. (Hiebert ve Levefre, 1986). İşlemsel bilgide, bir kavram ya da işlemin nedenini bilmeye gerek görmeden yalnızca nasıl kullanılacağını bilmek durumu söz konusu iken, kavramsal bilgide kavrama durumu öne çıkmaktadır (Baki 1998). Bir matematiksel süreç oluşturulduğunda, adımlar anlamlı olmalı ve her adımın niçin o şekilde yapıldığı açıklanabilmelidir. Diğer bir deyişle, her adımın o kavramla ilgisi kurulabilmelidir. İşlem bilgisinin kavramsal temellerinin kazanılmaması ve işlem bilgisiyle kavramlar arasındaki ilişkinin kurulmaması, modellerin kurulamamasına, işlemlerin nerede kullanılacağına karar verilememesine sebep olur. Bu da özellikle problem çözmede başarısızlık şeklinde kendini gösterir. Geleneksel matematik öğretiminde, bir işlemler bilgisi olan hesaplama becerisi ön planda tutulmuştur. Matematiğin doğuşunda ve tarihi gelişiminde de böyle olmuştur. Hatta matematiğin ilk kullanılışı da sadece hesaplama amacına yönelik olmuştur. Ancak, tarihî süreç içinde matematikte önemli gelişmeler olmuş, matematik hesaplamanın çok ötesine gitmiştir. Öğretimde, özellikle problem çözme becerilerinin kazandırılmasında hesaplama becerisi yanında, model kurma ön plâna çıkmıştır. Bu durum, matematik alanında öğrenme-öğretme süreçlerinde ilişkisel anlamının önemini artırmaktadır (Hiebert ve Levefre, 1986).

Matematikte kalıcı ve işlevsel bir öğrenme ancak işlemsel ve kavramsal bilginin dengelenmesiyle mümkün olabilir. Matematikte kavramsal bir öğrenmenin ağırlıkta olması gerekirken işlemsel öğrenmeye daha çok ağırlık verilmiştir. Yani matematikte işlemsel ve kavramsal öğrenme dengelenmemiştir. İşlemsel ve kavramsal öğrenme

dengelenmediğinden konular kavrama düzeyinde öğrenilememiştir. Öğrenciler için asıl zor olan anlatılan konularla ilgili kavramların öğrenilmesidir, algoritmik hesaplamaların öğrenilmesi değildir. Buna rağmen, Amerika da ki öğrenciler başta olmak üzere dünyadaki öğrencilerin hemen hemen bütün matematiksel deneyimleri hesaplamalardan ibarettir (Sabella ve Redish 1995: 1–6). Okullarda yalnız işlemsel bilgiyi gerektiren alıştırmalar üzerinde fazla durulduğu görülmektedir. Oysa hem işlemsel bilgiyi hem de kavramsal bilgiyi gerektiren problemler ile ders anlatılırsa matematik dersinde kavramsal bilgi ile işlemsel bilgi dengelenmiş olur. (Aksoy, 2007)

Matematik kavramları soyut yapıları sebebiyle yanlış anlaşılması olası kavramlardır. Bu kavramlar öğrenilirken, neyi neden yapacağını bilme anlamına gelen ilişkisel anlama gerçekleşmezse öğrencide kavram yanlışları ya da kavramla ilgili güçlükler oluşabilmektedir (Skemp, 1978). Anlamli öğrenmenin gerçekleşebileceği bir öğrenme ortamı oluşturmak yerine öğrencilerin bazı kural ve algoritmaları ezberlemeye yönlendirilmesi, işlemsel ve kavramsal bilgilerin ilişkilendirilmemesi gibi sebeplerle kavramların tam olarak anlaşılması güçleşmekte ve hatta kavram yanlışları ortaya çıkabilmektedir (NCTM, 2000). Anlamli öğrenme, öğrenenin var olan birikimiyle yeni bilgi arasında bir ilişki kurması halinde gerçekleşir ve ancak öğrenenin zihnindeki şemalarla yeni bilginin bağlantısının kurulması sağlanırsa oluşur (Ausubel, 1960). Bu sebeple matematiğin temel kavramlarının zihinde iyi yapılanması, daha sonra öğrenilecek üst düzeydeki kavramların da zihinde iyi yapılanmasını kolaylaştıracaktır. Böylece zihinde oluşacak kavramsal yapılar, kavramsal analizi ve doğru sonuç çıkarmayı hızlandıracaktır (MEB, 2005a).

Matematik öğretiminde hem işlemsel bilgi hem de kavramsal bilgi önemli rol oynamaktadır. Ancak okullardaki matematik öğretimine bakıldığında daha çok işlemsel bilgi üzerinde durulmaktadır. İşlemsel bilgi ile kavramsal bilgi arasındaki ilişkiyi oluşturamayan öğrenciler matematiksel kavramları yanlış algılamakta ve matematik öğretiminde çeşitli güçlükler yaşamaktadır (Ersoy & Erbaş, 2003). Bu nedenden ötürü öğrenciler matematiğe karşı olumsuz tutum geliştirebilmekte ve dolayısıyla matematikteki akademik başarıları olumsuz etkilenebilmektedir. Bu yüzden öğrencilerin matematiksel kavramları öğrenme süreçleri iyi analiz edilerek, bu süreçte öğrencilerin karşılaştıkları güçlükler belirlenerek bunların giderilmesine yönelik çalışmalar yapılmalıdır.

Vygotsky, kavramların iki şekilde kazanıldığını belirtmektedir. Vygotsky'ye göre kavramlar, kendiliğinden (spontaneous) ve kendiliğinden olmayan (scientific) şekilde kazanılır. Vygotsky, “spontaneous” kavramların öğrencilerin zihinsel gelişimleri gibi adım adım geliştiğini, “scientific” kavramların ise sözel bir tanımlama ve bu tanımlamanın kullanımıyla oluştuğunu belirtmekte ve ikinci tip kavramların, birinci tip kavramların oluşumundan daha sonra geliştiğini söylemektedir. Matematiksel kavramlar ise “scientific” kavram tipine girmektedir (Aktaran: Lansdell, 1999). Matematiksel kavramlar, temel matematiksel düşüncenin oluşması ve gelişmesinde aktif bir rol üstlenirler (Toumasis, 1995).

Öğretmenler, matematiksel kavramların bir zincir halkası gibi birbirleriyle bağlantılı olduğu gerçeğini gözden uzak tutmamalıdır. Öğrenciler açısından bu halkada olabilecek kopmaların ileri matematiksel kavramların öğreniminde zorluklara neden olabileceği ve bu durumun da öğrencilerin matematiğe karşı olumsuz bir tutum geliştirmelerine yol açabileceği gözden kaçırılmamalıdır (Swadener ve Soedjadi, 1988).

Bu sebeplerden dolayı kavramları öğreten öğretmenlerin, matematiksel kavramları kullanırken dikkat etmeleri gereken hususları Lansdell (1999) şu şekilde sıralamıştır:

- 1) Matematiksel kavramların farklı içeriklerde farklı anlamlara geldiği unutulmamalı,
- 2) Öğrencilerin öğretilen kavramları anlayıp anlamadıklarını değerlendirmek için, öğrenilen kavramı kendi ifadeleri ile tanımlamalarına imkân vermeli
- 3) Öğretilecek kavram ile öğrencilerin geçmiş birikimlerinin uyumunu sağlayacak ortamlar hazırlanmalı

Bu çalışmada öğrencilerle yapılan uygulamalarda, kavramların doğru öğrenilmesi için yukarıda belirtilen hususlar dikkate alınmıştır. Yöntem bölümünde de görüleceği gibi, “limit ve süreklilik kavramlarının farklı içeriklerde farklı anlamlara geldiğini hissettirmek” için derste öğretici tarafından adaylara tek ve çok değişkenli fonksiyonlar için limit ve süreklilik hakkında bolca örnekler verilmiş, konu ile ilgili görseller ve bilgisayar destekli öğretim metodu kullanılmıştır. Ayrıca öğretici çok değişkenli fonksiyonlar için limit ve süreklilik konusuna geçmeden önce tek değişkenli

fonksiyonların limiti ve sürekliliği konusunu 1 ders boyunca tekrar ederek “öğretilecek kavram ile öğrencilerin geçmiş birikimlerinin uyumunu sağlayacak ortamlar” hazırlamıştır. “Öğrencilerin öğretilen kavramları anlayıp anlamadıklarını değerlendirmek için, öğrenilen kavramı kendi ifadeleri ile tanımlamalarına imkân vermek” adına derslerden sonra öğrencilerden tek ve çok değişkenli fonksiyonlar için limit ve süreklilik kavramlarını kendi ifadeleri ile yeniden tanımlamaları istenmiştir.

2.5. Kavram Tanımı ve Kavram İmajı

Kavram tanımı ve kavram imajı matematik eğitiminde yaklaşık 30 yıllık bir geçmişe sahip terimler olup, günümüzde hala birçok çalışma tarafından kullanılmaktadır. Bu konuda yazılan ilk detaylı makale 1981 yılında Tall ve Vinner tarafından kaleme alınmıştır. Bu çalışmada yazarlar kavram tanımı ve kavram imajı terimlerini açıklamış ve terimleri özellikle limit ve süreklilik konuları ile örneklendirmişlerdir. Daha sonraki yıllarda bu çalışma kavram imajı konusunda en çok referans alan kaynak olagelmıştır (Bingolbali ve Monaghan, 2008). Tall ve Vinner (1981) bu terimleri ele aldıkları çalışmalarında kavram tanımını bir matematiksel kavramı tanımlamak için öğretmen/ders notları/ders kitabı tarafından kullanılan kelime ve sembollerin sunulduğu form olarak ifade etmişlerdir.

Kavram imajı bir matematiksel kavramla ilişkili olarak bireyin zihninde oluşan bilişsel yapıların tümü şeklinde ifade edilmektedir (Tall ve Vinner, 1981). Bu imajlar bireysel olup kişiden kişiye değişmekle birlikte zihinde oluşan kavrama dair çeşitli resimler, kavramın özelliklerine ilişkin algılayışlar, kavramı çağrıştıran çeşitli kelime ve/veya kelime gruplarını içermektedir (Bingolbali ve Monaghan, 2008). Kavram imajı öğrencinin matematiksel kavramla karşılaşmış olduğu çeşitli durumlarda edinmiş olduğu tecrübeler ile şekillenir. Burada belirtmek gerekir ki kavram imajı matematiksel açıdan doğru olmak zorunda değildir. Bir örnekle açıklamak gerekirse, öğrencilerin sürekli fonksiyonların grafiğini düşünürken sahip oldukları kavram imajı, günlük yaşantılarında bu kelimenin kullanımına dayalı olarak gelişen, hiç bir aralık ya da kesintinin olmadığı grafikler şeklinde olabilmektedir.

Vinner’in (1983) yaptığı gibi, eğer fikrimizi diyagramlar halinde sunmak istiyorsak, bilişsel yapıımızdaki iki ‘hücre’ye başvururuz. Birinci ‘hücre’ kavram tanımı ve ikinci ‘hücre’ de kavram imajı hücresidir. İlk hücre ve hatta bazen ikisi de boş

olabilir (Kavram imajı hücresi, herhangi bir anlamlandırma ile kavram ismi birleşmemişse boş olarak düşünülebilir. Kavram tanımı anlamsız bir yolla hatırlandıysa bu durum oluşabilir). Bu iki hücre arasında belli bir ilişki olmasına rağmen bu ilişki bağımsız olarak şekillendirilmiştir. Bir öğrenci çeşitli durumlarda birçok grafik görmek suretiyle koordinat sistemi hakkında kavram imajı oluşturabilir. Bu kavram imajına göre, iki eksen birbirini dik keser. Matematik öğretmenleri koordinat sistemini birbirini dik kesen iki düz çizgi olarak tanımlayabilir. Bunun sonucunda 3 durum ortaya çıkabilir:

1. Kavram imajı, koordinat sisteminin eksenleri arasında dik açı yokmuş gibi değişebilir. (Yeniden yapılandırma – uyum / reconstructivism-accommodation)
2. Kavram imajı olduğu gibi kalabilir. Kavram tanımı hücresi bir süreliğine öğretmenin tanımlamasını içerir fakat kısa bir süre sonra unutulabilir ve öğrenciden koordinat sistemini tanımlaması istendiğinde, öğrenci eksenlerin arasındaki dik açıdan bahsedebilir. (Formal tanım özümsememiş durumdadır.)
3. İki hücre de olduğu gibi kalabilir. Öğrenciye sunulduğunda öğretmenin tanımını tekrardan söyleyebilir fakat bütün diğer durumlarda öğrenciler, birbirine dik iki eksen düşünürler (Vinner, 1991).

Benzer bir süreç, kavramla ilk defa tanımı yardımı ile karşılaşıldığında geçer. Burada kavram imajı hücresi boştur. Birçok örnekten ve açıklamadan sonra bu hücre tamamen dolar. Ama bu tamamen kavram tanımını yansıtmaz (Vinner, 1991).

Kavram imajıyla kavramın edinildiği düşünülür, sezgisel olarak kavram tanımı kavramın anlaşılmasını garantilemez. ‘Anlama’ nın kavram imajına sahip olmakla gerçekleştiği düşünülür ve ‘kesin anlam’ kelimelerle birleşir. Örneğin ‘bilmek’, verilen bir kümenin kuvvet kümesinin o kümenin tüm alt kümelerinin kümesi olmasıysa, ‘anlamak’, verilen bir kümenin kuvvet kümesini oluşturabilmektir. Kuvvet kümesi imajı bazı kümelerin kuvvet kümelerinin ne olduğunun hatırlanmasını içerir (Vinner, 1991).

Günlük yaşantımızdaki ev, araba, elma gibi birçok kavram tanımlama içermez. Diğer bir yönden, bazı kavramlar tanımlarını içermelidir. ‘Orman’ kelimesi bir çocuğa ‘birçok ağacın birlikte olması’ şeklinde söylenebilir. Tanımlar bu şekilde kavram imajına yardımcı olurlar. İmaj oluştuğunda (şekillendiğinde) tanım istenilir duruma gelir (Vinner, 1991). Teknik içerikli bir durumda tanımların önemli bir rolü vardır.

Sadece kavram imajının şekillenmesine yardım etmediği gibi bilişsel bilgiye sahip olmada da yardımcı olur. Kavram tanımı kavram imajının kişiyi yanıltabilme ihtimaline karşı kişiyi korur (Vinner, 1991).

Bu çalışmada ele alınacak olan limit ve süreklilik ile ilgili öğrencilerin sahip oldukları kavram imajları aslında kavram yanılgıları hakkında da bilgi vermektedir. Bu yönüyle öğrencilerin sahip oldukları imajlarını kavram yanılgıları şeklinde değerlendirmek de mümkündür. Limitin geçilemeyecek bir sınır olarak algılanması, limit hesaplamının fonksiyonda yerine koyma işlemi ile eşlenmesi, limitin istendiği kadar kesin yapılabilecek bir değer olduğu şeklinde anlaşılması limit kavramına dair kavram imajlarına örnek olarak verilebilir. Bu şekildeki algı ve anlayışlar limit kavramına ait imajlar olarak değerlendirilebilirler.

İngilizce'de yaygın olarak "misconception" şeklinde isimlendirilen "kavram yanılgısı" terimi genellikle literatürde bir konuda uzmanların (expert) üzerinde hemfikir oldukları görüşten uzak kalan algı ya da kavrayış (conception) olarak kullanılmaktadır. Diğer bir deyişle bir alan ya da konudaki uzman algıdan uzaklaşan algılar (Hammer, 1996) olarak ele alınmaktadır. Dolayısıyla kavram yanılgısı denildiğinde uzmanlarla öğrenciler arasındaki temel algı farkları düşünülmektedir (Smith, diSessa ve Roschelle, 1993).

Kavram yanılgıları; önyargılı fikirler, bilimsel olmayan inançlar, kavramsal yanlış anlamalar, konuşma dilinden kaynaklanan yanılgılar, doğal olaylara dayalı yanılgılar olarak çeşitlere ayrılır (National Academy of Sciences/ National Research Council 1997). Kathleen (1994) yaptığı çalışmada kavram yanılgılarını, günlük hayattaki deneyimler ile kazanılan yanlış kavramlar ve öğretim boyunca kazanılan kavram yanılgıları olarak iki temel sınıfa ayırmaktadır. Deneyimlerle kazanılan kavram yanılgıları öğrencilerin önceki bilgilerini kullanarak mantıksal yorumlar yapmalarından kaynaklanmaktadır. Öğretim boyunca kazanılan kavram yanılgılarının temelinde ise öğrencilerin önceki bilgilerinin yetersiz oluşu, yeni öğrendikleri kavramların, formüllerin ve terimlerin benzerliği, öğretim yöntemlerinin konuya uygun olmaması yatmaktadır (Bilgin ve Geban, 2001).

Bu çalışmada “kavram” için nesnelerin ya da olayların ortak özelliklerini kapsayan ve ortak ad altında toplayan soyut ve genel fikir, “kavram yanılgısı” için ise bilimsel olarak doğru kabul edilmeyen ancak öğrencilerin kendilerine has biçimde anlamlaştırdıkları kavram tanımları kullanılacaktır.

Fishbein (1987) üç çeşit matematiksel bilgiden bahsetmektedir.

- Biçimsel (bir bilginin öyle olduğunu bilme [knowing that]-'iki tek sayının toplamı çifttir' gibi),
- Algoritmik (bir bilginin ya da kuralın nasıl işlediğini bilme, aşamalarını açıklama [knowing how] - iki tek sayının toplamını iki tane $2n+1$ sayısının toplamı şeklinde ele alıp sonucu değerlendirebilme)
- Sezgisel bilgi (matematiksel çokluklarla ilgili ilkel anlamda fikir ve görüşlerimiz, zihinsel modeller - 'çarpma daima çarpılandan büyük sonuç verir' (Graeber, Tirosh ve Glover, 1989) şeklinde bir modele sahip olmak gibi).

Fischbein'e (1993) göre bu üç bilgi arasındaki uyumsuzluk kavram yanılgılarının oluşumuna sebebiyet vermektedir. Bu noktadan hareketle bilgi çeşitleri arasındaki uyumsuzluğun ya da bu uyumsuzluğa eklenmeye çalışılan yeni bilginin kavram yanılgılarına sebebiyet verdiğini göz önünde tuttuğumuzda, bu uyumsuzlukları tetikleyen ya da bunlara sebep olan öğretim stillerinin benimsenmemesi gerektiği sonucuna varılabilir. Matematğin birikimli bir bilim dalı oluşu, başka bir deyişle daha önceden edinilmiş bilgilerin kullanılması matematik eğitiminin başarıyla yürütülmesi için kavram yanılgılarının saptanması ve giderilmesi gereğini doğurmaktadır. Yanılgılar, bireyin yanlış inançları ve deneyimleri sonucu ortaya çıkan davranışlardır. Doğal olarak yeni bilgiler, yanılgıların üzerine inşa edilirler ve daha önceden sahip olunan ön birikimler yeni kavramların da yanlış öğrenilmesine neden olabilirler (Baki, 1998). Bu nedenle, bu çalışmada adayların iki değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği ile ilgili kavram imajlarını (yanılgılarını) tespit etmeden önce bunlarla ilişkili olan tek değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği hakkındaki kavram imajları araştırılmıştır.

2.6. Genelleme ve Soyutlama Süreçleri

Matematik eğitimi alan üniversite öğrencileri lisedeki öğrenimleri boyunca hep tek değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği ile meşgul olmuşlardır. Öğrencilerin çoğu,

çok değişkenli fonksiyonlar ve bu fonksiyonların limiti ve sürekliliği ile yüksek öğrenimin ilk dönemlerinde tanışacakları için, onlarda var olan tek değişkenli fonksiyonların limit ve süreklilik hakkındaki kavram imajlarındaki değişimin, soyutlamanın ve genellemelerin nasıl geliştiğini tespit etmek bu kavramların yapılandırılmasında önem arz etmektedir.

Soyut, soyutlama ile elde edilen, varlığı maddeden hareketle insan zihninde gerçekleşen demektir. Soyut (İng. abstract) terimi, somutun (İng. concrete) zıddı gibi kullanılır (Türk Dil Kurumu Sözlüğü). Günümüzde matematik, ardışık soyutlama ve genellemeler süreci olarak geliştirilen yapılar ve bağıntılardan oluşan bir sistem olarak görülmektedir (New South Wales Department of Education and Australian Council for Educational Research, 1972). Buradan hareketle genel anlamda matematik, soyut düşünce ürünüdür, denilebilir.

Soyut kavramların kazanılması zordur. Matematiğin öğrencilere zor gelmesinin sebebi belki burada yatmaktadır. Okul matematiği, doğru olduğu bilinen sabit kurallar ve teknikler bütünüünün içselleştirilmesi ile edinilen bir sistem olarak görülmektedir (Beurk, 1982). Orta öğretimde öğretilen matematik ile üniversite matematiği arasında net bir ayrım söz konusu olmasa da üniversite matematiği, tanımların soyutlanmasına ve çıkarımlara daha fazla odaklanır (Tall, 1991).

Birçok araştırmada, öğrencilerin genellikle lineer cebirde algoritmik (işlemsel) kabiliyete sahip oldukları gösterilmiştir. Carlson, matrislerin çarpımlarının hesaplanması, tanımların yapılması ve lineer denklem sistemlerinin çözümü gibi basit algoritmik işlemlerde öğrencilerin hata yapmadıklarını ifade ediyor. Fakat biraz daha soyut kavramlar olan; lineer bağımsızlık, uzay, alt uzaylar ve lineer dönüşümlere geldiklerinde, öğrencilerin hata yapmaya başladıklarını belirtmiştir. Öğrenciler için asıl zor olan algoritmik hesaplamaların öğrenilmesinden ziyade, anlatılan konularla ilgili kavramların öğrenilmesidir (Sabella ve Redish, 1995).

Başka bir araştırmada; ankete katılan öğrenciler, üniversite matematiğini “gerçek matematik” olarak niteliyorlar, orada “niçin” sorusunun önemli olduğunu ve detaylı bir matematik yapıldığını belirtiyorlar. Öğrencilere göre, dersane ve liselerdeki matematik, detaya inmeden soruları çözmekten ve doğru cevabı bulmaktan ibaret.

Öğrencilere sadece gerekli formüllerin ve temel bilgilerin nasıl ezberleneceğinin öğretildiğini belirtiyorlar; üniversiteliler, bu tip bir eğitimin yükseköğretimde kendilerine problemler çıkardığını, üniversitede matematik başarılarının düştüğünü ve üniversite matematiğini çok soyut bulduklarını, ispatlayınız, yorumlayınız, gösteriniz şeklinde sorulardan hiç hoşlanmadıklarını ifade ediyorlar (Baştürk, 2005).

Dolayısıyla üniversite matematiğinin gerektirdiği soyutlamalara, çıkarımlara yani genellemelere orta öğretimde öğrenciler pek alışık olmadıkları için üniversitede gördükleri matematiğin kendilerine zor geldiği düşünülmektedirler. Peki, bu soyutlama ve genelleme süreçlerinde öğrencilerin bilişsel yapılarında ne tür değişiklikler meydana gelmektedir?

Soyutlama bilişsel yapının yeniden inşası süreci, matematiksel yapılardan zihinsel yapıların oluşturulmasıdır. Matematiksel nesneler arasındaki ilişki zihinde soyutlama faaliyeti ile kurulur. Soyutlama süreci genelleme ile yakından ilgilidir. Matematiksel genellemede bireysel bilgi yapısının gelişimi söz konusu iken, soyutlama zihinsel yapının yeniden kurulmasını gerektirir (Dreyfuss, 1991).

Üniversitede öğrencilerin matematiksel tecrübelerinin gelişimi ile genelleme ve soyutlama yetenekleri de gelişir. Eğer bir öğrenci matematiksel genelleme ve soyutlama yapma yeteneğini geliştirirse matematiksel düşünmenin ileri seviyelerine ulaşır. Bu genelleme ve soyutlama yeteneğini kazanma, ileri matematiksel eğitimin tek ve en önemli hedefidir (Tall, 1991).

Bir zihinsel faaliyet olan soyutlama olgusunun en önemli aşaması matematiksel genelleme sürecidir. Genelleme matematikte ileri adımlar atılmasına imkân sağlar. Matematiksel genellemede mümkün olduğu kadar az temsille mümkün olduğu kadar çok şey anlatmak hedeftir. Thomas Morman'ın ifadesiyle genelleme, bilginin yeniden yapılanması ve genişlemesi demektir (1981,60).

Tabii ki burada tümevarımdaki gibi maddesel anlamda bir genişleme kastedilmiyor. Yani örnek olarak, “bu zamana kadar gördüğüm tüm kargalar siyahtır, öyleyse tüm kargalar siyahtır” şeklinde bir genelleme değil. Burada önemli olan genelleştirilmiş cümleler ve teoremlerden ziyade, genelleştirilmiş bir teoremin yepyeni açıklayıcı bir

güce sahip olmasıdır. Reel sayıların karmaşık sayılara genişlemesi bir tümevarım değildir, aksine kavramsal bir ilerlemedir (Morman, 1982). Matematiğin felsefik problemleri adlı kitabında Vlademir N. Molodsij genelleme aşamalarını soyutlama olgusunun en önemli adımı olarak görmektedir. Genelleme aynı zamanda matematikte ileri adımlar atılmasına imkân sağlar. “Analitik geometri, Öklid geometrisine göre daha soyuttur. Analitik geometride geometrik şekiller bir koordinat sistemi üzerinde cebirsel metotlarla incelenabilmektedir. Böylece analitik geometri ile Öklid geometrisinde değişmez kabul edilen kuralların aslında kendi içinde birbirleri ile bağıntılı oldukları ve bir bütünlük arz ettikleri keşfedilmiştir. Buradan hareketle Öklid geometrisinde çözilemeyen bir sürü geometrik problem, analitik geometri ile çözülebilmektedir” (Molodsij, 1977)

“Genelleme” ve “soyutlama” terimleri, matematikte kavramların oluşum süreçlerini ve bu süreçlerin sonucu olan ürünü belirtmek için kullanılır. Örneğin vektör uzayı kavramı, iki veya üç boyutlu lineer denklem çözümlerinin, n boyuta genişlemesinin bağlamdan soyutlanması ile ortaya çıkmıştır. Bunu yaparken çok farklı zihinsel objeler üretilir. Dolayısıyla süreç, R^n genellemesi ve bir F cismi üzerindeki bir V vektör uzayı soyutlaması şeklinde özetlenebilir. R^n genellemesine her biri tekrarlanan aritmetik süreçlerin uygulanmasıyla açıklanan R^1 ’den R^2 ’ye, R^2 ’den R^3 ’e ve böyle devam eden koordinat genişlemeleriyle ulaşılabilir. V vektör uzayı soyutlaması aksiyomlarla tanımlanan farklı bir zihinsel objedir (Molodsij, 1977). Dolayısıyla genellemede sadece anlaşılmış süreçlerin bir genişlemesi yapılırken, soyutlamada yoğun bir zihinsel reorganizasyona (yeniden şekillenme) gereksinim vardır.

Aksiyomatik bir yapı kurarak vektör uzayını tanımlama bir soyutlama sürecidir, ancak vektör uzayının özelliklerinin incelenmesi sonucu bir takım teoremler geliştirilir. Bilişsel olarak bu yalnızca sonuç çıkarma süreci değil, öğrencilerin soyut objeleri oluşturma sürecidir.

Harel ve Tall (1989) matematiksel genelleme ve soyutlama süreçlerini, süreç sonunda bireyin bilişsel yapısında meydana gelen değişimlere göre kategorize etmişlerdir. Buna göre Harel ve Tall (1989) çalışmalarında, öğrencilerin bilişsel yapısını ve fikirlerini değiştirmeden sadece genişlemelerle yapılan genellemeyi “expansive

(genişleyerek) genelleme”, öte yandan var olan bilişsel yapıyı yeniden yapılandırmayı gerektiren genellemeyi ise “reconstructive (yeniden yapılandırılmış) genelleme” olarak tanımlamışlardır. Dolayısıyla R^n genel vektör uzayı soyutlaması hem reconstructive (yeniden yapılandırılmış) genelleme hem de expansive (genişleyerek) genelleme gerektirir.

Expansive (genişleyerek) genelleme, kalabalık sınıflar ile ilgilenmek gerektiğinde adapte edilebilecek iyi bir öğretim tekniğidir, çünkü öğrencilerde çok yoğun bilişsel değişim gerektirmez. Örneğin öğrenciler iki değişkenli lineer denklem sistemlerinin çözümünü bulma sürecini, üç ve daha çok değişkenli lineer denklem sistemlerin çözümü için genişletebilirler. Expansive (genişleyerek) genelleme kolaydır, çünkü iyi bilinen bir süreç daha geniş bir bağlama uygulanır. Expansive (genişleyerek) genelleme öğrencinin zihnini bilişsel yapıyı değiştirmeden soyutlama yapmaya götürür. Öğrencilerin yürüttükleri bilişsel genişleme eylemlerinin kendilerini bir genellemeye götürdüğünü fark etmeleri, bir soyutlama işlemidir, bu türden soyutlamalara generic (çıkarımsal) soyutlama (Harel & Tall, 1989) denir. Generic (çıkarımsal) soyutlama daha çok matematiksel uygulamalarla uğraşanlar tarafından yürütülen bir zihinsel faaliyettir. Formal (yapısal) soyutlama ise generic (çıkarımsal) soyutlamanın bir sonraki aşaması olup, bilişsel yeniden yapılanma gerektirir.

Bir takım girdi ve çıktı verileri arasında var olan bağıntıdan yola çıkarak, verilen başka girdilerin çıktılarının neler olması gerektiğinin tahmini fonksiyon fikrinin öğrencinin zihninde canlanmasını sağlar. Özel durumlardan yola çıkarak daha genel bir ifadeye ulaşıldığı için öğrenci, tahmin etme sürecinde fonksiyon kavramını zihninde oluştururken generic (çıkarımsal) soyutlama yapmış olur. Ancak bu durumdan hareketle öğrencinin örneğin özel fonksiyonların varlığını keşfetmesi ve özel fonksiyon örneklerinde gördüğü genellik sonucu, fonksiyon tanımından yola çıkarak özel fonksiyonlar için yeni bir tanımlama yapması formal (yapısal) soyutlamaya bir örnek olarak verilebilir. Dubinsky, bu geçişi Piaget in çerçevesinden “reflective soyutlama” olarak formüle eder (Tall,1991).

2.7. Limit ve süreklilik kavramlarının matematiksel yapıları

2.7.1. Tek değişkenli reel fonksiyonlarda limit ve süreklilik

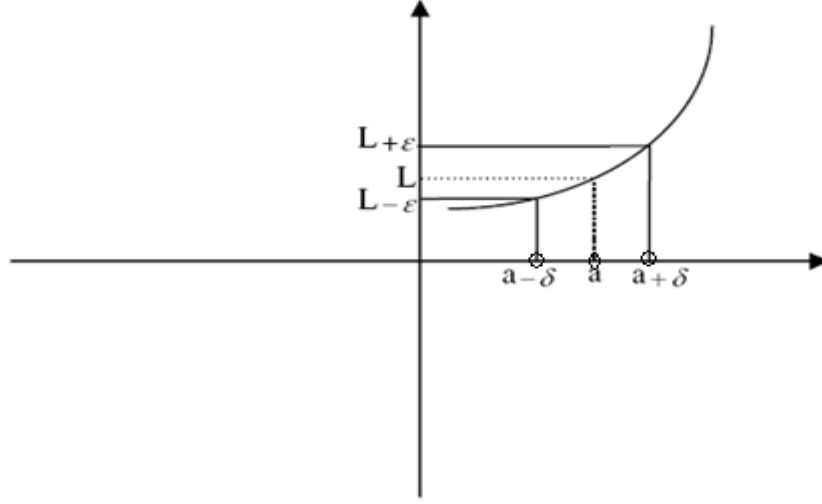
Tanım 1. : $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve a da A cümlesinin bir yığılma noktası olsun. Her $\varepsilon > 0$ için eğer $0 < |x - a| < \delta$ olduğunda $|f(x) - L| < \varepsilon$ kalacak şekilde ε sayısına bağlı bir $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa x , a 'ya yaklaştığında ya da başka bir ifadeyle “ x , a 'ya giderken” f 'nin limiti L 'dir denir ve

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

yazılır.

Limit ile bir fonksiyonun belirli noktalarda nasıl davrandığı incelenir. Tanım 1. “bir f fonksiyonu için x , a 'ya yaklaşıırken $f(x)$ 'in limiti nedir?” sorusunun cevabını verir. Yani x , a 'ya çok çok yaklaştığında, $f(x)$ 'in belli bir sayıya çok çok yakın olup olamayacağını, oluyorsa hangi sayıya çok çok yakın olacağını karşılığıdır. Burada belirtmek gerekir ki “ x , a 'ya giderken” demek, “ x , a 'ya yaklaşıırken ama x , a 'ya eşit olmadan a 'ya yaklaşıırken” demektir; çünkü f fonksiyonu a 'da tanımlı olmak zorunda değildir.

Limitin yukarıdaki formal tanımında üzerinde durulması gereken en önemli kavram komşuluk kavramıdır. Tanım 1. sözel olarak aslında şunu ifade etmektedir: Eğer f fonksiyonunun x , a 'ya yaklaşıırken limitinin değeri L ise, L 'nin istendiği kadar küçük bir komşuluğu, yani $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ için a 'nın bir delik komşuluğu, yani $(a - \delta, a + \delta)$ vardır ki bu delik komşuluğun f altındaki görüntüsü L 'nin seçilen komşuluğu içinde yer alır.



Şekil 7: Tek Değişkenli Reel Fonksiyonlarda Limit

Şekil 7’de de görüldüğü gibi f fonksiyonunun limitinin L olması demek, ε değeri ne kadar küçük seçilirse seçilsin, L ’nin ε komşuluğu içine kalacak şekilde a ’nın δ yarıçaplı bir delik komşuluğu bulunabilir demektir.

Tanım 1.1. : $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olmak üzere, f fonksiyonu a noktasında sürekli $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ vardır, öyle ki $\forall x \in A$ için

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \text{ dir.} \quad (*)$$

Tanım 1.1. bir fonksiyonun belirli bir noktada sürekli olması için gerekli ve yeterli şartın ne olduğunu ifade ediyor. Tanıma göre her $\varepsilon > 0$ için (*) koşulunu sağlayan en az bir $\delta > 0$ bulmalıyız. Bu δ sayısı ε ve a ’ya göre değişebilir ancak x ’ten bağımsızdır. Bir $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun bir $a \in A$ noktasında sürekli olduğunu kanıtlamak için, önce herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı seçilir. Sonra $x \in A$ için $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ eşitsizliğinin sağlanması için x ’in a ’ya ne kadar yakın olması gerektiği araştırılır. Bunun için genellikle $|f(x) - f(a)|$ ile oynayarak ifadeyi, içinde $|x - a|$ bulunan bir ifadeden daha küçük hale getirmek gerekir. Burada belirtmek gerekir ki a noktası tanım kümesinin bir elemanı olmak zorundadır.

Tanım 1.1.’den yola çıkarak bir fonksiyonun belirli bir noktada sürekli olması için gerek ve yeter şartları sözel olarak şu şekilde ifade edebiliriz;

1. f fonksiyonu a noktasında tanımlı olmalı, yani a noktası f fonksiyonunun tanım kümesinde olmak zorundadır.
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ mevcut olmalıdır.
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ değeri fonksiyonun a noktasındaki değerine eşit, yani $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ olmalıdır.

Eğer yukarıdaki üç şart sağlanıyorsa f fonksiyonu a noktasında sürekli denir. Eğer bir fonksiyon tanım kümesindeki tüm noktalarda sürekli ise bu fonksiyona “sürekli fonksiyon” denir.

2.7.2. İki değişkenli reel fonksiyonlarda limit ve süreklilik

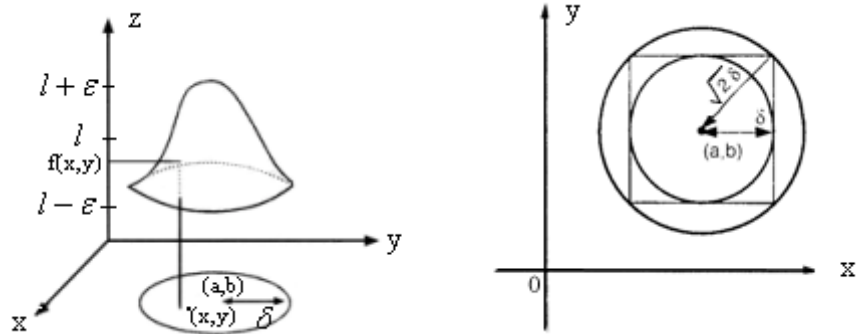
Tanım 2. : $A \subset \mathbb{R}^2$ (a,b) A kümesinin bir yığılma noktası ve f de A üzerinde tanımlı, reel değerli bir fonksiyon olsun.

f fonksiyonunun (a,b) noktasındaki limiti l dir $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ öyle ki A kümesinin (a,b) noktasının δ -komşuluğunda bulunan tüm (x,y) noktaları için $f(x,y)$ değerleri l 'nin ε -komşuluğunda bulunur (Şekil 8).

f fonksiyonunun (a,b) noktasındaki limiti l ise bu

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = l$$

biçiminde gösterilir.



Şekil 8: İki Değişkenli Reel Fonksiyonlarda Limit

(a,b) noktasının δ -komşuluğunda bulunan noktalar için

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$$

bağıntısı sağlanır.

$$|x-a| < \sqrt{(x-a)^2} < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

ve

$$|y-b| < \sqrt{(y-b)^2} < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

olduğundan $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$ bağıntısını sağlayan her (x, y) noktaları için

$$|x-a| < \delta \text{ ve } |y-b| < \delta$$

olur. Buradan hareketle, (x, y) noktası (a, b) ye yeter derecede yakın olduğunda x 'in a 'ya, y 'nin b 'ye yeter derecede yakın olacağı sonucu çıkar. O halde $|x-a| < \delta$ ve $|y-b| < \delta$ olduğunda

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \sqrt{\delta^2 + \delta^2} = \sqrt{2\delta^2}$$

olur ki bu da x 'in a 'ya, y 'nin b 'ye yakın olması durumunda (x, y) 'nin (a, b) noktasına yakın olacağını gösterir.

O zaman Tanım 2. yerine aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 2.1. : $A \subset \mathbb{R}^2$ (a, b) A kümesinin bir yığılma noktası ve f de A üzerinde tanımlı, reel değerli bir fonksiyon olsun.

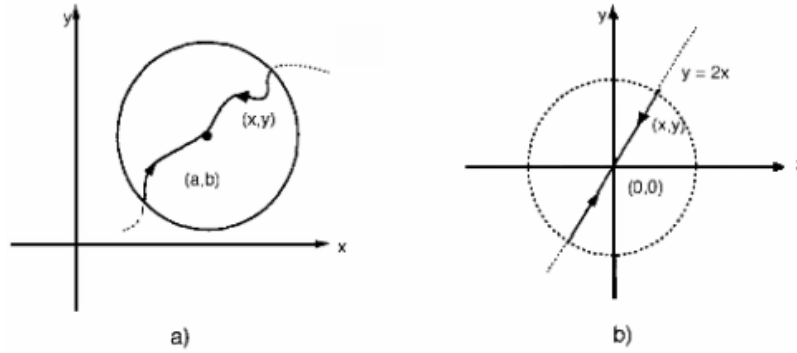
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \text{ için } \exists \delta > 0 \text{ öyle ki } |x-a| < \delta \text{ ve } |y-b| < \delta$$

bağıntısını sağlayan, tanım kümesindeki tüm (x, y) noktaları için $|f(x, y) - l| < \varepsilon$ dur.

$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = l$ ifadesi “ (x, y) noktaları (a, b) 'ye yaklaşırken f 'nin limiti l 'dir” biçiminde okunur. Burada “yaklaşma” sözcüğünden anlaşılması gereken şey (a, b) 'nin komşuluğunda bulunan ve gittikçe (a, b) 'ye daha yakın seçilen (x, y) noktaları için

$f(x, y)$ değerlerinin l sayısına yaklaştığıdır. Burada (a, b) noktasına yeter derecede yakın olan tüm noktalar göz önüne alınır (Balcı, 1996).

“ (x, y) noktası $y = g(x)$ eğrisi boyunca (a, b) noktasına yaklaşıyor” cümlesinin anlamı da “ (a, b) noktasından geçen $y = g(x)$ eğrisi üzerinde, gittikçe (a, b) ’ye yaklaşan (x, y) noktaları göz önüne alınıyor” demektir. Bu durum eğri üzerinde (a, b) noktasına doğru yön belirterek gösterilir (Şekil 9-a). Örneğin “ $(0,0)$ noktasına $y = 2x$ doğrusu boyunca yaklaşıyor” cümlesinin anlamı “ $y = 2x$ doğrusu üzerinde $(0,0)$ noktasına yakın olan $(x, y) = (x, 2x)$ noktaları göz önüne alınıyor” demektir (Şekil 9-b).



Şekil 9: İki Değişkenli Reel Fonksiyonlarda Limit-Yaklaşım

İki değişkenli bir fonksiyonun bir (a, b) noktasındaki limit araştırılırken şu hususlara dikkat etmek gerekir (Balcı, 1996).

1. Fonksiyon (a, b) noktasında tanımlı olmayabilir. Fakat (a, b) noktası tanım kümesinin bir yığılma noktasıdır.
2. l limiti varsa bu (x, y) noktasının (a, b) noktasına yaklaşma şekline bağımsızdır. Yani (x, y) noktası (a, b) noktasına hangi eğri boyunca yaklaşırsa yaklaşsın l limit değeri değişmez. Eğer (x, y) noktasının (a, b) noktasına yaklaşma yoluna göre limit değeri değişiyorsa fonksiyonun (a, b) noktasında limiti yoktur.

Tanım 3. : $A \subset \mathbb{R}^2$ (a, b) A kümesinin bir yığılma noktası ve f (a, b) ’de tanımlı ve $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b)$ ise f fonksiyonu (a, b) ’de süreklidir denir.

Eğer f fonksiyonu A tanım kümesinin her noktasında sürekli ise A da süreklidir denir.

Şu halde bir fonksiyonun bir (a,b) noktasında sürekli olması için

1. f , (a,b) noktasında tanımlı
2. f 'nin, (a,b) noktasında limiti var
3. $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = f(a,b)$

olmalıdır (Balcı, 1996).

2.8. Limit ve Süreklilik Kavramlarının Öğretimi ile ilgili Yayın ve Araştırmalar

Bu bölümde limit ve süreklilik kavramlarının öğrenilmesi ile ilgili yurt içi ve yurt dışında yapılan önemli akademik çalışmalardan bazıları özet olarak ele alınacaktır.

2.8.1. Limit ve Süreklilik Kavramlarının Öğretimi ile ilgili Yurt Dışında Yapılan Çalışmalar

Matematik eğitiminde yaklaşık 30 yıllık bir geçmişe sahip olan kavram tanımı ve kavram imajı terimlerine ilk kez Tall ve Vinner (1981), konuyu limit ve süreklilik hakkında yürüttükleri bir çalışma ile ilişkilendirerek açıklama getirmişlerdir. Bu çalışmalarında Tall ve Vinner (1981) kavram tanımını “öğretmen-ders notları-ders kitabı tarafından kullanılan ve kavramı açıklayan kelime ve sembollerin toplamı” olarak, kavram imajını ise, “bir kavram ile ilgili olarak öğrencinin zihninde oluşturduğu görüntü” olarak ifade etmişlerdir. Çalışma sonucunda şu ifadeyi kullanmışlardır: “Matematikte karşılaştığımız birçok kavram, formal olarak tanımlanmadan ve karmaşık bilişsel yapısına kavuşmadan önce kısmi olarak da olsa kişilerin zihninde mevcuttur. Bu çalışmada biz bu olayı özel olarak limit ve süreklilik kavramları üzerinde analiz edeceğiz.”

Çalışmalarında Tall ve Vinner, 70 üniversite 1. sınıf öğrencisine bir anket uygulamışlardır. Öğrencilerden öncelikle $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$ ifadesinin ne anlama geldiğini açıklamaları ve $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ ifadesinin tanımını bildikleri gibi yazmaları istenmiştir.

Tanım sorusuna dinamik cevap veren 31 öğrencinin tamamı, cevap vermeyen 21 öğrenci gibi, örneğe de dinamik bir yaklaşım sergilemişlerdir. Doğru formal tanım veren yalnızca 4 öğrencinin de 1'i örneğe dinamik yaklaşım ile cevap vermiştir. Yanlış formal tanım veren 14 öğrencinin de yalnızca 4'ü örnek için formal tanımlamalarını kullanırken, 10 tanesi dinamik yaklaşımla örneği cevaplandırmışlardır. Bu öğrenciler için, tanımın zihinlerinde farklı bir görünüm, kavramın ise daha farklı bir görünüm oluşturduğunu anlayabiliriz. Yanlış bir tanım yaptıklarından, kavram tanımının görünümünün zayıf ya da hatalı olduğu anlaşılmaktadır. Ayrıca limit kavramının görüntüsünün, tanımın zihinlerinde oluşturduğu görüntü ile çatışma halinde olduğu veya bağlantısız olduğu da anlaşılabılır.

Hofe (1998), öğrencilerin limit kavramında yaşadıkları problemleri incelediği çalışmasının sonucunda ana problemin; matematiksel içeriğin grafik ve aritmetik temsilleri, işlem ve nesne, statik ve dinamik yorum ve sezgisel fikirler ile matematiksel özellik alanlarında yaşandığı sonucuna varmış ve normal bir genel matematik dersinde bu alanlara fazla önem verilmediğini belirtmiştir.

Williams (1991), bir üniversitede genel matematik dersine katılan 341 öğrenci ile üzerinde kısa bir anket çalışması yürütmüştür. Öğrencilerden, limit ile ilgili 6 ifadenin doğru ya da yanlış olduğunu işaretlemeleri ve hangi ifadenin limiti en iyi tanımladığını seçmeleri istenmiştir. Williams daha sonra ankete katılanlar arasından özellikle informal tanımları işaretleyen beş öğrenci seçmiştir. 7 haftalık bir dönem boyunca her katılımcı ile 5'er kez görüşülmüştür. Her biri yarımşar saat süren görüşmelerde görüşmeci tarafından sunulan durumlara bağlı olarak, öğrenciler limit görüşlerini açıklamışlardır. Daha sonra, mevcut kavramlarındaki güçlüklerle dikkat çeken ve görüşlerini değiştirmeye yönelik konuları içeren limit problemleri üzerinde çalışmışlardır. Öğrenciler ile yapılan son görüşmede ise, Williams öğrencilere daha önceki görüşmelerde sergiledikleri limit görüşlerini ortaya koymuş ve bu görüşleri niçin değiştirdiklerini ya da değişmediler ise neden değiştirmediklerini sormuştur. Bu görüşmelerden sonra, Williams öğrencilerin limit görüşleri ile ilgili bazı genellemeler yapmıştır. Williams'a göre, öğrenciler basit ve pratik limit modellerini matematiksel tanımlardan daha önemli görüyorlar, çünkü öğrenciler için basit ve pratik limit modelleri sınavlarda başarılı olmak için yeterli görülmektedir. Öğrenciler pratik

bilgilerine (sürekli fonksiyonlarda yerine yazma, çarpanlara ayırma, sadeleştirme, eşlenik kullanma ve L'Hopital kuralını uygulama gibi...) kavramsal bilgilerinden daha çok önem atfediyorlar.

Davis ve Vinner (1986) Urbana'daki bir lisedeki son sınıf öğrencileri ile limit ve süreklilik kavramlarının gelişimi üzerine bir çalışma yürütmüşlerdir. Davis ve Vinner bu çalışmaları ile öğretimdeki değişikliğin umdukları kadar başarıyı etkilemediğini tespit etmişlerdir. Davis ve Vinner, bekledikleri sonucu alamayınca, öğrencilerde limit ve süreklilik kavramlarının nasıl geliştiğine dair bir çalışma yürütmüşlerdir. Öğrenciler genel matematik dersinin ilk senesinde, teorem ispatlamada, tanımları ifade etmede, hatalı tanımlara yönelik örnekler üretmede önemli bir hâkimiyet göstermişlerdir. Daha sonraki okul yılının ilk gününde, 15 öğrenciye kendi sezgileri ile bir dizinin limitini tanımlamaları ve tam bir formal tanım vermeleri istenmiştir. Cevapların, hiç de bir yıl önce göstermiş oldukları anlayışları yansıtmadığını görmüşlerdir.

Araştırmacılar, öğrencilerin yeni bir kavram öğrenmelerine rağmen, bu kavram ile ilgili eski zayıf bilgilerini kullanma eğilimi içinde olduklarını, limit ile ilgili soruları okulda öğrendiklerini kullanarak değil, eski zayıf bilgilerini kullanarak cevapladıklarını gözlemlemişlerdir.

Sierpinska (1987) “Beşer Olarak Öğrenciler ve Limit ile İlgili Epistemolojik Engeller” adlı çalışmasında seçtiği bir grup öğrencide bilimsel bilgi, sonsuz kavramı ve fonksiyon kavramı ile ilgili eksiklikleri belirtmiş ve limitle ilgili eksikliklerin bilimsel bilgi, sonsuz kavramı, fonksiyon kavramı ve reel sayı kavramı kaynaklı olduğunu vurgulamıştır.

Graham, Ferrini-Mundy ve Lauten (1994), ikisi bir lisede ileri seviye genel matematik dersi alan, üçü de bir üniversitede ilk dönem genel matematik dersi görmekte olan 5 öğrenci ile görüşme tekniğini kullanarak bir çalışma yürütmüşlerdir.

Graham ve arkadaşları, çalışmalarında başlıca

- öğrencilerin, fonksiyon ve limit kavram görünüşleri inceleme;
- bu kavramsal alanlardaki anlayışın birbirleri ile nasıl ilişkili olduğunu keşfetme;

konularını amaç edinmişlerdir.

Çalışma sonucunda Graham ve arkadaşları (1994) öğrencilerin limit hakkındaki kavram görünümünün formal tanımdan uzak, dinamik bir görünüm sergilediğini, rapor etmişlerdir.

Cornu (1981), yaptığı bir çalışmada limit kavramının öğrenciler için matematikte sonsuzluk kavramıyla karşılaştıkları ilk ve konu ile ilgili sorulara net bir cevap veremedikleri tek konu olduğunu ortaya koymuştur.

Monaghan (1991), “Limit Kelimesinin Algılanmasıyla İlgili Problemler” adlı çalışmasında limit öğrenimi ve öğretimi sırasında kullanılan dilin etkisi üzerinde çalışmıştır. Çalışma sonucunda limit kelimesinin çoğunlukla öğrenciler tarafından bir sınır olarak düşünüldüğü görülmüştür. Yaklaşma kelimesinin, bir şeyin başka bir şeye doğru en sonunda ulaşma fikri ile hareket etmesi, yakınsama kelimesinin ise iki sürekli nesnenin birleşmesi olarak öğrenciler tarafından algılandığı görülmüştür.

Gilman (1997) tarafından yapılan, “Analiz Dersindeki (Calculus) Güçlükler” adlı çalışmada limit tanımının, tanımdaki niceleyiciler nedeniyle öğrenciler tarafından anlaşılamadığı belirtilmiş ve limit tanımına alternatif bir tanım verilmiştir.

Dubinsky ve arkadaşları (1996), çalışmalarında limit kavramının öğrenciler tarafından nasıl algılandığı ile ilgili literatür çalışmalarının sentezine yer vermişlerdir. Limitin informal ve dinamik olarak algılanması üzerindeki görüşleri değerlendirmişler ve dinamik anlayışın öğrenciler tarafından daha kolay algılandığına ve bu anlayışın formal tanımla yapılandırma yönünde bir engel olarak görüldüğünü rapor etmişlerdir.

Przenioslo (2004), bir üniversitenin matematik bölümünde okuyan 2. sınıf öğrencilerinin limit kavram görüntüleri üzerine bir çalışma yürütmüştür. Çalışmada Przenioslo öğrencilere komşuluklar, yaklaşım, x_0 noktasında tanımlı olma, x_0 noktasındaki limitin $f(x)$ ile eşit olması kavramları üzerine odaklanılmış açık uçlu soruların ağırlıkta olduğu bir sınav uygulanmıştır. Önemli sonuçlardan biri olarak, öğrencilerin bazı kavramları tanımlama ile ilgili soruları doğru cevaplandıkları,

ancak bunları problem çözümlerinde uygulamaya aktarma konusunda sıkıntı çektiklerini gözlemiştir.

Todorov (2001), “Klasığe Dönüş: Sonsuz Küçüklerle Limit Öğretimi” adlı çalışmasında; limitin ε - δ ile verilen klasik tanımına alternatif olarak, tahmini bir limit değeri gerekmeksizin L limitinin tek olarak belirlenebileceğini gösteren yeni bir limit tanımı vermiştir.

Barbé, Bosch, Espinoza ve Gascón (2005), tarafından yapılan bir araştırma sonucuna göre öğrencilerin, limit kavramını oluşturmada yaşadıkları sorunların,

- fonksiyonun bir noktadaki limitini hesaplamada,
- fonksiyonun bir noktadaki limitinin varlığını göstermede,
- limitin fonksiyonla ilişkisini kurmada

ortaya çıktığını göstermektedir.

Szydlık (2000), “Matematiksel İnançlar ve Bir Fonksiyonun Limitini Kavramsal Anlama” adlı çalışmasında öğrencilerin Analiz dersini uygulanan, hatırlanan yöntem ve gerçeklerin bir koleksiyonu olarak gördüğünü ve bu yöntem ve gerçeklerin altında yatan teoriye değeri vermediklerini ve bunları anlamaya çalışmadıkları sonucuna varmıştır.

2.8.2. Limit ve Süreklilik Kavramlarının Öğretimi ile ilgili Yurt İçinde Yapılan Çalışmalar

Ülkemizde limit öğretimi ile ilgili yapılan akademik çalışmalardan bazıları aşağıda özetlenmiştir.

Bukova (2006) doktora tez çalışmasında yapılandırmacı öğrenme yaklaşımının gerçekleştirildiği sınıflarda, “limit kavramının” öğrenilmesindeki öğretim sürecinde, farklı öğrenme araçlarından ve teknolojiden yararlanmanın, etkisini araştırmıştır. Araştırmada, limit kavramının oluşturulmasına katkı sağlayacak, “Yapılandırmacı

Öğrenme Yaklaşımı” ile uyumlu bir öğrenme ortamı oluşturmak ve oluşturulan bu ortamın öğrencilerin limit kavramı ile ilgili başarılarına, matematiğe yönelik tutumlarına, yaşam ile okulu ilişkilendirmelerine, bilimi tanımlarına, öğrenmeyi öğrenmelerine, sorgulayarak öğrenmelerine, iletişim kurarak öğrenmelerine ve matematiksel düşüncelerinin gelişimine katkısının belirlenmesi amaçlanmıştır.

Araştırmada elde edilen verilerden, tasarlanan yapılandırmacı öğrenme ortamının, limit kavramının oluşturulması ve öğrenilmesinde çok yönlü olumlu katkı sağladığı ortaya çıkmıştır. Deney grubu deneklerinin okul ile yaşamı ilişkilendirme, öğrenmeyi öğrenme ve iletişim kurarak öğrenme yaklaşımlarının kontrol grubuna göre daha olumlu oldukları görülmüş ve iki grup arasında istatistiksel olarak anlamlı farklılıklar belirlenmiştir. Buna karşın, deneklerin matematiğe yönelik tutumları arasında istatistiksel olarak anlamlı bir fark bulunamamıştır. Deneklerin limit kavramı ile günlük yaşam arasında bir ölçüde ilişki kurabildiklerini, limit kavramını farklı yönleri ile tanımlamada ve görsel yapıdan hareketle, limit kavramını anlamlandırma sıkıntı yaşamadıkları ortaya çıkarılmıştır. Buna karşın, delta-epsilon yaklaşımını kullanarak fonksiyonun bir noktasındaki limitinin varlığını ispat etmede bir ölçüde zorlandıkları görülmüştür. Deneklerin matematiksel düşünme gelişim düzeylerinin karşılaştırılması ile deney grubundakilerin bu alanda gelişimlerinin daha üst düzeyde olduğu belirlenmiştir. Bunu yanında oluşturulan öğrenme ortamının deneklere sosyal yönden de katkı sağladığı görülmüştür.

Akbulut (2004) “Limit Öğretimi ve Kavram Yanılgıları” isimli yüksek lisans tezinde geleneksel yöntemlerden farklı olarak geliştirilen etkileşimli öğretim stratejisinin bilişsel alanın, kavrama ve uygulama basamaklarını kapsayan limit kavramının öğretilmesine olan etkisi ve bu süreçte ortaya çıkan kavram yanılgılarını araştırmıştır.

Akkoyunlu, Güler, Uğurel ve Alan (2003) “Ortaöğretimde Limit Kavramının Oluşturulmasına Yönelik Bir Çalışma” adlı çalışmalarında limit kavramının oluşturulmasında değişik bazı yaklaşımlarla bu sıkıntıların giderilmesi ve daha iyi bir öğretimin gerçekleştirilebilmesi amaçlanmaktadır. Bunun için de bazı öğretim yaklaşımlarını kısaca tanıtarak görüşlerini sunmuşlardır.

Karaca (2006) doktora tez çalışmasında limit kavramının öğretiminde bilgisayar cebiri sistemlerinin etkisini araştırmıştır. Bu araştırmada, genel matematik konularının temel yapı taşı olarak nitelendirilebilecek olan limit kavramının öğretiminde Bilgisayar Cebiri Sistemlerinden Maple programının kullanımının etkileri incelenmiştir. Bilgisayar Cebiri sistemlerinin etkisini gözlemlemek amacı ile seçilen iki araştırma grubundan birisine sadece yapılandırmacı öğretim ilkelerine göre ders verilirken, diğer grup aynı zamanda Maple programı yardımı ile araştırmacı tarafından geliştirilen yazılımlardan yararlanmıştır. 28 ders saati süren bir ders anlatımının ardından son testler ve son tutum ölçeği uygulanmış, elde edilen nicel veriler uygun parametrik ve non-parametrik istatistik testleri ile analiz edilerek bazı nitel verilerin de desteği ile yorumlanmıştır.

Çolak (2002) yüksek lisans çalışmasında, iki farklı eğitim durumunun limit öğretimine etkisini karşılaştırmıştır. Bu araştırmada geleneksel yöntemden farklı olarak geliştirilen eğitim durumunun öğrencilerin limit kavramını öğrenmelerine etkisi incelenmiştir. Araştırma sonucunda, geleneksel yöntem ile limit kavramı verildiğinde öğrencilerin “limit” kavramı ile ilgili problemleri çözebildikleri gözlemlenmiştir. Ancak limitin formal tanımını ve yaptıkları işlemin ne anlama geldiğini bilmedikleri de saptanmıştır. Geleneksel yöntemden farklı olarak verilen eğitim durumu ile limit kavramı verildiğinde ise öğrencilerin kavramlar ile işlemler arasında bağ kurdukları, yaptıkları işlemin ne anlama geldiğini bildikleri, bilgiyi ezbere öğrenmedikleri saptanmıştır.

Aztekin (2003) “Repertuar Çizelge Tekniği ve Limit Konusuna Uygulanması” isimli yüksek lisans çalışmasında, Repertuar çizelge tekniğinin limit konusuna uygulanmasını araştırmıştır.

Durmuş (2004) tarafından yürütülen bir başka çalışmada, limit, türev ve integral gibi fonksiyonla ilişkili kavramların, günlük yaşamda uygulamaları dikkate alınmadığından, öğrenciler tarafından ezberlenmesi gereken konular yığını olarak görüldükleri belirtilmektedir. Bu nedenle, söz konusu kavramlar öğrenciler için hiçbir somut anlamı olmayan, soyut ve gereksiz olarak görülmektedirler. Yani bir başka deyimle söz konusu kavramlar, içeriklerinden dolayı değil ele alınış şekilleri nedeniyle zor kavramlar olarak görülmektedirler.

Barak (2007) “Limit Konusundaki Kavram Yanılgılarının Belirlenmesi” isimli yüksek lisans tezinde, öğrencilerin limitin ϵ - δ tekniği ile verilen tanımı, fonksiyonun bir noktadaki limitinin varlığı, sağdan ve soldan limit kavramları, limit ve süreklilik kavramları arasındaki ilişki, bir fonksiyonun bir noktada tanımlı olması, fonksiyon grafiklerinin çizimi, sonsuz kavramının anlaşılması ve işlemlerde kullanılması ile ilgili kavram yanılgılarına sahip olduklarını belirlemiştir.

BÖLÜM 3

YÖNTEM

Bu bölümde araştırmada kullanılan modele, seçilen örnekleme, veri toplama sürecine, deneysel çalışma süreci ve verilerin analiz yöntemlerine ilişkin açıklamalara yer verilmiştir.

3.1. Araştırmanın Modeli

Araştırmada yarı deneysel yöntem (quasi-experimental research) kullanılmıştır (Cohen, Manion ve Morrison, 2000). Bu yöntemi gerçek deneysel yöntemden ayıran tek fark örneklemin rastgele atama ile oluşturulmamasıdır. Bu çalışmada tek grup üzerinde ön ve son test uygulamalarına dayanan bir tasarım kullanılmıştır (Robson, 1998; Karasar, 1999). Deneysel yöntemde amaç; bir araştırmada değişkenleri (nicel olarak ölçülebilen ve farklı değerler alabilen özellikler) ölçebilmek ve bu değişkenler arasındaki sebep sonuç ilişkilerini ortaya çıkarmaktır (Çepni, 2001).

Bu araştırma tek gruptan oluşmuştur ve gruba zamanlı testler yöntemi uygulanmıştır. Araştırma problemlerine cevap aramak için yürütülen çalışmalar yaklaşık bir yıllık bir süreci kapsamaktadır. Zamanlı testler yönteminde denenmeye başladıktan itibaren işin seyrine ve karakterine uygun olarak belli periyotlarla testler yapılarak her testin ölçümleri ayrı olarak kaydedilir ve verilerdeki değişimler ya da ilişkiler istatistiksel işlemlerle ve grafiklerle tespit edilir (Cebeci, 2002). Araştırmada bağımlı değişkenler, tek değişkenli ve çok değişkenli reel fonksiyonlarda limit ve süreklilik kavram imajları olup, bağımsız değişken ise bu iki değişken arasındaki ilişki olarak tespit edilmiştir. Öğrenci başarısını ölçmek için araştırmacı tarafından geliştirilen akademik başarı ölçeği kullanılmıştır.

3.2. Araştırmanın Deseni

Burada sonuçları sunulan deneysel çalışma, 2007-2008 / 2008-2009 eğitim öğretim yıllarında, toplam 10 haftalık bir süreçte gerçekleştirilmiştir.

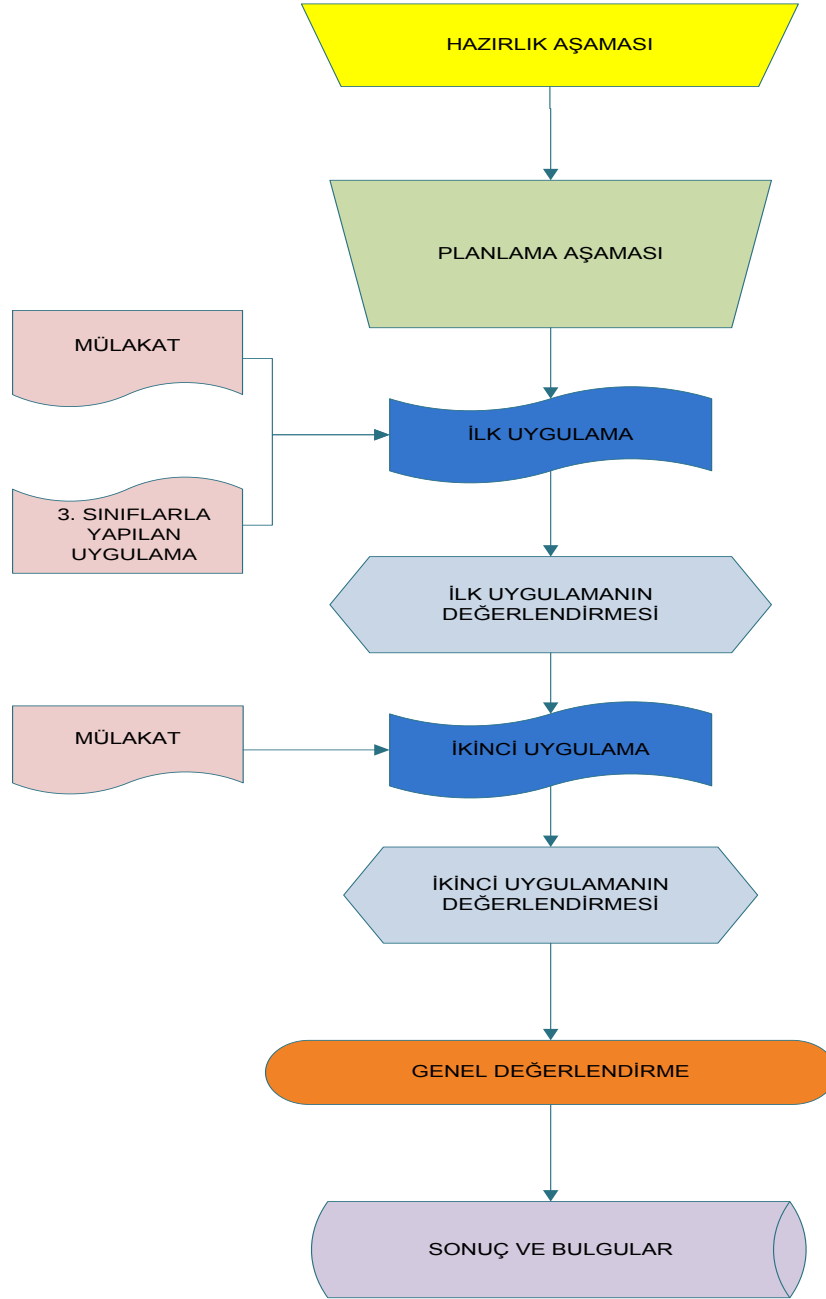
Araştırmanın birinci bölümünde matematik öğretmen adayı 1. sınıf öğrencilerinin tek değişkenli reel fonksiyonların limiti ve sürekliliği hakkındaki kavram bilgilerini, kavram imajlarını ve bunların sebeplerini ortaya koyabilmek için, önce Kasım-2007 ayında Analiz-1 dersi kapsamında yürütülen tek değişkenli reel fonksiyonların limit ve sürekliliği konulu dersler takip edilmiştir. Derslerin teorik ve uygulamalı anlatımları ikişer derste ve toplam 12 saatte tamamlanmıştır. Derslerin işleniş şekli, derste uygulanan öğretim teknikleri ve öğrencilerin derslerde sergiledikleri tutumlar araştırmacı tarafından dikkatle not edilmiştir. Derslerin bitiminde adayların bilgi düzeylerini ölçmek için adaylara konu ile ilgili bilgi testleri ve açık uçlu sorular yöneltilmiştir. Adayların açık uçlu sorulara verdikleri cevaplar incelendikten sonra, sorulara verdikleri cevapların sebeplerini araştırmak için araştırmaya katılan 7 öğrenci ile mülakat yapılmıştır.

Araştırmanın ikinci bölümünde birinci bölümdeki araştırmaya katılan ve araştırmanın yapıldığı tarihte artık 2. sınıf öğrencisi olan öğretmen adayları ile çok değişkenli reel fonksiyonların limiti ve sürekliliği hakkındaki adayların kavram bilgilerini, kavram imajlarını ve sebeplerini ortaya koyabilmek için Aralık-2008 ayında Analiz-2 dersi kapsamında yürütülen çok değişkenli reel fonksiyonların limit ve sürekliliği konulu dersler takip edilmiştir. Derslere başlamadan önce öğretmen adaylarına tek değişkenli reel fonksiyonların limit ve sürekliliği kavramları hakkında tekrarlar verilmiş ve çok değişkenli reel fonksiyonların limit ve sürekliliği hakkında fikirleri sorulmuştur. Daha sonra bu kavramlarla ilgili eğiticiler tarafından 2 ders ve toplam 4 saat olmak üzere teorik, yine 2 ders ve toplam 4 saat olmak üzere uygulamalı dersler yürütülmüştür. Derslerin işleniş şekli, derste uygulanan öğretim teknikleri ve öğrencilerin derslerde sergiledikleri tutumlar araştırmacı tarafından dikkatle not edilmiş ve videoya kaydedilmiştir. Derslerin bitiminde öğrencilere konu ile ilgili bilgi testleri verilmiş ve açık uçlu sorular yöneltilmiştir. Daha sonra araştırmayı desteklemesi açısından, adayların kavramlarla ilgili fikirlerini daha derin ve ayrıntılı analiz edebilmek için araştırmaya katılan 6 öğrenci ile mülakat yapılmıştır.

Ayrıca araştırmaya katkı sağlayacağı düşünüldüğünden, 2007-2008 öğretim yılı sonunda topoloji dersini almış 48 3. sınıf matematik öğretmen adayı ile bir uygulama yapılmıştır. Bu çalışmada adaylara reel değişkenli, herhangi iki topolojik uzayda

tanımlanmış fonksiyonların limiti ve sürekliliği hakkında açık uçlu sorular sorularak, konu ile ilgili adayların fikirleri alınmıştır.

Özet olarak araştırmanın deneysel deseni Şema 1’de verildiği şekilde oluşturulmuştur.



Şema 1: Araştırmanın Deseni

3.3. Veri Analiz Yöntemi

Toplanan veriler, nitel araştırmanın başlıca örüntüleri belirleme, kodlama ve kategorilere (temalara) ayırma işlemlerini kapsayan “içerik analizi” tekniğiyle analiz

edilmiştir. Ayrıca, görüşülen ve gözlemlenen bireylerin görüşlerini çarpıcı bir biçimde yansıtmak amacıyla doğrudan alıntılara yer verilmiştir. Elde edilen bulgular düzenlenmiş ve yorumlanmış bir biçimde okuyucuya sunulmuştur. Araştırmanın bu bölümünde yer alan içerik analizinde Microsoft Excel programında yer alan özet tablo fonksiyonundan da yararlanılmıştır.

3.4. Çalışma Evreni ve Örneklem

Araştırmanın çalışma evreni Ankara’da yerleşik bir üniversitenin matematik eğitimi anabilim dalı 1., 2. ve 3. sınıf öğrencileri olarak belirlenmiştir. Araştırmanın 1. kısmında 2007-2008 öğretim yılında 1. sınıfta öğrenim gören 45 öğrenci ile ilk uygulama gerçekleştirilmiş, bunlar arasından seçilen 7 öğrenci ile mülakatlar yapılmıştır. İlk uygulamanın amacını desteklemek ve planlamaya yardımcı olması için yürütülen bir başka çalışmada ise 2007-2008 öğretim yılı içinde 3. sınıfta öğrenim gören 22 kişilik bir öğrenci grubu seçilmiştir. Bu öğrencilerin özellikle topoloji dersini almış olmalarına özen gösterilmiştir. Burada amaç, öğrencilerin topoloji dersinde işlenen limit ve süreklilik kavramlarını, daha önce (1. ve 2. Sınıfta) gördükleri tek ve çok değişkenli fonksiyonlarda limit ve süreklilik kavramlarıyla ilişkilendirip ilişkilendiremediklerini ölçümlemektir.

Araştırmanın ikinci kısmı 2008-2009 öğretim yılında 2. sınıf öğrencisi olan ve araştırmanın birinci kısmına katılan 37 öğrenci ile yürütülmüştür. Bu çalışmada ve ilk çalışmalarda yer almış 6 öğrenci ile tekrar mülakatlar yürütülmüştür.

Çalışma için seçilen üniversitenin matematik eğitimi konusunda ülkenin en iyi üniversitelerinden biri olması nedeniyle, araştırmaya katılan tüm öğrencilerin matematik ve matematik eğitime karşı tutumlarının üst seviyede ve homojen olduğu düşünülmektedir.

3.5. Tek Değişkenli ve İki Değişkenli Reel Fonksiyonların Limiti ve Sürekliliği Hakkında Matematik Öğretmen Adaylarının Kavram Görüntülerinin Tespiti İle İlgili Veri Toplama Araçları

Araştırma iki aşamadan oluşmaktadır. Araştırmanın ilk bölümünde adayların tek değişkenli reel fonksiyonların limiti ve sürekliliği hakkındaki kavram imajları, ikinci

aşamada ise adayların iki değişkenli reel fonksiyonların limiti ve sürekliliği hakkındaki kavram imajları ortaya çıkarılmıştır. Burada ‘zamanlı testler’ ve ‘tek grup ön test-son test’ yöntemleri kullanıldığı için araştırmalarda veri toplama kaynağı olarak,

- Öntest
- Bilişsel Düzey Belirleme Testleri
- Yarı Yapılandırılmış Görüşmeler
- Envanter Çalışması
- Dersteki Gözlemler
- Öğrenci Günlükleri

gibi araçlardan faydalanılmıştır.

Bu araştırma tek gruptan oluşmuştur ve gruba zamanlı testler yöntemi uygulanmıştır. Araştırmanın iki ana problemi olan “Matematik öğretmen adaylarının tek değişkenli fonksiyonlarla çok değişkenli fonksiyonların limiti-sürekliliği ile ilgili kavram imajları arasında ne tür benzerlikler ve farklılıklar vardır?” ve “Çok değişkenli fonksiyonların limit ve sürekliliği ile ilgili kavram imajlarını yapılandırırken adayların tek değişkenli fonksiyonlarda bu kavramlarla ilgili oluşturdukları kavram imajları ne ölçüde etkili olmaktadır?” sorularına cevap bulabilmek için adayların üniversite 1.sınıfta işledikleri tek değişkenli reel fonksiyonların limiti ve sürekliliği kavramı nasıl yapıldırdıklarını ve 2.sınıfta iki değişkenli reel fonksiyonların limiti ve sürekliliği konularını zihinlerinde nasıl oluşturduklarını gözlemlemek gerekiyordu ve bunun için de yaklaşık 1 yıllık bir sürece ihtiyaç oldu. Zamanlı testler yönteminde çalışmalara başladıktan itibaren işin seyrine ve karakterine uygun olarak belli periyotlarla testler yapılarak her testin ölçümleri ayrı olarak kaydedilir ve verilerdeki değişimler ya da ilişkiler istatistiksel işlemlerle ve grafiklerle tespit edilir (Cebeci, 2002). Bu araştırmada uygulanan yönteme en uygun ve araştırmanın problemine cevap verebilecek veri toplama araçları kullanılmıştır. Bu araçlarla ilgili özet bilgiler aşağıda verilmiştir.

3.5.1. Ön Test

Araştırmanın 1. bölümünde adaylarla herhangi bir öntest çalışması yapılmamıştır. Çalışma grubu, aynı üniversitenin aynı sınıfında öğrenim gören matematik öğretmen adayları olduğu için adayların henüz 1. sınıfta matematik bilgi seviyelerinin homojen ve tek değişkenli reel fonksiyonların limiti ve sürekliliği hakkında belli seviyede bir ön bilgiye sahip oldukları varsayılmıştır.

Araştırmanın 2.bölümünde adayların iki değişkenli reel fonksiyonların limiti ve sürekliliği hakkındaki önbilgilerini görebilmek amacıyla açık uçlu 2 sorudan oluşan bir öntest yapılması uygun görülmüştür. Bu bağlamda araştırmanın 1. bölümünde üniversite 1. sınıf öğrencisi olan ve araştırmanın 2. bölümünde 2. sınıf öğrencisi olarak Analiz 2 dersinde çok değişkenli reel fonksiyonların limiti ve sürekliliği konusunu görecektik öğrencilere, derse başlamadan önce düzlemde tanımlı fonksiyonların bir noktadaki limiti ve sürekliliği hakkındaki görüşleri soruldu. Ayrıca öğrencilere aynı test içinde 3 boyutlu öklid uzayında tanımlı bir fonksiyonun belirli bir noktada limitinin var olup olmadığına, sürekli olup olmadığına karar verebilmek için fonksiyonun hangi ayırt edici özelliklerinden yararlanılabileceği sorusu yöneltildi. Çalışma tamamlandıktan sonra yapılan derste öğrencilere öğretim görevlisi tarafından tek değişkenli reel fonksiyonlarda limit ve süreklilik kavramları tekrar hatırlatıldı ve ardından iki değişkenli fonksiyonların tanım ve görüntü kümeleri ile grafikleri hakkında bilgiler verildi. Daha sonra öğrencilerden tek değişkenli reel fonksiyonlar için verilen limitin $\varepsilon - \delta$ tanımını iki değişkenli fonksiyonlar için bir kâğıda yazmaları istenmiştir. Bu öntest öğrencilerin derse hazır bulunuşluluklarını ve adayların mevcut bilgilerini kullanarak yaptıkları genellemelerde ne derece başarılı olduklarını ölçmek için araştırmacı tarafından kullanılmıştır.

3.5.2. Bilişsel Düzey Belirleme Testleri

Bilişsel düzey belirleme testlerinden ilki, öğrencilerin tek değişkenli reel fonksiyonlardaki limit ve süreklilik kavramları hakkındaki bilişsel düzeylerinin belirlenmesi amacıyla, ilgili kavramların derste işlenmesinin ardından adaylara uygulanan ve açık uçlu 9 klasik sınav sorusundan oluşan bir testtir. Test araştırmacı ve danışman tarafından geliştirilmiş ve testin limit ve süreklilik konusundaki kapsam geçerliliği konusunda üç farklı uzmanın görüşü de alınmıştır.

Ayrıca bu araştırmanın birinci bölümünde araştırmaya katkı sağlaması amacıyla uygulanan bir başka bilişsel düzey belirleme testi, topoloji dersini almış adayların limitin topoloji dersinde verilen tanımı ile limitin $\varepsilon - \delta$ tekniği ile verilen tanımı arasında bir ilişki görüp göremedikleri hakkındadır. Araştırmacı ve danışman tarafından geliştirilen bu testte adaylara 5 adet açık uçlu klasik soru yöneltilmiştir.

Araştırmanın 2. bölümünde kullanılan bilişsel düzey belirleme testi, çok değişkenli reel fonksiyonların limit ve sürekliliği dersi işlendikten sonra öğrencilerin konu hakkındaki bilişsel düzeylerinin belirlenmesi amacıyla, araştırmacı ve danışmanı tarafından geliştirilmiş 4 klasik sınav sorusundan oluşan bir testtir. Testin limit ve süreklilik konusundaki kapsam geçerliliği iki farklı uzman tarafından başarılı bulunmuştur.

Araştırmanın 1. ve 2. bölümünde kullanılan testlerde yer alan sorular ve adayların bu sorulara verdikleri cevaplar, adayların tek değişkenli ve iki değişkenli reel fonksiyonların limiti ve sürekliliği hakkındaki kavram imajlarının tespiti amacıyla “Bulgular” bölümünde tek tek ele alınarak incelenmiştir.

3.5.3. Yarı Yapılandırılmış Görüşmeler

Araştırmanın birinci kısmında adayların tek değişkenli reel fonksiyonların limiti ve sürekliliği konusundaki kavram imajlarını ve kavram bilgilerini ayrıntılı olarak belirlemek için 7 aday ile yarı yapılandırılmış yüz yüze görüşme tekniği kullanılmıştır. Uygulanan testlerin sonuçları araştırmacı tarafından her aday için ayrı ayrı hazırlanan dosyalara yazılı olarak kaydedilmiştir. Her öğrencinin cevapları kendi içinde karşılaştırılmış, öğrencinin konu ile ilgili bilgi düzeyleri, oluşan kavram yanlışları ve öğrenme zorluklarının neler olduğu araştırılmıştır. Daha sonra araştırma problemine uygun olarak soruları cevaplamada sıkıntı yaşayan ve kavram yanlışlığı olduğuna ve öğrenme zorluğu çektiğine inanılan adaylar belirlenerek bu adaylarla görüşmeler yapılmıştır. Görüşmede sorulan soruların, kolay anlaşılır olması, doğrudan amaca yönelik olması, açık uçlu olması, yönlendirici olmaması, çok boyutlu olmaması, alternatifinin de bulunması, farklı türden soruların da bulunması, soruların mantık düzeninde belirlenmesi ilkelerine uyulmaya çalışılmıştır (Yıldırım ve Şimşek, 2000).

Bu araştırma süreci boyunca görüşme yapılan aday sayısı 7’dir. Adaylarla yapılan görüşmelerde cihaz ile kaydetme ve not alma yöntemleri kullanılmıştır. Yapılan görüşmelerde cihaz ile görüşmeyi kaydetmeden önce görüşülen kişiden izin alınıp, görüşmelerin yalnızca araştırma amacıyla kullanılacağı güvencesi verilmiştir. Mülakat yarı-yapılandırılmış formatta olup, adaylarla yapılan görüşmelerde anket çalışmasında kendilerine yöneltilen sorulara vermiş oldukları cevaplar tekrar ele alınarak, hatalı

cevaplar irdelenmiş ve onların bu sorulardaki zorlanma sebepleri üzerinde durulmuştur. Görüşmeler her bir öğrenci için 10–15 dakika arasında sürmüştür.

Araştırmanın ikinci kısmında öğrencilerin iki değişkenli reel fonksiyonların limiti ve sürekliliği konusundaki kavram görüntülerini ayrıntılı olarak belirlemek için 6 öğrenci ile yarı yapılandırılmış yüz yüze görüşme tekniği kullanılmıştır. Adaylarla yapılan görüşmelerde cihaz ile kaydetme ve not alma yöntemleri kullanılmıştır. Yapılan görüşmelerde cihaz ile görüşmeyi kaydetmeden önce görüşülen kişiden izin alınıp, görüşmelerin yalnızca araştırma amacıyla kullanılacağı güvencesi verilmiştir.

Uygulanan testlerin sonuçları araştırmacı tarafından her öğrenci için ayrı ayrı hazırlanan dosyalara yazılı olarak kaydedilmiştir. Her öğrencinin cevapları kendi içinde karşılaştırılmış, öğrencinin konu ile ilgili bilgi düzeyleri, oluşan kavram yanlışları ve öğrenme zorluklarının neler olduğu araştırılmıştır. Daha sonra araştırma problemine uygun olarak soruları cevaplamada sıkıntı yaşayan ve kavram yanlışlığı olduğuna ve öğrenme zorluğu çektiğine inanılan 6 öğrenci ile görüşmeler yapılmıştır. Araştırmanın birinci bölümünde uyulan akademik ilkelerin tamamına bu görüşmelerde de uyulmasına özen gösterilmiştir.

3.5.4. Envanter Çalışması

Bu kısımda tek değişkenli reel fonksiyonlardaki limit ve süreklilik kavramları hakkında adayların edinmesi gereken asgari kazanımlar belirlenerek 12 madde halinde listelenmiştir. Adaylardan elde edilen veri toplama araçları (bilişsel düzey belirleme testleri, yarı yapılandırılmış görüşme sonuçları, derslerdeki gözlemler ve öğrenci günlükleri) bu araştırma için tekrar değerlendirilmiş ve gerekli kodlamalar yapılarak adayların konu hakkındaki düşünme tarzı ve bilgi seviyesi ortaya konulmaya çalışılmıştır. Bu amaçla bu kısımda mülakat sonuçları ve biliş düzeyi belirleme testi verileri değerlendirilen toplam 13 öğrencinin araştırma bulguları, araştırma süreci de dikkate alınarak tekrar incelenmiştir.

Araştırmanın ikinci bölümünde ise iki değişkenli reel fonksiyonlardaki limit ve süreklilik kavramları hakkında öğrencilerin edinmesi gereken 10 asgari kazanım belirlenmiştir. Öğrencilerden elde edilen veri toplama araçları bu araştırma için tekrar değerlendirilmiş ve gerekli kodlamalar yapılarak öğrencilerin konu hakkındaki düşünme

tarzı ve bilgi seviyesi ortaya konulmaya çalışılmıştır. Bu amaçla araştırmanın 1. bölümünün sonunda envanter çalışmasının yapıldığı 13 öğrencinin bu bölümde de konu hakkında elde edilen araştırma verileri (ön test, bilişsel düzey belirleme testleri ve yarı yapılandırılmış görüşmeler) tekrar incelenerek, değerlendirilmiştir.

Sonuç olarak, envanter çalışmaları ile tek ve iki değişkenli fonksiyonlardaki limit ve süreklilik kavramları hakkında adayların bilişsel düzeyleri tespit edilmek istenmiştir. Bunun için çalışmanın her iki bölümünde de yer alan ve yazılı uygulamaların tamamına katılan 13 adayın bilişsel seviyelerinin tespiti için kavramlar hakkında geliştirilen asgari kazanımlar tablosunda yer alan maddeler her bir öğrenci için puanlandırılmıştır. Böylelikle adayların tek değişkenli ve iki değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği hakkındaki kazanımları ölçülebilir hale gelmiştir. Ayrıca her iki asgari kazanım tablosunda yer alan 9 madde birbiriyle örtüşmekte, yani tek değişkenli fonksiyonların limit ve sürekliliği ile ilgili asgari kazanımlardan 9 tanesi iki değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği kavramları için de kullanılabilir. Bu şekilde iki çalışma sonunda ortaya çıkan sonuçlar birbiriyle kıyaslanabilir olmuş ve çalışmanın ana sorularından olan “Matematik öğretmen adayları çok değişkenli fonksiyonların limit ve sürekliliği kavramlarını yapılandırırken tek değişkenli fonksiyonlar için bu kavramlarla ilgili sahip oldukları kavram imajları ne kadar etkili olmaktadır?” ve “Adayların yürüttükleri matematiksel genelleme ve soyutlama süreçlerinde yaşadıkları sıkıntılar nelerdir?” sorularına cevap verebilmek daha kolay hale gelebilmiştir.

3.5.5. Dersteki Gözlemler

Analiz-1 ve Analiz-2 dersi kapsamında limit ve sürekliliği konu alan 4 teorik ve 4 uygulama dersi araştırmacı tarafından takip edilerek, dersler esnasında gözlemlenen öğrenci ve öğretim elemanı davranışları ile konu hakkında yapılan tartışmalar not edilmiştir.

3.5.6. Öğrenci Günlükleri

Günlükler öğrencilerin Analiz 1-2 derslerinin, işleniş biçimi ve öğrenme ortamı ile ilgili düşüncelerini ifade ettikleri küçük notlardan oluşturulmuştur.

BÖLÜM 4

BULGULAR

4.1. Tek değişkenli reel fonksiyonlardaki limit ve süreklilik kavramları hakkındaki bulgular

4.1.1. Bilişsel düzey belirleme test bulguları

Bu bölümün bu kısmında; adayların tek değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği kavramları ile ilgili kavram bilgileri ve kavram imajlarına ilişkin araştırma verilerinin istatistiksel çözümlemeleri sonucunda elde edilen bulgulara yer verilmiştir.

Araştırmada araç olarak 9 soruluk bir anket kullanılmıştır. Bu çalışmada yer alan soruların her biri, soru sırasına göre tek tek analiz edilerek yorumlanmıştır.

- 1) Limit sözcüğünü duyduğunuzda aklınıza gelen ilk şey nedir? Bu sözcüğün sizde neleri çağrıştırdığını yazınız.

Tablo 1: 1. soruya verilen gruplandırılmış cevapların dağılımı

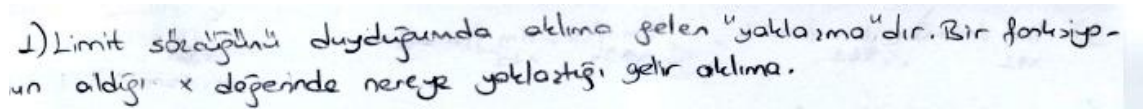
1. Soruya verilen cevaplar		Toplam	Yüzdelik Dağılım
1	Yaklaşma	30	67%
2	Sınır	9	20%
3	Epsilon-Delta, Komşuluk	3	7%
4	Belirlilik	1	2%
5	Matematiğin en zor konusu	1	2%
6	ÖSS	1	2%
Genel Toplam		45	100%

1. soru ile adayların limit kelimesini duyduklarında akıllarına gelen ilk şey öğrenilmek istenmiştir. Tablo 1 öğrencilerin 1. soruya verdikleri gruplandırılmış cevapları göstermektedir. Bu tablo incelendiğinde araştırma grubundaki adayların %67'sinin, “Limit” sözcüğünü duyduğunda ilk aklına gelenin “Yaklaşma” terimi olduğu görülüyor. “Yaklaşma” diyen grupta toplanan cevaplar ayrıntılı ele alındığında aşağıdaki tablo ortaya çıkmaktadır.

Tablo 2: “Yaklaşma” cevap grubunun ayrıntı tablosu

Cevap Grubu	Ayrıntı	Toplam	Yüzdelik Dağılım
Yaklaşma	Tanım	25	83%
	Kavram	5	17%
Toplam		30	100%

Bu tabloya göre “Yaklaşma” cevabını veren grupta yer alanların %83’nün, “Yaklaşma” kelimesini açıklayıcı bir tanım vermek istedikleri görülmektedir. Ancak bu cevaplar arasında yer alan hiçbir tanım matematiksel olarak bir anlam ifade etmemektedir.



1) Limit sözcüğünü duyduğunda aklıma gelen “yaklaşma”dır. Bir fonksiyonun aldığı x değerinde nereye yaklaştığı gelir aklıma.

Şekil 10: 1. Soruya “Yaklaşma” cevabını veren gruptan bir cevap örneği

Buradan, adayların matematik öğretmen adayı olarak üzerlerinde taşıdıkları kimliğe uygun tarzda formal tanımlar vermeye gayret gösterdikleri, ancak “limit” ile ilgili formal bir tanıma tam vakıf olmadıklarından, tanımı tamamen sözel olarak ifade etmeye çalışmış olabilecekleri sonucu ortaya çıkmıştır.

Tablo 1’da “Sınır” cevabını verenler grubunda yer alanlar (%20), “limit”i hep bir sınır belirlemek ya da belirli bir sınırlı aralıkta çalışmak şeklinde düşündüklerini ifade etmişlerdir.

↓) Limit sözcüğünü duyduğunda aklıma gelen ilk şey sınır, sınırları belirlemek anlamıdır. Bu sözcük hayatımızda bazı şeylere sınırlar koyabildiğimizi çağrıştırıyor. En basitinden bir örnekle kredi kartlarında var olan limit.

Şekil 11: 1. Soruya “Sınır” cevabını veren gruptan bir cevap örneği

Limit kelimesini duyduklarında akıllarına gelen ilk şey “Epsilon-Delta” ya da “Komşuluk” kavramları olan sadece 3 öğrenci (%7) bulunmaktadır. Adayların, limitin epsilon-delta kavramları ile ifade edilen tanımı ile ilk kez lise son sınıf ve üniversite sıralarında karşılaştıkları düşünülürse, sadece 3 adayın aklına bu kavramların gelmesi doğal karşılanabilir.

2) Sizce limit kavramı neden ortaya atılmıştır? Düşüncelerinizi yazınız.

Tablo 3: 2. soruya verilen cevapların gruplandırılmış halinin dağılımı

2) Soruya verilen cevaplar		Toplam	Yüzdelik Dağılım
1	Yaklaşık sonuç elde etmek için.	19	42%
2	Bilmiyorum. Daha önce hiç düşünmemiştim.	7	16%
3	Matematiksel analiz yapabilmek için.	5	11%
4	Sonsuz kavramını somutlaştırmak için.	5	11%
5	Fonksiyonun süreksiz olduğu bölgeleri ortadan kaldırmak için.	4	9%
6	Dairenin alanını bulmak için.	1	2%
7	Hayatı daha iyi anlayabilmek için.	1	2%

2) Soruya verilen cevaplar		Toplam	Yüzdelik Dağılım
8	Karmaşık matematiksel ifadeleri kolaylaştırmak için.	1	2%
9	Mühendislik hesaplarında işe yaradığı için.	1	2%
10	Bir sayının en yakın komşuluğundaki noktaların değerlerini bulmak için.	1	2%
Genel Toplam		45	100%

2. soru ile öğrencilerin limit kavramının neden ortaya atıldığı hakkındaki düşünceleri alınmak istenmiştir. Tablo 3 incelendiğinde adayların %42'sinin limit kavramının yaklaşık sonuç elde etmek için ortaya çıktığını düşündüğünü görmekteyiz. Bu sonuç aslında, 2. soruya verilen cevapların altında yatan düşüncenin 1. soruya verilen cevaplarda aranabileceğini göstermektedir.

2. Limit, yaklaşık sonucu varabilmek için ortaya atılmıştır.

2) Belki sonsuz kavramını insan beyninde biret somutlaştırabilmek için ortaya atılmıştır. Genel olarak matematik insan beynini geliştirir, Doğadaki birçok olayın matematikle açıklanabileceği söylenir ama bence matematik soyut bir kavram ve hiç matematikle açıklanabilmiş bir olay görmedim. Limit de öyle.

Şekil 12: 2. Soruya “Yaklaşık sonuç elde etmek için” ve “Sonsuz kavramını somutlaştırmak için” cevabını veren gruplardan birer cevap örneği

Limit kavramını açıklarken “yaklaşma” kavramını kullanmak doğru kabul edilebilir, ancak “yaklaşık sonuç elde etmek için” limit kavramının ortaya atıldığını söylemek

biraz zordur. Bu nedenle “yaklaşık” kelimesini kullanan adayların 1. soruya ne cevap verdiklerini incelemenin faydalı olacağı düşünülmektedir.

Tablo 4: 1. soruya “yaklaşma” cevabını verenlerin 2. soruya verdikleri gruplandırılmış cevapları

1) Limit sözcüğünü duyduğunuzda aklınıza gelen ilk şey nedir?	2) Sizce limit kavramı neden ortaya atılmıştır?	Toplam	Yüzdelik Dağılım
Yaklaşma	Yaklaşık sonuç elde etmek için.	15	50%
	Bilmiyorum. Daha önce hiç düşünmemiştim.	5	17%
	Matematiksel analiz yapabilmek için.	4	13%
	Dairenin alanını bulmak için.	1	3%
	Karmaşık matematiksel ifadeleri kolaylaştırmak için.	1	3%
	Mühendislik hesaplarında işe yaradığı için.	1	3%
	Bir sayının en yakın komşuluğundaki noktaların değerlerini bulmak için.	1	3%
	Fonksiyonun süreksiz olduğu bölgeleri ortadan kaldırmak için.	1	3%
	Sonsuz kavramını somutlaştırmak için.	1	3%
Genel Toplam		30	100%

Tablo 4’ten görülmektedir ki 1. Soruya, “yaklaşma” gruplandırılmış cevabını veren adayların (%50) yarısı, yaklaşma kavramını “yaklaşık sonuç elde etmek” şeklinde düşünmektedir. Ayrıca bu gruptakilerin %17 ise 2. soruya “Bilmiyorum. Daha önce hiç düşünmemiştim.” şeklinde cevap vermişlerdir. O halde 2. soruda “yaklaşık sonuç elde etmek için” limit kavramının ortaya atıldığını düşünen adayların yarısının düşüncesinin altında aslında “yaklaşma” kelimesinin yattığı söylenebilir.

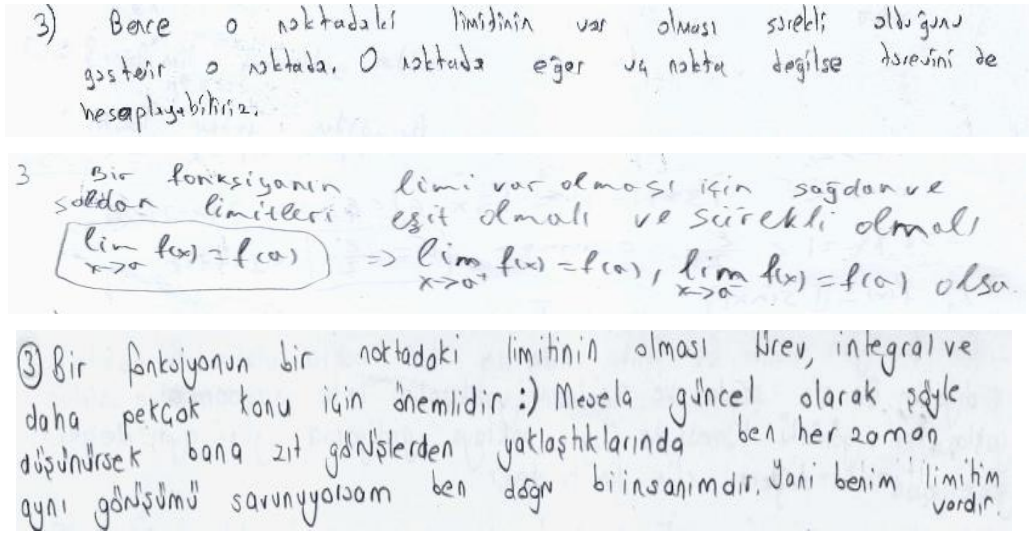
2.soruya “Bilmiyorum. Daha önce hiç düşünmemiştim.” şeklinde cevap veren toplam 7 öğrenci (%16) bulunmaktadır.

3) Bir fonksiyonun bir noktadaki limitinin var olmasının önemi sizce ne olabilir?

Tablo 5: 3. soruya verilen cevapların gruplandırılmış halinin dağılımı

3) Soruya verilen cevaplar		Toplam	Yüzdelik Dağılım
1	Fonksiyonun o noktadaki yaklaşık değerini verir.	12	27%
2	Bir fikri yok.	10	22%
3	Fonksiyonun o noktada tanımlı olduğunu gösterir.	7	16%
4	Fonksiyonun o noktada sürekli olduğunu gösterir.	6	13%
5	Fonksiyonun o noktada sınırlı olduğunu gösterir.	3	7%
6	İleri matematiksel işlemler yapılabilir.	3	7%
7	Daha kolay çözümler elde edilebilir.	2	4%
8	Fonksiyonun nasıl hareket ettiğini belirtir.	2	4%
Genel Toplam		45	100%

3. soru ile öğrencilere limitin önemi hakkındaki düşünceleri sorulmuştur. 3. soruya “yaklaşık değer bulma” cevabını verenlerin %27 ile en başta yer aldığını görmekteyiz. Bu soru hakkında herhangi bir fikir beyan etmeyen adaylar %22 ile 2. sırada yer almaktadır. Ayrıca uzman görüşüne göre sadece; bu soruya verilen cevaplar arasında yer alan, “İleri matematiksel işlemler yapılabilir.” (%7) ve “Fonksiyonun nasıl hareket ettiğini belirtir.” (%4) ifadeleri doğru kabul edilebilir cevaplardır.



Şekil 13: 3. Soruya verilen cevaplardan birkaç örnek

Burada ilk 2 soruya verilen cevaplarla, bu soruya verilen cevaplar arasındaki tutarlılığın incelenmesinde, adayların düşüncelerinin çıkış noktasının araştırılması açısından fayda bulunmaktadır.

Tablo 6: 1. ve 3. soruya verilen cevapların gruplandırılmış halinin matrisi

1) Limit sözcüğünü duyduğunuzda aklınıza gelen ilk şey nedir?	3) Bir fonksiyonun bir noktadaki limitinin var olmasının önemi sizce ne olabilir?							
	Daha kolay çözümler elde edilebilir.	Fonksiyonun nasıl hareket ettiğini verir.	Fonksiyonun o noktada sınırlı olduğunu gösterir.	İleri matematiksel işlemler yapılabilir.	Fonksiyonun o noktada sürekli olduğunu gösterir.	Fonksiyonun o noktada tanımlı olduğunu gösterir.	Bir fikri yok.	Fonksiyonun o noktadaki yaklaşık değerini verir.
Yaklaşma	1	2	1	2	5	4	6	9
Sınır			2		1	3	2	1
Epsilon-Delta							1	1
Belirlilik				1				
Komşuluk	1							
Matematiğin en zor konusu								1
ÖSS							1	
Genel Toplam	2	2	3	3	6	7	10	12

Bu tabloya göre, 3. soruya “yaklaşık değer” cevabını veren 12 adaydan 9’unun (%75) 1. soruya “yaklaşma” ile cevap verdikleri ve 3. soruya cevap vermeyen 10

öğrenciden altısının (%60) ise bir fikir beyan etmediği gözlemlenmektedir. Bu iki grubun toplamı 45 kişilik çalışma evreninin %33'ünü teşkil etmektedirler.

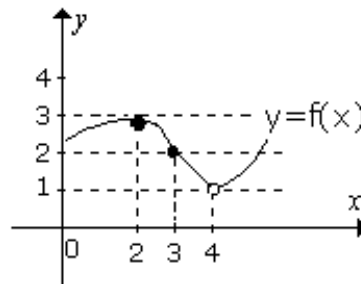
Ayrıca limit sözcüğünü duyduğunda aklına gelen ilk şey “ÖSS” olan adayın 3. soruya cevap vermemesi de dikkat çekicidir.

Tablo 7: 2. ve 3. soruya verilen cevapların gruplandırılmış halinin matrisi

2) Sizce limit kavramı neden ortaya atılmıştır? Düşüncelerinizi yazınız.	3) Bir fonksiyonun bir noktadaki limitinin var olmasının önemi sizce ne olabilir?		
	Bir fikri yok.	Fonksiyonun o noktadaki yaklaşık değerini verir.	Genel Toplam
Bilmiyorum. Daha önce hiç düşünmemiştim.	3		3
Yaklaşık sonuç elde etmek için.	2	10	12
Genel Toplam	5	10	15

Tablo 7’ den 2. ve 3. soruya aynı anda cevap vermeyen 3 aday olduğu, ayrıca 3. soru için bir fonksiyonun bir noktadaki limitinin var olmasının önemini “Fonksiyonun o noktadaki yaklaşık değerini vermesi” ile izah eden 10 aday olduğu görülmektedir. Yani 3. soruya bu şekilde cevap veren 12 adayın 10’u 2. soruya benzer bir şekilde “Yaklaşık sonuç elde etmek için” şeklinde cevap vermiştir. Bu nedenle adayların limit ile “yaklaşık sonuç elde etme” arasında yanlış bir bağ kurdukları söylenebilir.

4) Aşağıda grafiği verilen fonksiyonun $x=4$ deki limitini belirlemek için yapılması gerekenleri yazınız.



Tablo 8: 4. soruya verilen cevapların gruplandırılmış halinin dağılımı

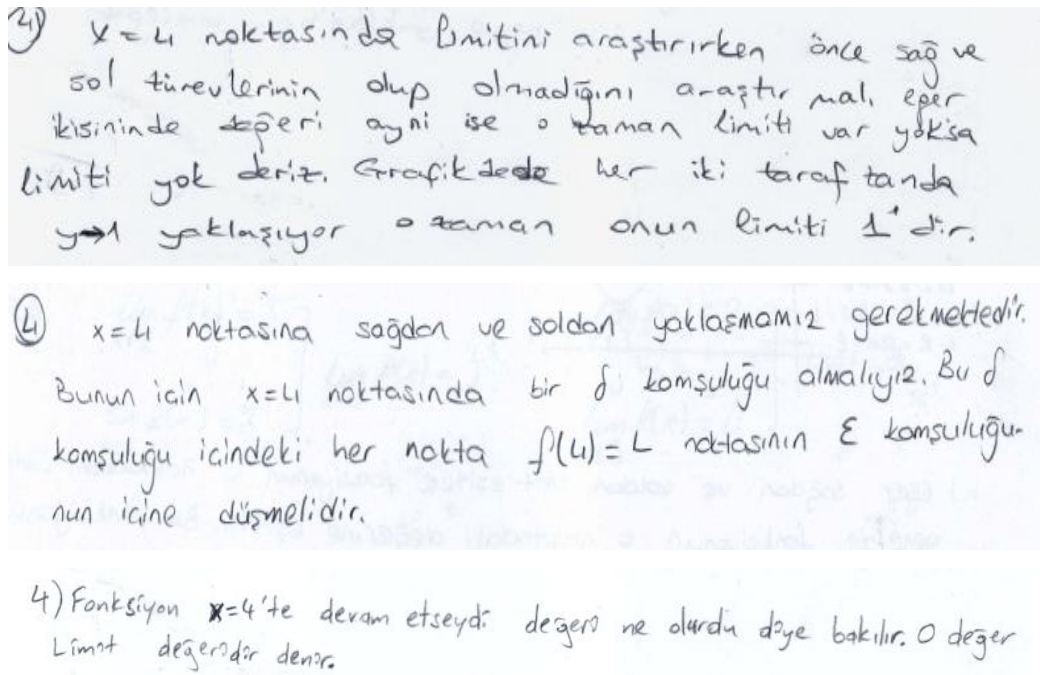
4.Soruya verilen cevaplar		Toplam	Yüzdelik Dağılım
1	Sağ ve sol limitlerinin aynı olması gerekir.	37	82%
2	$x=4$ noktasının bir δ komşuluğu içindeki her noktanın görüntüsü, $f(4)=L$ noktasının ε komşuluğunun içine düşmelidir.	4	9%
3	Fonksiyon $x=4$ de devam etseydi değeri ne olurdu diye bakılır. O değer limit değeridir denir.	1	2%
4	x 4'e yaklaşıırken $f(x)$ 1 e yaklaşıyor.	1	2%
5	x ler 4 e yaklaşıırken ama $x=4$ değil, her x için bir $f(x)$ bulunması gerekir.	1	2%
6	$x=4$ noktasında sağ ve sol türevlerinin var ve ikisinin de değeri aynı olması halinde limit vardır.	1	2%
Genel Toplam		45	100%

4. soruda sürekli olmayan ve süreksizlik noktasında limiti mevcut olan bir fonksiyonun limiti sorulmuştur. Bu sayede “tek değişkenli bir fonksiyonun bir noktada sağdan ve soldan limitini bulma, eğer sağdan ve soldan limiti var ve eşit ise (diyelim ki L) bu fonksiyonun o noktada limiti vardır ve L 'dir” bilgisine sahip olup olmadıkları ölçülmeye çalışılmıştır. Tablo 8 incelendiğinde, adayların %82'sinin grafiği verilen bir fonksiyonun süreksizlik noktasındaki limitini bulmak için, fonksiyonunun o noktadaki sağ ve sol limitinin eşit olması gerektiğini savunmuştur. Bu cevap limitin tespiti konusunda kullanılan bir kuralın ezberden dışı vurumu olarak görülebilir. Ayrıca adayların sağ ve sol limitleri nasıl bulacaklarını bilip bilmedikleri de buradan çıkartılamaz.

“ $x=4$ noktasının bir δ komşuluğu içindeki her noktanın görüntüsü, $f(4)=L$ noktasının ε komşuluğunun içine düşmelidir” cevabını veren 4 öğrenci (%9), limitin tanımından yola çıkarak limitin bulunabileceğini öne sürmüşlerdir.

Ayrıca 3, 4 ve 5 numaralı cevapları veren 3 öğrenci, grafik üzerinden $x=4$ noktasında fonksiyonun limitini belirlemeye çalışırken daha çok sezgilere dayalı hareket etmişlerdir.

Bir öğrencinin verdiği “ $x=4$ noktasında sağ ve sol türevlerinin var ve ikisinin de değeri aynı olması halinde limit vardır” şeklindeki cevap ise hiçbir şekilde kabul edilebilir değildir.



Şekil 14: 4. Soruya verilen cevaplardan birkaç örnek

5. Soru için aşağıdaki yönerge verilmiş ve yine aşağıda verilen tanıma göre diğer soruların cevaplandırılması istenmiştir.

- 5) Limitin aşağıdaki tanımını göz önüne alarak aşağıdaki soruları cevaplandırınız.

Tanım: $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve a da A cümlesinin bir yığılma noktası olsun.

Her $\varepsilon > 0$ için eğer $|x - a| < \delta$ olduğunda $|f(x) - L| < \varepsilon$ kalacak şekilde en az bir $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa x , a ya yaklaştığında f nin limiti “ L ” dir denir ve

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

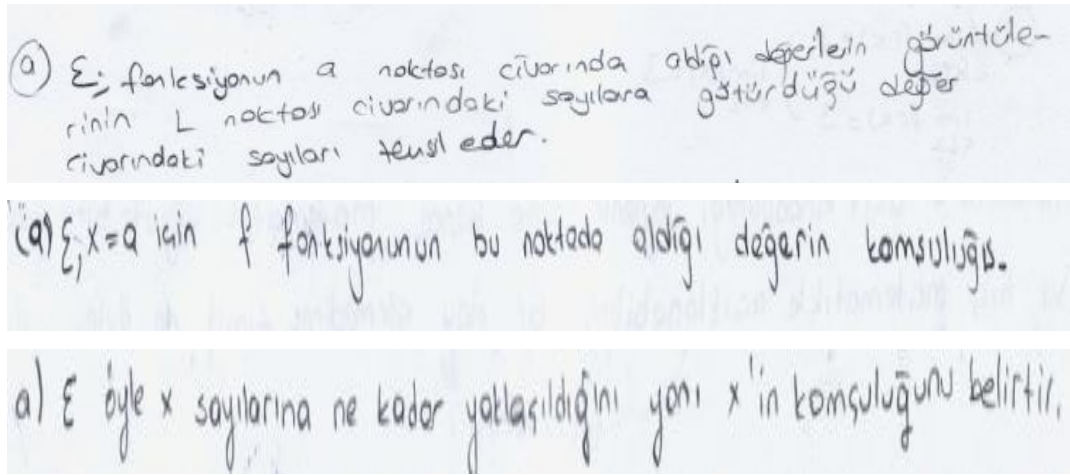
yazılır.

a) Tanımdaki ε neyi temsil etmektedir?

Tablo 9: 5-a. soruya verilen cevapların gruplandırılmış halinin dağılımı

5-a) Sorusuna verilen cevaplar		Toplam	Yüzdelik Dağılım
1	$f(x)$ in komşuluğunu	14	31%
2	L limit değerinin bir komşuluğu	13	29%
3	Limitini bulmak istediğimiz x noktasının bir komşuluğu.	7	16%
4	Bir fikri yok.	4	9%
5	Bir aralığı temsil eder.	2	4%
6	Küçük bir sayıyı ifade eder.	2	4%
7	Pozitif bir sayıyı ifade eder.	2	4%
8	Komşuluk	1	2%
Genel Toplam		45	100%

Bu soru ile limitin tanımındaki ε sembolünün adaylar için ne ifade ettiği sorgulanmak istenmiştir. “ $f(x)$ in komşuluğu” cevabını veren öğrencilerin (%31), anlatmak istedikleri şeyi tam olarak ifade edemedikleri anlaşılmaktadır. 2, 5, 6, 7, 8 numaralı cevaplar kabul edilebilir cevaplardır. Ancak 3 numaralı cevap kabul edilebilir bir cevap değildir. 3 ve 4 numaralı cevabı veren 11 aday, toplam %25’lik bir dilimi temsil etmektedir.



Şekil 15: 5-a. Sorusuna verilen cevaplardan birkaç örnek

b) Tanımdaki δ neyi temsil etmektedir?

Tablo 10: 5-b. soruya verilen cevapların gruplandırılmış halinin dağılımı

5-b) Sorusuna verilen cevaplar		Toplam	Yüzdelik Dağılım
1	$x=a$ nın komşuluğu	23	51%
2	x 'in komşuluğunu	12	27%
3	$f(x)$ in komşuluğu	3	7%
4	L nin komşuluğu	3	7%
5	Komşuluk	2	4%
6	Aralık	1	2%
7	Epsilon gibi bir sayı.	1	2%
Genel Toplam		45	100%

Bu soru ile limitin tanımındaki δ sembolünün adaylar için ne ifade ettiği sorgulanmak istenmiştir. Bu tabloda 3 ve 4 numaralı cevabı veren öğrenciler (%14) dikkat çekmektedir, çünkü δ sembolü için verilen “ $f(x)$ in komşuluğu” ve “ L nin komşuluğu” şeklindeki cevaplar hiçbir şekilde kabul edilebilir değildir.

b) Limiti alırken noktaların sağ ve sol komşuluğunda bulunan pozitif bir sayı.

b) δ seçilen x sayılarına karşılık $f(x)$ sayısının komşuluğu demettir, $f(x)$ 'in fonksiyonunda x 'e yaklaşılan ε komşuluklarına δ karşılık gelir.

Şekil 16: 5-b. Sorusuna verilen cevaplardan birkaç örnek

Tablo 11: 5-a ve 5-b sorularına aynı anda yanlış cevap verenler

5-a) Tanımdaki ε neyi temsil etmektedir?	5-b) Tanımdaki δ neyi temsil etmektedir?	Toplam
Bir fikri yok.	$f(x)$ in komşuluğu	2
Limitini bulmak istediğimiz x noktasının bir komşuluğu.	$f(x)$ in komşuluğu	1
	L nin komşuluğu	2
Genel Toplam		5

Tablo 11’ de 5-a ve 5-b sorularının her ikisine birden yanlış cevap veren aday sayılarını göstermektedir. Tabloya göre bu 5 adayın (%11) limitin tanımında ε ve δ ’nin neyi temsil ettiklerini veya görevlerinin ne olduğunu kesinlikle anlamadıkları söylenebilir.

- c) Tanımda yer alan “her $\varepsilon > 0$ ” ile kastedilen nedir? Burada neden “her” kelimesi kullanılmıştır, bunun yerine “en az bir” ifadesi kullanılamaz mı? Açıklayınız.

Tablo 12: 5-c. sorusuna verilen cevapların gruplandırılmış halinin dağılımı

5-c) Sorusuna verilen cevaplar		Toplam	Yüzdelik Dağılım
1	Kural bütün epsilon değerleri için sağlanmalı.	13	29%
2	Kural bütün pozitif reel sayılar için sağlanmalı.	10	22%
3	Yok	6	13%
4	Komşuluk negatif olamayacağından $\varepsilon > 0$ olmalıdır.	4	9%
5	Kullanılmaz, çünkü bir teoremin doğruluğu ispatlanırken tüm durumlar göz önünde bulundurulur. En az bir durumu sağlamaması teoremi çürütür.	4	9%
6	Kullanılmaz çünkü ε ne olursa olsun sonucun aynı çıkması gerekir.	4	9%
7	Kullanılmaz, çünkü her ε değerini en az bir δ sağlamalıdır.	2	4%
8	ε burada $f(a)$ nın komşuluğu için δ ye bağlı olan bir değişkendir. Bu yüzden her değer olabilir, o yüzden en az bir denilmez.	1	2%
9	Limit bulunurken ε keyfi seçildiği için bütün değerler olabilir.	1	2%
Genel Toplam		45	100%

Tablo 12’ de limitin tanımı içerisinde yer alan “her $\varepsilon > 0$ ” ifadesinden öğrencilerin ne anladıkları sorgulanmak istenmiştir. Tablo12 de 1, 5, 6, 7 numaralı cevapların, tanımda yer alan “her” kelimesinin anlamı doğrultusunda verildiği anlaşılmaktadır. Bu cevapları veren toplam 23 öğrencinin (%50) “her $\varepsilon > 0$ ” ifadesinin tanımda ne gibi bir rol oynadığını tam olarak anladıkları söylenemez. Ayrıca 2 ve 8 numaralı cevaplar konuyla ilgili gözükmemektedir (%22). Ayrıca hiçbir fikir beyan etmeyen toplam 6 aday bulunmaktadır (%13). 4 numaralı cevabı veren 4 adayın (%9) cevapları tutarsız ve alakasız bir cevap olarak nitelenebilir. Burada sadece “Limit bulunurken ε keyfi

seçildiği için bütün değerler olabilir” cevabını veren 1 adayın vermiş olduğu cevap beklenen doğru cevaplar arasında yer almaktadır.

c) Tanım gereği $\forall \varepsilon > 0$ büyük olacak .
en az bir derse $\varepsilon < 0$ da olur.

© $\forall \varepsilon > 0$ demek ε 'nin pozitif, her durumda pozitif olduğunu söylemektedir. Seçtiğimiz tüm ε 'ler pozitif oldu, o yüzden en az bir ifadesini kullanmazdık. Zaten mantıklı düşünürsek de oradaki fark kavramı, büyüklük negatifle ifade edilmez.

Şekil 17: 5-c. Sorusuna verilen cevaplardan birkaç örnek

d) “En az bir $\delta > 0$ sayısı” ile ne kastedilmektedir?

Burada neden “en az bir” kelimesi kullanılmıştır? Açıklayınız.

Tablo 13: 5-d sorusuna verilen cevapların gruplandırılmış halinin dağılımı

5-d) Sorusuna verilen cevaplar		Toplam	Yüzdelik Dağılım
1	$ x - a < \delta$ eşitsizliğini sağlayan mutlaka bir delta (δ) vardır. Ama daha fazla da olabilir.	23	51%
2	YOK	12	27%
3	Epsilona (ε) bağlı bir delta (δ) bulduğumuz için en az bir $\delta > 0$ ifadesi kullanılır.	3	7%
4	δ a nın bir komşuluğu olduğu için öyle bir δ seçmeliyiz ki $f(a)$ nın ε komşuluğu içinde kalabilsin.	2	4%
5	δ nın en küçük değerini bulabilirsek büyük bir δ komşuluğu için zaten bulabiliriz.	2	4%
6	En az ile kastedilen, limit noktasına yaklaşmamızda en küçük δ komşuluğuna göre L değerine yaklaşırız.	2	4%

5-d) Sorusuna verilen cevaplar		Toplam	Yüzdelik Dağılım
7	En az bir $\delta > 0$ limiti alınmak istenen, noktanın civarında fonksiyonun orada tanımlı olması gerekir.	1	2%
Genel Toplam		45	100%

Tablo 13’ de limitin tanımı içerisinde yer alan “En az bir $\delta > 0$ sayısı” ifadesinden adayların ne anladıkları sorgulanmak istenmiştir. Toplam 45 adayın yer aldığı çalışmada 23 aday (%51), “En az bir $\delta > 0$ sayısı” ifadesi ile limitin varlığı için $|x - a| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan mutlaka bir delta (δ) olması gerektiğini savunmuştur. 3 öğrenci (%7) δ ’nın ε ‘a bağlı bir değer olması gerektiğine vurgu yapmış ancak neden “En az bir $\delta > 0$ sayısı” olması gerektiğini açıklayamamışlardır. 2 aday verdikleri 4 numaralı cevapları ile yine δ ’nın ε ‘a bağlı bir değer olması gerektiğine vurgu yapmış, ancak bu kez $f(a)$ değerini L limit değeri ile eşdeğer tuttukları gözlemlenmiştir. 5 ve 6 numaralı cevapları veren 4 aday (%8), “en az bir $\delta > 0$ sayısı” ile δ ’nın en küçük değerinin aranması gerektiğini savunmuşlardır. Son olarak 1 aday ise “en az bir $\delta > 0$ sayısı” ifadesi ile limitin arandığı nokta civarında fonksiyonun tanımlı olması gerektiğini ileri sürmüştür.

(d) δ için "en az bir" kullanılır. Çünkü δ 'nin en küçük değerini bulabilirsek, yani en küçük δ için limiti bulursak, büyük bir δ komşuluğu için zaten bulabiliriz.

d) En az bir $\delta > 0$ demek a noktasının herhangi bir δ kesik komşuluğunu alabiliriz demektir. $\delta > 0$ olmasının nedeni δ 'in burada bir uzaklık (uzunluk) olmasıdır. Bu yüzden $\delta < 0$ olamaz. En az bir $\delta > 0$ ifadesini kullanmamızın nedeni sadece bir δ komşuluğu bizim işlemi gördüğümüzde limite ulaşmamıza yeterlidir.

Şekil 18: 5-d. Sorusuna verilen cevaplardan birkaç örnek)

Tablo 14: 5-c ve 5-d sorularına verilen cevapların kıyaslanması

5-c) Tanımda yer alan “her $\varepsilon > 0$ ” ile kastedilen nedir? Burada neden “her” kelimesi kullanılmıştır, bunun yerine “en az bir” ifadesi kullanılamaz mı? Açıklayınız.		5-d) “En az bir $\delta > 0$ sayısı” ile ne kastedilmektedir? Burada neden “en az bir” kelimesi kullanılmıştır? Açıklayınız.	
		1	2
		$ x - a < \delta$ eşitsizliğini sağlayan mutlaka bir delta (δ) vardır. Ama daha fazla da olabilir.	YOK
1	Kural bütün epsilon değerleri için sağlanmalı.	8	2
2	Kural bütün pozitif reel sayılar için sağlanmalı.	4	3
3	Yok		5
4	Komşuluk negatif olamayacağından $\varepsilon > 0$ olmalıdır.	3	
5	Kullanılmaz, çünkü bir teoremin doğruluğu ispatlanırken tüm durumlar göz önünde bulundurulur. En az bir durumu sağlamaması teoremi çürütür.	4	
6	Kullanılmaz çünkü e ne olursa olsun sonucun aynı çıkması gerekir.	3	1
7	Kullanılmaz, çünkü her epsilon değerini en az bir delta sağlamalıdır.	1	1

Tablo 14’ de 5-c ve 5-d sorularına verilen cevapların kıyaslanması yapılmıştır. Burada dikkat çekici nokta, adayların 5-c sorusuna verdikleri cevabın altında yatan düşüncüyü 5-d sorusunu cevaplarken de kullanmış olmalarıdır. Burada, her iki soruya da verdikleri cevaplar arasında net bir paralellik kurulabilen adaylar göze çarpmaktadır. Tablo 5.4.’deki veriler analiz edilirken 5-a sorusuna verdikleri cevaplar için “1, 5, 6, 7 numaralı cevapların, tanımda yer alan “her” kelimesinin anlamı doğrultusunda verildiği anlaşılmaktadır.” yorumunda bulunulan adayların 5-d sorusuna verdikleri cevaplar

incelendiğinde 16 öğrencinin yine “en az bir” ifadesinden yola çıkarak “ $|x - a| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan **mutlaka** bir delta (δ) vardır. **Ama daha fazla da olabilir.**” ifadesini kullandıkları ve 4 adayın da 5-d sorusunu cevapsız bıraktığı görülmüştür. Ayrıca her iki soruyu da cevaplandırmayan 5 aday vardır. 5-c sorusuna 2 numaralı cevabı veren 3 aday 5-d sorusuna cevap verememiştir. Bu durum 5-c sorusunu cevaplandırıp, 5-d sorusuna cevap yazmayan toplam 12 adayın 5-c sorusunu cevaplandırırken konu hakkındaki bilgi anlamında kendilerine olan güvenin tam olmadığı şeklinde yorumlanmıştır.

e) $|x - a| < \delta$ eşitsizliği ne anlam taşımaktadır? Açıklayınız.

Tablo 15: 5-e sorusuna verilen cevapların gruplandırılmış halinin dağılımı

5-e) Sorusuna verilen cevaplar		Toplam	Yüzdelik Dağılım
1	$x=a$ noktasının delta (δ) komşuluğunu ifade eder.	14	31%
2	YOK	9	20%
3	x in delta (δ) komşuluğu demektir.	9	20%
4	x 'in a 'ya sağdan ve soldan δ kadar uzaklığıdır.	4	9%
5	a noktasına delta (δ) kadar uzaklıkta olan noktalar kümesi	4	9%
6	Tanım kümesinden seçilen x ve a nın farkının mutlak değeri seçilen delta dan küçüktür.	4	9%
7	a noktasına yaklaşırken δ komşuluğu içerisinde bulunduğunu ifade eder.	1	2%
Genel Toplam		45	100%

Tablo 15’ de 5-e sorusu ile verilen $|x - a| < \delta$ eşitsizliğinin öğrenciler için ne ifade ettiği irdelenmek istenmiştir. Burada “ x in delta komşuluğu” cevabını veren 9 aday (%20) ifadelerinde, hangi x noktasının komşuluğu olduğunu belirtmemişlerdir. 4. sıradaki “ x ’in a ’ya sağdan ve soldan d kadar uzaklığıdır.” cevabını veren adayların, x ve a değerlerini iki sabit ve δ yı ikisi arasındaki uzaklık olarak gördükleri anlaşılmaktadır.

Ayrıca bu soruya 9 aday (%20) cevap verememiştir. 1 numaralı cevap tam olmamakla birlikte doğru kabul edilebilir. 6 numaralı cevap matematiksel sembollerle ifade edilen $|x - a| < \delta$ eşitsizliğinin sözel anlatımı olduğundan kabul edilebilir bir cevaptır. 7 numaralı cevabın yanlış olduğunu savunmak güçtür ama beklenen cevap değildir.

e) $|x - a| < \delta$ eşitsizliği a noktasına yaklaşıpken δ komşuluğu içerisinde olduğunu ifade eder.

e) Fonksiyonda limit x a'ya giderken yani x'le sağdan ve soldan yaklaşıpken δ aralığının içinde olması gerekir demek.

Şekil 19: 5-e. Sorusuna verilen cevaplardan birkaç örnek

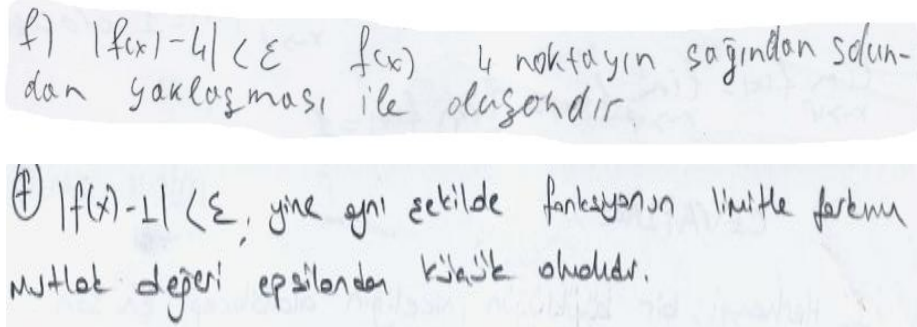
f) $|f(x) - L| < \varepsilon$ eşitsizliği ne anlam taşımaktadır? Açıklayınız.

Tablo 16: 5-f sorusuna verilen cevapların gruplandırılmış halinin dağılımı

5-f) Sorusuna verilen cevaplar		Toplam	Yüzdelik Dağılım
1	YOK	10	22%
2	L nin epsilon (ε) komşuluğunu ifade eder.	7	16%
3	f(x) in epsilon (ε) komşuluğunu ifade eder.	5	11%
4	L nin (ε) komşuluğu içindeki f(x) leri tanımlamaktadır.	5	11%
5	f(x) in L ye (ε) kadar uzaklıkta olmasıdır.	5	11%
6	y sayılarının da (L-e;L+e) aralığında olduğunu gösterir.	3	7%
7	Tanım kümesinden seçilen x ve a nın f fonksiyonundaki değerlerinin farkının mutlak değeri seçilen epsilon'dan küçüktür.	3	7%

5-f) Sorusuna verilen cevaplar		Toplam	Yüzdelik Dağılım
8	$f(x)$ den "L" limitini çıkardığımızda elde edilen sonucun mutlak değerinden küçüktür.	3	7%
9	Bir aralıktan bahsedilmektedir.	2	4%
10	L nin sınırlarını $(L-\epsilon; L+\epsilon)$ verir.	1	2%
11	Limit değerimize (ϵ) kadar yaklaştığımızı söyler.	1	2%
Genel Toplam		45	100%

Tablo 16' da $|f(x) - L| < \epsilon$ eşitsizliğinin adaylar için ne anlam ifade ettiği sorusuna adayların verdikleri gruplandırılmış cevaplar yer almaktadır. Bu tablo incelendiğinde soruya cevap yazmayan 10 adayın (%22) varlığı dikkat çekicidir. Ayrıca bu soruya 1, 3.5.7 ve 10 numaralı cevapları veren toplam 28 adayın (%62), 5-f sorusuna beklenen cevapların dışında cevaplar verdikleri gözlemlenmiştir.



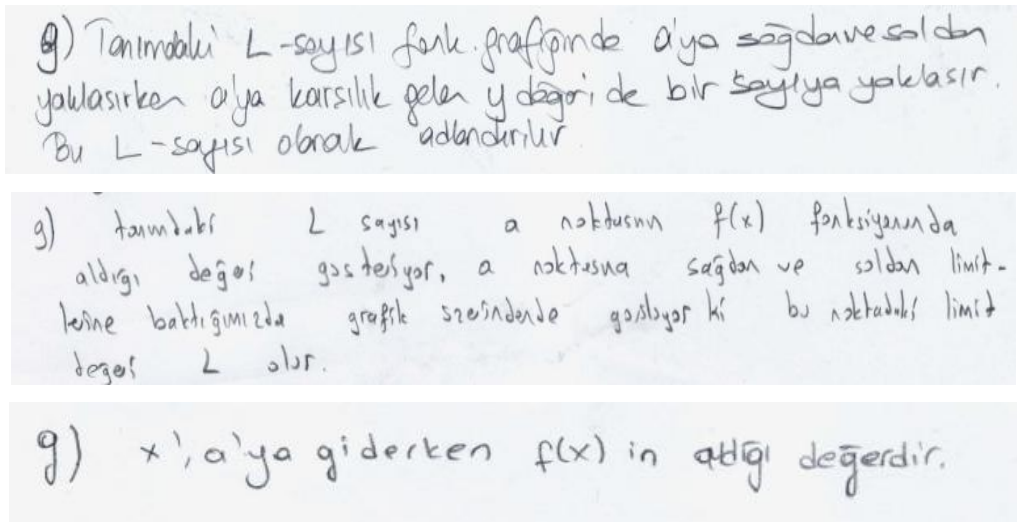
Şekil 20: 5-f. Sorusuna verilen cevaplardan birkaç örnek

- g) Tanımdaki L-sayısı neyi temsil etmektedir. Bunu “fonksiyonun grafiği” kavramını kullanarak açıklayınız.

Tablo 17: 5-g sorusuna verilen cevapların gruplandırılmış halinin dağılımı

5-g) Sorusuna verilen cevaplar		Toplam	Yüzdelik Dağılım
1	L limiti ifade eder.	15	33%
2	L sayısı, x a ya yaklaşırken $f(x)$ lerin yaklaştığı sayıdır.	10	22%
3	L sayısı $f(x)$ in a daki limitidir.	7	16%
4	L tanım kümesindeki a nın f fonksiyonundaki değeri yani $L=f(a)$	7	16%
5	YOK	6	13%
Genel Toplam		45	100%

Tablo 17’ de limitin tanımdaki L-sayısının neyi temsil ettiği sorusuna adayların verdikleri gruplandırılmış cevaplar görülmektedir. Soruya 1, 2, 3 numaralı cevapları veren toplam 32 adayın (%71) cevapları bu soruya karşılık beklenen doğru cevaplar arasında değerlendirilebilir. 7 aday (%16) limiti, fonksiyonun a noktasındaki değer olarak yani, $L=f(a)$ olarak görmektedirler. Ayrıca bu soruya cevap veremeyen toplam 6 aday (%13) bulunmaktadır.



Şekil 21: 5-g. Sorusuna verilen cevaplardan birkaç örnek

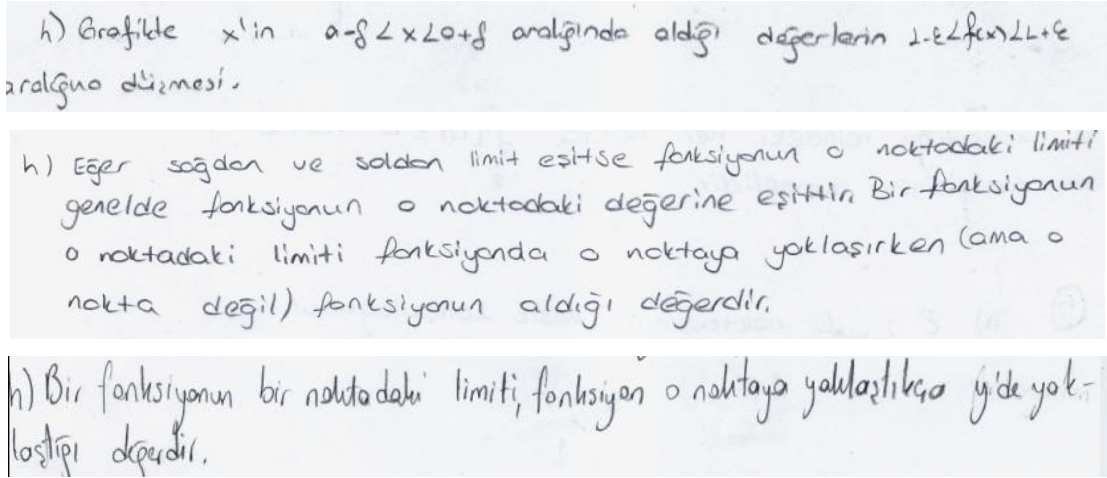
h) Şu ana kadar verdiğiniz cevapların bir özeti olarak bir fonksiyonun bir noktadaki limitinin ne olduğunu kendi ifadelerinizle açıklayınız.

Tablo 18: 5-h sorusuna verilen gruplandırılmış cevapların dağılımı

5-h) sorusuna verilen cevaplar		Toplam	Yüzdelik Dağılım
1	Bir fonksiyonda x sayıları $x=a$ noktasına yaklaşıırken $f(x)$ lerin yaklaştığı sayıya, $f(x)$ in $x=a$ daki limiti denir.	13	29%
2	Limitin tanımına yakın ifadeler.	12	27%
3	Bir fonksiyonda istenen bir değere sağdan ve soldan yaklaşıldığında fonksiyon aynı değeri gösteriyorsa bu değere x in limiti denir.	9	20%
4	Cevap yok.	7	16%
5	L fonksiyonun $x=a$ noktasında aldığı değerdir.	3	7%
6	Bir civardaki sayıların görüntülerinin gittiği yer civarıdır.	1	2%
Genel Toplam		45	100%

5-h) sorusunda adayların bu çalışmada limitle ilgili olarak verdikleri cevapların bir özeti olarak bir fonksiyonun bir noktadaki limitinin ne olduğunu kendi ifadeleriyle açıklamaları istenmiştir. Tablo 18, 5-h) sorusuna verilen gruplanmış cevapları göstermektedir. Bu tabloya göre 13 aday (%29) limitin tanımını sadece kendi ifadeleriyle “Bir fonksiyonda x sayıları $x=a$ noktasına yaklaşıırken $f(x)$ lerin yaklaştığı sayıya, $f(x)$ in $x=a$ daki limiti denir.” şeklinde vermişlerdir. Bu ifadede “yaklaşım” kelimesinin limitin tanımında başrolü oynadığı görülmektedir. 12 aday (%27) limitin tanımıyla ilgili açıklama yaparken, limitin tanımına yakın tanımlar vermişlerdir. “Bir fonksiyonda istenen bir değere sağdan ve soldan yaklaşıldığında fonksiyon aynı değeri gösteriyorsa bu değere x in limiti denir.” cevabını veren 9 aday (%20) için bir fonksiyonun bir noktadaki limiti için, o noktada sağ ve sol limitlerin var ve eşit olması yeterli görülüyor. 1 adayın verdiği “Bir civardaki sayıların görüntülerinin gittiği yer civarıdır.” cevabı incelendiğinde, limiti tarif ederken “civar” kelimesine özellikle vurgu

yaptığı görülür. Bunun da limit tanımında yer alan yuvar, komşuluk kavramından kaynaklandığı düşünülebilir.



Şekil 22: 5-h. Sorusuna verilen cevaplardan birkaç örnek

6) Yukarıdaki tanımları dikkate alarak; $\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 1) = 7$ olduğunu gösteriniz.

Tablo 19: 6. soruya verilen cevapların gruplandırılmış halinin dağılımı

6) sorusuna verilen cevaplar	Toplam	Yüzdelik Dağılım
Tam	33	73%
Eksik	12	27%
Genel Toplam	45	100%

6. soruda adaylardan $\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 1) = 7$ olduğunu limit tanımını göz önüne alarak göstermeleri istenmiştir. Her $\varepsilon > 0$ için eğer $|x - 2| < \delta$ olduğunda $|f(x) - 7| < \varepsilon$ kalacak şekilde en az bir $\delta > 0$ sayısı bulmak için;

$$|3x + 1 - 7| < \varepsilon \implies |3x - 6| < \varepsilon \implies |3(x - 2)| < \varepsilon \implies 3|x - 2| < \varepsilon \implies |x - 2| < \frac{\varepsilon}{3}$$

olmak üzere $\delta = \frac{\varepsilon}{3} > 0$ olacak şekilde ε 'ya bağılı bir $\delta > 0$ sayısı olduğunu belirleyen 33 aday (%73) bulunmaktadır. Diğer 12 aday (%27) çözüm yolunda çeşitli hatalar yaparak uygun bir $\delta > 0$ sayısı bulamamışlardır.

6- $|f(x)-7| < \varepsilon \Rightarrow |3x+1-7| < \varepsilon$
 $|x-2| < \frac{\varepsilon}{3}$ $|3x-6| < \varepsilon \rightarrow |3(x-2)| < \varepsilon \Rightarrow 3|x-2| < \varepsilon$
 $|x-2| < \frac{\varepsilon}{3}$ $\leftarrow |x-2| < \frac{\varepsilon}{3}$
 $|x-2| < \frac{\varepsilon}{3}$ $\varepsilon = 3\delta$

Şekil 23: 6. Soruya verilen cevaplardan bir örnek

Burada ilgi çekici olan şey, limitin tanımı ile ilgili doğru yargılarda bulanamayan adayların da 6. soruda istenilen çözümü ortaya koymuş olmalarıdır.

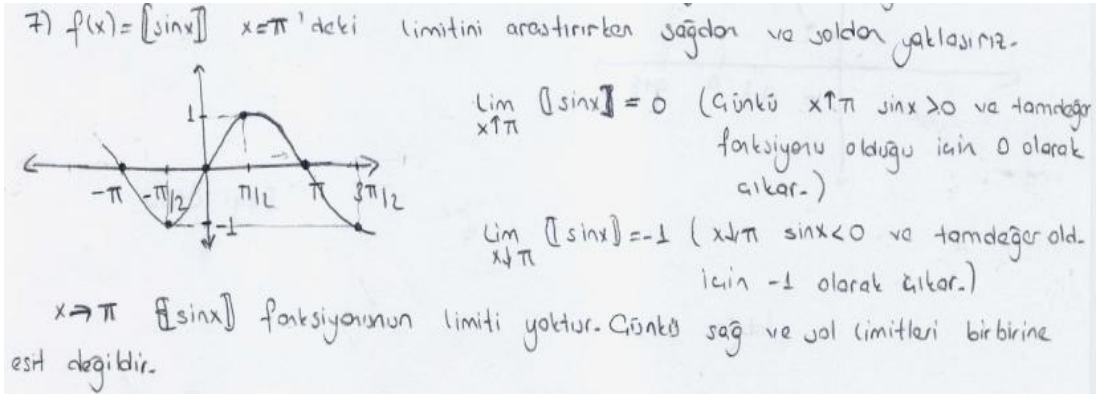
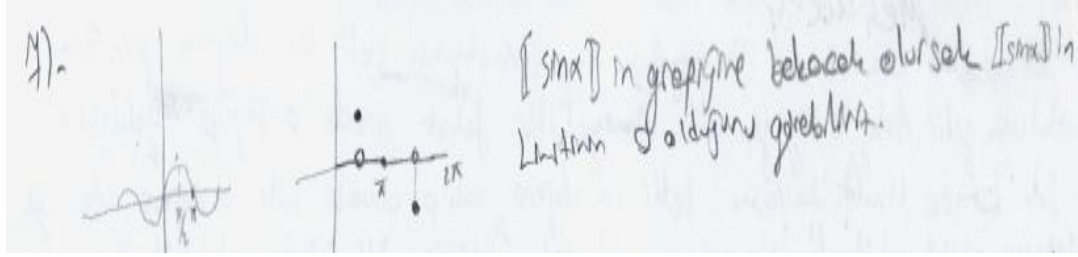
- 7) $f(x) = \lfloor \sin x \rfloor$ ile verilen fonksiyonun $x = \pi$ noktasındaki limitini araştırınız.
Vereceğiniz cevapların gerekçelerini yazınız.

Tablo 20: 7. soruya verilen cevapların gruplandırılmış halinin dağılımı

7) sorusuna verilen cevaplar	Toplam	Yüzdelik Dağılım
Tam	24	53%
Eksik	15	33%
Yok	6	13%
Genel Toplam	45	100%

7. soruda adaylardan $f(x) = \lfloor \sin x \rfloor$ ile verilen fonksiyonun $x = \pi$ noktasındaki limitini araştırmaları istenmiştir. Tablo 20 bu soruya verilen gruplandırılmış cevapları göstermektedir. Bu soruya tam cevap veren 24 adayın tamamı fonksiyonun aşağıdaki grafiği üzerinden çözüm aramıştır. 15 aday (%33) yanlış çözüm yolları seçtiği için ya

sonuç bulamamış ya da yanlış sonuçlar elde etmişlerdir. 6 aday bu soruyu cevapsız bırakmıştır.



Şekil 24: 7. Soruya verilen cevaplardan iki örnek

8) $x \rightarrow 0$ için $f(x) = \frac{1}{x^2}$ fonksiyonunun varsa limitini bulunuz. Yoksa nedenini açıklayınız.

Tablo 21: 8. soruya verilen cevapların gruplandırılmış halinin dağılımı

8. soruya verilen cevaplar		Toplam	Yüzdelik Dağılım
1	Limiti sonsuzdur.	20	44%
2	Limiti yoktur, çünkü o noktada tanımlı değildir.	8	18%
3	Yok	6	13%
4	Limiti yoktur.	6	13%
5	Sağdan ve soldan yaklaştığımızda limitler farklı olacağından limiti yoktur.	3	7%

8. soruya verilen cevaplar		Toplam	Yüzdelik Dağılım
6	Limit eşit sonsuz olduğundan limiti yoktur.	2	4%
Genel Toplam		45	100%

8. soruda $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$ limitinin sonucu sorulmuştur. Tablo 21 de bu soruya verilen gruplandırılmış cevaplar görülmektedir. Bu soruya verilen cevaplar incelendiğinde, hiçbir adayın sorunun çözümünde limitin $\varepsilon - \delta$ tanımını kullanmadığı görülmektedir. Yinede soruya verilen cevaplar hayli ilgi çekicidir. 20 aday (%44) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$ olduğunu, 2 aday (%4) ise $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$ olduğundan limitin olmadığını savunmaktadır. 8 aday (%18) verilen fonksiyon $x=0$ noktasında tanımsız olduğundan $x \rightarrow 0$ için limitin olamayacağı kararına varmıştır. Bu soruya cevap vermeyen toplam 6 aday (%13) bulunmaktadır.

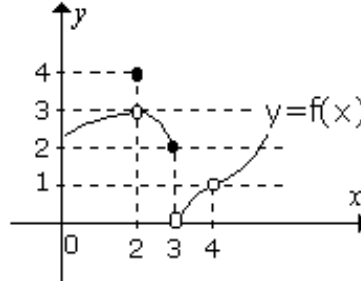
8) x^2 , $x=0$ yakınına $y=0$ yakınına düşer. $1/x^2$ ise $x=0$ sağ yakını ve sol yakını $\frac{1}{0^+}$, $\frac{1}{0^-}$ ifadeler oluşturur. Bunların ikisi de sonsuza gider. Yani $x=0$ 'a yaklaşıp gibi gelirken sonsuza gider. Limit $= \infty$

8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{0}$ olduğundan tanımsızdır. Bu yüzden $x \rightarrow 0$ için fonksiyonun limiti yoktur.

8) $x \rightarrow 0$ $f(x) = \frac{1}{x^2}$ fonksiyonu için de 0'a sağdan ve soldan yaklaşırsak
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$
 $x \rightarrow 0$ $\frac{1}{x^2}$ fonksiyonunun limiti yoktur. Çünkü sağ ve sol limitleri birbirine

Şekil 25: 8. Soruya verilen cevaplardan iki örnek

9)



Üstte grafiği verilen f fonksiyonunun $x=2$, $x=3$ ve $x=4$ noktalarındaki limitleri nelerdir? Bulunuz. Nedenlerini açıklayınız.

Tablo 22: 9. soruya verilen gruplandırılmış cevapların dağılımı

9. soruya verilen cevaplar	Toplam	Yüzdelik Dağılım
Sağ ve sol limitlerine bakarak $x=2$ için limiti 3 $x=3$ için limit yok $x=4$ için limit 1	43	96%
Sağ ve sol limitlerine bakarak $x=2$ için limiti 3 $x=3$ için 0 $x=4$ için limit 2	1	2%
Sağ ve sol limitlerine bakarak $x=2$ için limiti 3 $x=3$ için limit 0 $x=4$ için limit 1	1	2%
Genel Toplam	45	100%

9. soru ile öğrencilerden grafiği verilmiş bir fonksiyonun 3 farklı noktadaki limitleri sorulmuştur. Bu soru ile parçalı bir fonksiyonun süreksizlik noktasında ve tanımsız olduğu noktalardaki limitleri hakkındaki adayların bilgileri ölçülmek istenmiştir. Bu soruya, çalışmaya katılan toplam 45 adayın 43'ü (%96) doğru cevap vermiştir. Bu sonuç her ne kadar yüksek görünse de, şaşırtıcı değildir. Adaylar için grafiği verilen bir fonksiyonun limitini bulmanın zor olmadığı gözlemlenmektedir.

9) $\lim_{x \uparrow 2} f(x) = 3$ $\lim_{x \downarrow 2} f(x) = 3$ $\lim_{x \uparrow 2} f(x) = \lim_{x \downarrow 2} f(x) = 3$

$\lim_{x \uparrow 3} f(x) = 2$ $\lim_{x \downarrow 3} f(x) = 0$ $\lim_{x \downarrow 3} f(x) \neq \lim_{x \uparrow 3} f(x)$ Limit yoktur.

$\lim_{x \uparrow 4} f(x) = 1$ $\lim_{x \downarrow 4} f(x) = 1$ $\lim_{x \uparrow 4} f(x) = \lim_{x \downarrow 4} f(x) = 1$

Şekil 26: 9. Soruya verilen cevaplardan bir örnek

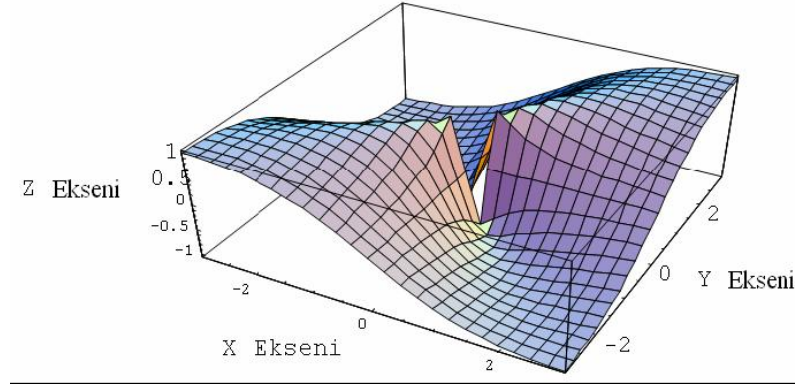
Yukarıdaki örnekte de görüldüğü üzere, adaylar grafiği verilen bir fonksiyonun limitini bulurken, fonksiyonun aranan noktada sağ ve sol limitlerinin varlığına bakarak yorum yapıyorlar.

4.1.2. Yarı Yapılandırılmış Görüşme Sonuçları

Bu çalışmaya katılan 7 adayın seçimi için daha önce adaylara uygulanan bilişsel düzey belirleme testleri ve araştırmacının derslerde yapmış olduğu gözlem sonuçları dikkate alınmıştır. Elde edilen veriler sonucunda kavram bilgilerinin, kavram imajlarının daha derin bir şekilde irdelenmesine ihtiyaç duyulan ve öğrenme zorluğu çektiğine inanılan adaylarla görüşmeler yapılmıştır. Adaylarla yapılan yarı yapılandırılmış görüşmelerin araştırmacı tarafından seçilmiş küçük bir kısmı aşağıdaki bölümde yer almakta olup, görüşmelerin tamamı Ek-2 de sunulmuştur. Ayrıca okuyucuya kolaylık sağlamak ve tek değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği hakkında adaylarla yapılan görüşmelerin içeriğinin daha iyi analiz edilebilmesi amacıyla adayların sorulara vermiş oldukları cevaplar gruplandırılarak tablo halinde özetlenmiştir.

4.1.2.1. Aday M.K. İle Yapılan Görüşme Sonuçları

Araştırmacı: $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ *fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir.*



Yukarıda verilen fonksiyonun grafiğine baktığınızda bu fonksiyonun sürekliliği ile ilgili ne söyleyebilirsiniz?

M.K.: Benim bildiğim sürekli fonksiyonlarda bir kopma olmaması ya da fonksiyonu tanımsız yapacak bir değer bulunmaması lazım. Bu yüzden verilen fonksiyon bence sürekli dir.

Araştırmacı: Grafikten ne anlıyorsun? Fonksiyona bakarak fonksiyonun sürekliliği hakkında bir şey söyleyebilir misin? 3 boyutlu grafiği verilen bir fonksiyonun sürekliliği hakkında ne söyleyebilirdin?

M.K.: Bu grafiğe bakarak kesin bir şey söylemek çok zor. Burada fonksiyonda herhangi bir kopma gözük müyor. Buradan hiçbir x ve y için fonksiyon tanımsız olmuyor, yani kopma gözük müyor. Bu durumda fonksiyonun sürekli olduğunu söyleyebiliriz.

4.1.2.2. Aday M.T. İle Yapılan Görüşme Sonuçları

Araştırmacı: x reel bir sayı olmak üzere, $|x - 3| < 2$ eşitsizliğinin çözüm kümesi sizin için ne ifade ediyor?

M.T.: 1 ile 5 arasındaki tüm sayılar.

Araştırmacı: Burada 3 sayısı neyi ifade eder?

M.T.: *Bu eşitsizliğin çözüm kümesini bulmak için kullandığımız bir sayı. Bunu grafik üzerinde göstermek zor. Çözüm kümesi içinde 1 ile 5 'in arasında bir yer.*

Araştırmacı: *Peki 2 nedir?*

M.T.: *2 noktasıyla bu fonksiyonu sınırlandırmış olduk. Sınırları belirledik. 2 den küçük değerleri aldık hep, 2 den büyük değerler bizi ilgilendirmiyor.*

Araştırmacı: *Grafik üzerinde 2 yi gösterebilir miyiz?*

M.T.: *Evet. 3 den küçük, yine arada bir yerde.*

4.1.2.3. Aday M.Y. İle Yapılan Görüşme Sonuçları

Araştırmacı: *Limitin tekniği ile verilen tanımı göz önüne alındığında, tanımdaki L sembolü sizce neyi temsil etmektedir? Düşüncelerinizi benimle paylaşır mısınız?*

M.Y.: *x sayıları değişken olduğu için onları a noktasına yaklaştırdığımızda, görüntüleri de belli bir sayıya yaklaşmaktadır. Bu sayı da fonksiyonun limitidir. Bunu da L ile gösteriyoruz.*

4.1.1.4. Aday G.K. İle Yapılan Görüşme Sonuçları

Araştırmacı: *Limit kavramı ile sonsuzluk kavramı arasında nasıl bir ilişki kurulabilir?*

G.K.: *Limit, fonksiyonun yakınsadığı bir sayıdır. Sonsuzluk ise erişilemeyen bir kavram. Sonuçta limitle fonksiyon için bir değer bulabiliyoruz ama sonsuzluk dediğimizde bir değer söz konusu değildir.*

4.1.2.5. Aday A.S. İle Yapılan Görüşme Sonuçları

Araştırmacı: $f(x) = \lfloor \sin x \rfloor$ ile verilen fonksiyonun grafiğini birlikte çizelim...

A.S.: Önce $\sin x$ fonksiyonunu çizelim. Bu periyodik olarak ilerler. Birkaç x için değerini bulalım. Grafiği çizelim. Şimdi de mutlak değeri çizelim, alttaki kısmı üste alalım.

Araştırmacı: $(-\pi, \pi)$ aralığında. Peki bu fonksiyonun $x = \pi$ noktasındaki limiti hakkında ne dersiniz?

A.S.: $x = \pi$ deki limiti 0 dır. Sağdan soldan baktığımızda değerler 0 a yaklaşıyor. O yüzden 0 dır.

4.1.2.6. Aday H.Y. İle Yapılan Görüşme Sonuçları

Araştırmacı: $x \rightarrow 0$ için $f(x) = \frac{1}{x^2}$ fonksiyonunun varsa limitini bulabilir misiniz?

Yoksa nedenini açıklar mısınız?

H.Y.: $x=0$ da tanımsızlık var. Sınırsız artıyor, sonsuza yaklaşıyor. $x=0$ noktasındaki limiti sonsuzdur.

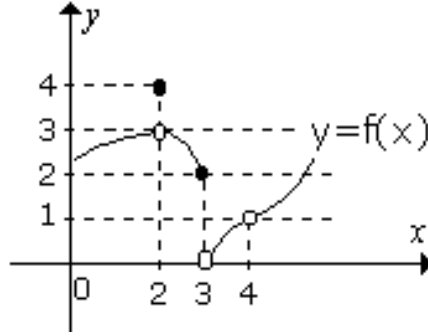
Araştırmacı: Neden?

H.Y.: Limit deyince sağdan ve soldan yaklaşmak lazım. İkisinde de sonsuza yaklaşıyor. O yüzden limiti sonsuzdur.

Araştırmacı: Limit kavramı ile sonsuzluk kavramı arasında nasıl bir ilişki kurulabilir?

H.Y.: Biraz önce limit $x=0$ da sonsuz dedik ama bunu fonksiyonun yaklaştığı bir yer olarak görebiliriz, yani sonsuza doğru gider deriz.

4.1.2.7. Aday N.B. İle Yapılan Görüşme Sonuçları



Araştırmacı: Üstte grafiği verilen f fonksiyonunun $x=2$ limiti nedir?

N.B.: 3, çünkü burada sürekli. Burada bu noktada tanımlı olup olmaması önemli değil, sürekli olduğu için limiti 3 dür.

Araştırmacı: $x=3$ deki limiti için ne söylersin?

N.B.: Limit yok, çünkü grafik çizdiğimizde elimizi kaldırmadan çizebiliyorsak, fonksiyona sürekli diyorduk. Sürekli olmadığı yerde limit yoktur diyorduk. O yüzden $x=0$ da limit yoktur.

Araştırmacı: $x=4$ deki limiti nedir?

N.B.: Var ve 1 dir. Soldan ve sağdan yaklaştığımızda 1 e geliyor. Yani limiti vardır. Limiti zaten yakınsamak demektir, o noktada o değeri alması şart değil.

Araştırmacı: Burada limiti belirlemek için neler yapmak gerekir?

N.B.: Sağdan ve soldan yaklaştığımızda aynı değeri alıyorsa limit o değerdir.

Araştırmacı: $x=4$ noktasında fonksiyon sürekli midir?

N.B.: Sürekli, çünkü bunu ben sadece geometrik olarak açıklayabilirim. Burada sadece elimizi kaldırmadan çizebildiğimiz için fonksiyon $x=4$ noktasında sürekli. $X=4$ noktasında elimizi kaldırmıyoruz. O yüzden sürekli.

4.1.2.8. Yarı Yapılandırılmış Görüşme Sonuçlarının Özeti

Bu kısımda, tek değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği hakkında adaylarla yapılan görüşmelerin içeriğinin daha iyi analiz edilebilmesi için mülakatlarda adaylara yöneltilen tüm sorular ve adayların sorulara vermiş oldukları cevaplar gruplandırılarak tablo halinde özetlenmiştir.

Tablo 23: Adaylar M.K., M.T. ve M.Y. ile yapılan yarı yapılandırılmış görüşmelerin özet tablosu

NO	GÖRÜŞME SONUÇLARI	M.K.	M.T.	M.Y.
1	Grafığı verilen iki değişkenli bir fonksiyonun limiti ve sürekliliği hakkında yorum.	3 boyutlu grafiklere yabancı - limit ve süreklilik hakkındaki yorumu tek değişkenli fonksiyonların grafiklerini dikkate alarak yaptı	3 boyutlu grafiklere yabancı - limit ve süreklilik hakkında yorumda bulunamadı.	3 boyutlu grafiklere yabancı - Grafığın (0,0,0) noktasında tanımsız olduğundan yola çıkarak, bu noktada fonksiyonun süreksiz olduğunu söyledi.
2	$f(x) = \sin x$ ile verilen fonksiyonun $x = 0$ noktasındaki limiti hakkında yorum.	Sağ ve sol limitlerinin var ve eşit olması şartını kullanarak çözmeye çalıştı.		
3	Grafığı verilen tek değişkenli bir fonksiyonun limiti ve sürekliliği hakkında yorum.	Grafik üzerinde kabul edilebilir yorumlar yaptı.		

NO	GÖRÜŞME SONUÇLARI	M.K.	M.T.	M.Y.
4	Limitin “epsilon-delta tekniği” hakkında yorum.		Epsilonu x-eksininde herhangi bir sayının komşuluğu, deltayı ise bu sayıya karşılık gelen sayının y-eksenindeki komşuluğu olarak tanımladı.	Epsilonu herhangi bir noktanın komşuluğunu oluşturmak için seçilen pozitif bir reel sayı, deltayı ise bu pozitif reel sayıya ve aralığa karşılık gelen aralıktaki pozitif bir reel sayı olarak tanımladı.
5	x reel bir sayı olmak üzere, $ x - 3 < 2$ eşitsizliğinin çözüm kümesi hakkında yorum.		- Soruya cevap verirken söylediklerinden pek emin değildi. - Verilen eşitsizlikte yer alan 3 ve 2 sayıları hakkında beklenen yorumlarda bulunmadı.	Eşitsizliğin çözüm kümesini bularak, eşitsizlikte yer alan 2 ve 3 sayıları hakkında doğru kabul edilebilir yorumlar yaptı.
6	Limitin $\varepsilon - \delta$ tanımı göz önüne alındığında, tanımdaki L sembolü hakkında yorum.			L'nin fonksiyonun limiti olduğunu söyledi ve L'yi x sayıları a noktasına yaklaştığında, görüntülerinin yaklaştığı sayı olarak ifade etti

Tablo 24: Adaylar G.K., A.S., H.Y. ve N.B. ile yapılan yarı yapılandırılmış görüşmelerin özet tablosu

NO	GÖRÜŞME SONUÇLARI	G.K.	A.S.	H.Y.	N.B.
1	Grafiği verilen iki değişkenli bir fonksiyonun limiti ve sürekliliği hakkında yorum.	3 boyutlu grafiklere yabancı - Grafikte bir kopma noktası tespit ederek, fonksiyonun o noktada tanımsız olabileceğini söyledi.		3 boyutlu grafiklere yabancı - limit hakkındaki yorumu tek değişkenli fonksiyonların grafiklerinden yola çıkarak yaptı - Grafiğe yabancı olduğu için sürekliliği hakkında yorum yapamadı.	3 boyutlu grafiklere yabancı - Limit ve süreklilik hakkındaki yorumu tek değişkenli fonksiyonların grafiklerinden yola çıkarak yaptı

NO	GÖRÜŞME SONUÇLARI	G.K.	A.S.	H.Y.	N.B.
2	$f(x) = \lfloor \ln x \rfloor$ ile verilen fonksiyonun $x = 0$ noktasındaki limiti hakkında yorum.		Fonksiyonun grafiğini çizerek, $x=0$ noktası için fonksiyonun limitini buldu.		
3	Grafiği verilen tek değişkenli bir fonksiyonun limiti ve sürekliliği hakkında yorum.		Tek değişkenli fonksiyonun grafiği üzerinde limitleri rahatlıkla bulabiliyor ancak süreklilik hakkında yaptığı yorumlarda kendinden emin değildi.		Limitleri bulmada zorlanmıyor ancak fonksiyonun sürekli olması ile limitinin olması arasındaki ilişkiyi tam oturtamamış.
4	$x \rightarrow 0$ için $f(x) = \frac{1}{x^2}$ fonksiyonunun limiti hakkında yorum.			$x=0$ noktasına sağdan ve soldan yaklaşıp, sonucu her ikisi için de sonsuz bulduğu için sonuç sonsuzdur cevabını verdi.	
5	Limit ile sonsuzluk kavramları ve aralarındaki ilişki hakkında yorum.	Limitin fonksiyonun yakınsadığı bir sayı olduğunu, sonsuzluğu ise erişilemeyen bir kavram olarak gördüğünü söyledi.		Bir birinin tersidir. Limit sonsuza giderken fonksiyon sıfıra yakınsar, şeklinde cevapladı.	

4.1.3. Envanter çalışması bulguları

Bu kısımda birinci bölümde elde edilen bulguların özetlenmesi amacıyla, adaylarla yapılan tüm çalışmalarda elde edilen bulgular, yani çalışma envanterinde yer alan tüm veriler tekrar gözden geçirilerek, tek değişkenli reel fonksiyonlardaki limit ve süreklilik kavramları hakkında öğrencilerin edinmesi gereken asgari kazanımlar belirlenerek 12 maddelik bir tablo ortaya çıkartılmıştır. Bu çalışmada, “Lise Matematik Öğretim Programı” ve yurtdışındaki bazı üniversitelerin analiz derslerindeki kazanımlar ve uzman görüşleri dikkate alınarak ([TTKB] Matematik Dersi Öğretim Programı ve

Klavuzu, 2005; <http://web.mit.edu/16.30/www/extras/LOPP-Lectures32-36.pdf>), limit kavramı ile bağlantılı 12 kazanım belirlenmiştir (bkz. Tablo 25). Çalışmada rasgele seçilen 13 öğrencinin bilişsel düzey belirleme test sonuçları ve yarı yapılandırılmış görüşmelerde elde edilen bilgiler kullanılmıştır. Her öğrenciye belirlenen konular hakkında edindiği bilişsel seviyenin belirlenmesi amacıyla 1’den 5’e kadar değerlendirme puanı verilmiştir. Bu şekilde hem öğrencinin konu hakkındaki bilişsel seviyesi ölçülmüş, hem de konuyla ilgili her bir kazanımın öğrencilerin geneli tarafından algılanma durumu tespit edilmiş olacaktır.

Tablo 25: Tek değişkenli reel fonksiyonlardaki limit ve süreklilik kavramları hakkında kazanım envanteri

K O D	Kriterler	B.K.	I.TÜ.	A.R.K.	E.V.	M.Ö.	E.D.	E.C.	M.T.	H.Y.	E.Ö.	A.S.	A.K.	G.K.	ORTALAMA
A	x in a' ya yaklaşımı durumunda limitin anlamını açıklar ve yorumlar (Tanım kümesinin bir alt aralığındaki elemanların bir noktaya yaklaşımını limiti de göz önüne alarak açıklar).	4	3	4	4	4	4	5	5	5	5	5	4	5	4,38
B	Bir fonksiyonun bir noktadaki limiti ile soldan limiti ve sağdan limiti arasındaki ilişkiyi belirtir.	5	5	5	5	4	5	5	4	5	5	4	5	5	4,77
C	Fonksiyonun limit noktasında tanımlı olup olmaması ve limit değeri ile fonksiyonun o noktadaki değeri arasındaki ilişkiyi belirtir.	4	4	4	4	3	3	4	4	4	4	4	3	4	3,77
D	Fonksiyonun grafiğine bakarak bir noktadaki limit değerini tahmin eder.	5	5	5	4	5	5	5	4	5	5	5	5	5	4,85
E	Limitin geometrik gösterimi ile gösterimi arasında ilişki kurarak, ikisi arasında bir fonksiyon tanımlar.	3	3	4	4	4	4	4	4	4	3	4	3	4	3,69

K O D	Kriterler	B.K.	İ.T.Ü.	A.R.K.	E.V.	M.Ö.	E.D.	E.C.	M.T.	H.Y.	E.Ö.	A.S.	A.K.	G.K.	ORTALAMA
F	Limitin tanımında kullanılan komşulukların ne anlama geldiğini bilir.	2	2	3	3	2	4	4	4	3	3	4	3	4	3,15
G	Limitin arandığı noktanın fonksiyonun yığılma noktası olması gerektiğini bilir.	3	2	4	3	3	3	4	4	4	4	3	3	4	3,38
H	nin a bağlı bir değer olduğunu bilir.	4	4	4	3	4	3	4	4	4	3	4	4	3	3,69
I	Özel tanımlı fonksiyonların limitlerini bulur ve onlarla ilgili uygulamalar yapar.	3	3	4	3	4	4	4	4	4	5	4	4	3	3,77
İ	Limit kavramının değişik fonksiyonlardaki biçimini görür ve tanımlar (Limit fonksiyonun o noktadaki değerine eşit olabilir, bazen fonksiyon o noktada tanımlı olsa da limiti olmayabilir, bazen ise fonksiyon tanımlı olmadığı noktada da limite sahip olabilir vb.).	2	2	3	3	2	2	3	4	3	5	4	4	3	3,08
J	Fonksiyonun belirli bir noktada sürekli olup olmadığını tespit eder.	4	4	4	4	3	4	4	5	4	5	4	4	5	4,15
K	Konu hakkında edindiği bilgiler kalıcı olmuştur.	4	4	3	4	4	4	2	4	4	2	4	4	4	3,62
ORTALAMALAR		3,58	3,42	3,92	3,67	3,5	3,75	4	4,17	4,08	4,08	4,08	3,83	4,08	

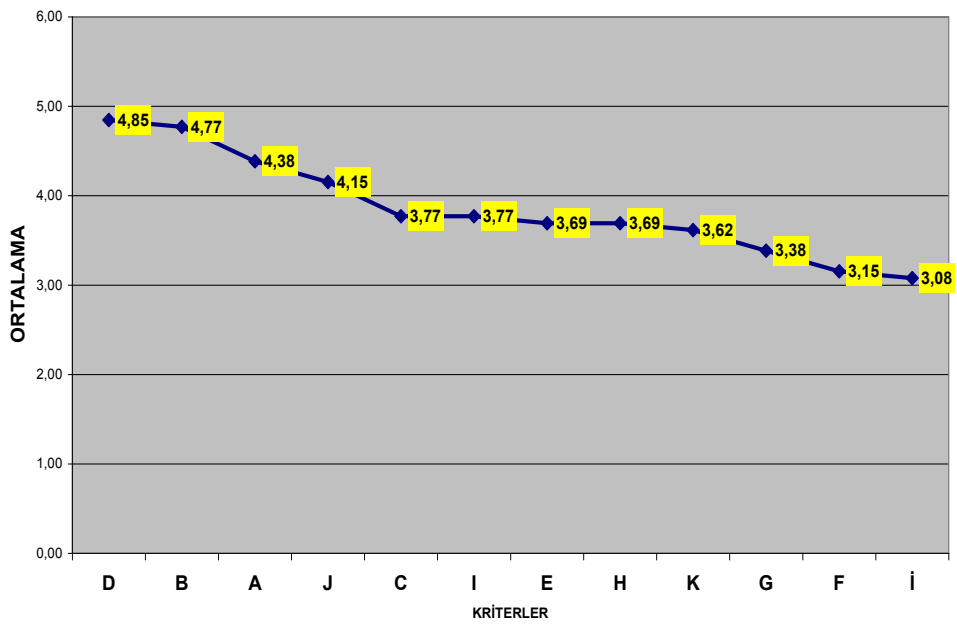
DEĞERLENDİRMELER	ÇOK KÖTÜ	KÖTÜ	ORTA	İYİ	ÇOK İYİ
	1	2	3	4	5

Tablo 25 dikkatle incelendiğinde;

- Her bir öğrenci için ayrı değerlendirme yapıldığı,
- Her öğrenciye ait, sonuç olarak değerlendirilebilecek kişisel ortalamaların olduğu,
- Her kritere ait öğrenci ortalamalarının bulunduğu

görülebilir.

Aşağıda elde edilen bulgular Tablo 25 incelenerek ortaya çıkartılmıştır.



Grafik 1: Kriterlerin Ortalaması

Grafik 1'e göre en yüksek ortalamaya sahip ilk 3 kriter aşağıda verilmiştir.

Tablo 26: En yüksek ortalamaya sahip ilk 3 kriter

KOD	Kriterler	Ortalama
D	Fonksiyonun grafiğine bakarak bir noktadaki limit değerini tahmin eder.	4,85
B	Bir fonksiyonun bir noktadaki limiti ile soldan limiti ve sağdan limiti arasındaki ilişkiyi belirtir.	4,77

KOD	Kriterler	Ortalama
A	x in a' ya yaklaşımı durumunda limitin anlamını açıklar ve yorumlar (Tanım kümesinin bir alt aralığındaki elemanların bir noktaya yaklaşımını limiti de göz önüne alarak açıklar).	4,38

Grafik 1'e göre en düşük ortalamaya sahip 3 kriter aşağıda verilmiştir.

Tablo 27: En düşük ortalamaya sahip son 3 kriter

KOD	Kriterler	Ortalama
G	Limitin arandığı noktanın fonksiyonun yığılma noktası olması gerektiğini bilir.	3,38
F	Limitin $\varepsilon - \delta$ tanımında kullanılan komşulukların ne anlama geldiğini bilir.	3,15
İ	Limit kavramının değişik fonksiyonlardaki biçimini görür ve tanımlar (Limit fonksiyonun o noktadaki değerine eşit olabilir, bazen fonksiyon o noktada tanımlı olsa da limiti olmayabilir, bazen ise fonksiyon tanımlı olmadığı noktada da limite sahip olabilir vb.).	3,08

4.1.4. Topoloji Dersi Almış 3. Sınıf Öğrencilerinin, limitin topoloji dersinde verilen tanımı ile limitin $\varepsilon - \delta$ tekniği ile verilen tanımı arasında bir bağ kurma konusunda bilişsel düzey belirleme test bulguları

Bu bölümde; adaylarla yapılan çalışma hakkında araştırma verilerinin istatistiksel çözümlemeleri sonucunda elde edilen bulgulara yer verilmiştir.

Bildiğimiz anlamda limit, türev, integral Öklid uzayında incelenir. Ama Öklid uzayı dışında uzaylar da vardır. Riemann uzayı, Banach uzayı, Sorgenfery uzayı vs. Genel anlamda bildiğimiz limit, türev, integral bu uzaylarda nasıl tanımlı olacak sorusuna cevap aranır. Tabii bunların yanında geometrik şekillerde de değişiklikler olur. Öklid uzayında bildiğimiz doğru parçası Riemann uzayında farklı bir şekilde olur. İşte bu tür sorulara cevap arayan bilim dalı "TOPOLOJİ" dir (Özbağcı,2003). Bu nedenle topoloji dersini almış öğrencilerin limitin topoloji dersinde verilen tanımı ile limitin $\varepsilon - \delta$ tekniği ile verilen tanımı arasında bir ilişki kurup kuramadıklarını anlamak amacıyla yürütülen bu çalışmada araç olarak 5 soruluk bir anket kullanılmıştır. Burada, çalışmada yer alan soruların her biri analiz edilerek yorumlanmıştır.

Araştırmada topoloji dersini ilk kez alan 22 Matematik Öğretmenliği 3. sınıf öğrencisi örneklem olarak alınmıştır. Öğrencilere sorularda yardımcı olması için aşağıdaki iki tanım verilmiştir.

Tanım 1: $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve a da A cümlesinin bir yığılma noktası olsun.

Her $\varepsilon > 0$ için eğer $0 < |x - a| < \delta$ olduğunda $|f(x) - L| < \varepsilon$ kalacak şekilde en az bir $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa x , a ya yaklaştığında f nin limiti “L” dir denir ve

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

yazılır.

Tanım 2: (E, φ) , (F, φ') olmak üzere $f : E \rightarrow F$ bir fonksiyon ve $a \in E$ ve $b \in F$ olsun.

$$\forall V \in U_{(L)} \text{ için } \exists U \in U_{(a)} \ni f(U) \subset V$$

sağlanıyorsa x, a ya yaklaştığında f nin limiti “L” dir denir ve

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

yazılır.

1) Yukarıda verilen “Tanım 1” sizce neyin tanımıdır?

2) Yukarıda verilen “Tanım 2” sizce neyin tanımıdır?

Tablo 28: 1. ve 2. soruya verilen cevapların gruplandırılmış şekli

1) “Tanım 1” sizce neyin tanımıdır?	2) “Tanım 2” sizce neyin tanımıdır?			Genel Toplam
	E topolojik uzayından F topolojik uzayına tanımlı f fonksiyonunun a noktasındaki limitidir.	Limitin tanımıdır.	Süreklilik tanımıdır.	
Bir f(x) fonksiyonu için x a ya yaklaştığında fonksiyonun değeri.		2		2
Limitin tanımıdır.		18		18
Reel değerli tek değişkenli bir f fonksiyonun a noktasındaki limitinin tanımıdır.	1			1
Süreklilik tanımıdır.			1	1
Genel Toplam	1	20	1	22

Tablo 28’e göre Tanım1 için “Bir f(x) fonksiyonu için x a ya yaklaştığında fonksiyonun değeri.” diyen 2 kişinin ve “Süreklilik tanımıdır.” diyen 1 kişinin cevapları kabul edilir değildir. Bu tabloya göre 1 kişi, Tanım 1 için “Reel değerli tek değişkenli

bir f fonksiyonun a noktasındaki limitinin tanımıdır.” ve Tanım 2 için ise “ E topolojik uzayından F topolojik uzayına tanımlı f fonksiyonunun a noktasındaki limitidir.” tanımlamalarıyla beklenen doğru tanımlamaları yapmıştır. Bu durumda Tanım 1 ve Tanım 2’nin her ikisinin de limitin tanımı olduğunu söyleyen toplam 19 öğrenci (%86) bulunmaktadır.

Adaylar Tanım 2 nin bir fonksiyonun a noktasındaki limitini tarif ettiğinin farkındadırlar.

3) Tanım 1 ve Tanım 2 arasında ne tür benzerlikler keşfedebildiniz?

Tablo 29: 3. soruya verilen cevapların gruplandırılmış şekli

3. Soruya verilen cevaplar	Toplam
İkisi de limitin tanımı.	10
1 deki aralıklar 2 de açıklar olarak karşımıza çıkıyor.	1
1. de açıklar metrik uzayın açıkları olup, 2 de açıklar genel topolojik uzayın açıklarıdır.	1
1. tanımda açık aralıklar, 2 tanımda açık kümeler vardır.	1
1.deki ε ’u 2. deki V gibi, 1 deki $ x - a $ komşuluğunu 2 deki $U_{(a)}$ gibi düşünebiliriz.	1
1.tanım reel sayılardaki mutlak değer metriğine dayalı bir tanımdır. 2. tanım ise daha genel bir tanımdır.	1
Açık aralıklar farklı tanımlanmış ama aynı.	1
Biri reel, diğeri topolojik uzaylardaki limit tanımlarıdır.	1
$f(U) \subset V$ ifadesi ile $ f(x) - L < \varepsilon$ aynı şeylerdir.	1
Her ikisinde de açık aralıklar ve yığılma noktaları mevcuttur.	1
İkisinde de bir fonksiyon ve açık aralıklar yardımıyla limit tanımlanıyor.	1

3. Soruya verilen cevaplar	Toplam
İkisinde de bir noktanın içinde olduğu açıklar ve bu açığın görüntüsü olan açık kullanılmıştır.	1
Tanım 1, Tanım 2 nin özel bir halidir.	1
Genel Toplam	22

Tablo 29’a göre 10 öğrenci (%45) iki tanım arasındaki benzerliği çok kısa bir ifadeyle “İkisi de limitin tanımı” şeklinde açıklamışlardır. Geriye kalan 12 öğrenci iki tanım arasındaki benzerlikleri kendi ifadeleriyle dile getirmişlerdir.

Ancak; “1 deki aralıklar, 2 de açıklar olarak karşımıza çıkıyor.” ifadesinde öğrencinin aralık ve açık kavramlarını,
“1. tanımda açık aralıklar, 2. tanımda açık kümeler vardır.” ifadesinde öğrencinin aralık ve açık küme kavramlarını,

“1.deki ε ’u 2. deki V gibi, 1 deki $|x - a|$ komşuluğunu 2 deki $U_{(a)}$ gibi düşünebiliriz.” ifadesinde öğrencinin ε , V , $|x - a|$ ve $U_{(a)}$ ifadelerini, tam olarak zihninde anlamlandıramadıkları ortaya çıkmaktadır.

“ $f(U) \subset V$ ifadesi ile $|f(x) - L| < \varepsilon$ aynı şeylerdir.” ifadesi ise kabul edilebilir bir cevap değildir.

Öğrenciler genel olarak iki tanımın da fonksiyonlarda limiti tarif ettiğini görmüşlerdir, ancak iki tanım arasındaki benzerliklerin ne olduğu konusunda ayrıntıya giren öğrenciler maalesef tatmin edici cevaplar verememişlerdir.

4. ve 5. sorulara verilmiş cevapların gruplandırılmış hali aşağıda bir arada analiz edilmiştir.

4) Sizce hangi tanım daha sade?

5) Tanım 2'yi kullanarak $\lim_{x \rightarrow 1} (x + 3) = 4$ olduğunu gösterebilir misiniz?

Tablo 30: 3. ve 4. soruya verilen cevapların gruplandırılmış şekli

5. Soruya verilen cevaplar	4. Soruya verilen cevaplar		Genel Toplam
	1. Tanım	2. Tanım	
Tam	4	4	8
Cevap Yok	5	1	6
Yanlış	3	5	8
Genel Toplam	12	10	22

Tablo 30 incelendiğinde, öğrencilerin hangi tanımın sade olduğu konusunda kararsız kaldıkları gözlemlenmektedir. Tanım1'in Tanım 2'den daha sade olduğunu düşünen 12 öğrenci (%55), Tanım 2'nin Tanım 1'den daha sade olduğunu düşünen 10 öğrenci bulunmaktadır. Ancak 4. soruya cevap vermeyen 6 öğrenciden 5'inin (%83) Tanım1'i, Tanım 2'den daha sade bulması, öğrencilerin Tanım 1 konusunda zihinlerinde yerleşik bir kavram imajı olduğunu ve Tanım 2 ile ne yapacaklarını tam bilemediklerini düşündürmektedir.

4.2. İki değişkenli reel fonksiyonlardaki limit ve süreklilik kavramları hakkındaki bulgular

4.2.1. Ön test bulguları

Bu bölümde çok değişkenli reel fonksiyonların limiti ve sürekliliği konularının işlendiği Analiz 2 dersine başlamadan önce derse katılan toplam 52 öğrenci ile yürütülen ön test çalışmasının araştırma bulgularına yer verilmiştir. Bu çalışmada yer alan 1. soru aynı zamanda bir kalıcılık testi olarak görülebilir. Sorular ve öğrencilerin sorulara verdikleri cevapların gruplandırılmış halleri sırasıyla aşağıda verilmiştir.

1. Düzlemde tanımlı bir fonksiyonun bir noktada limitinin var olup olmadığına, sürekli olup olmadığına karar verebilmek için fonksiyonun hangi ayırt edici özelliklerinden yararlanılır?

Tablo 31: 1. Soruda yer alan fonksiyonun limiti hakkında verilen cevapların gruplandırılmış hali

1. Soruda yer alan fonksiyonun limiti hakkında verilen cevaplar	ÖĞRENCİ SAYISI	PAY
Aranan noktada sağ ve sol limitler eşit ise “limit vardır” denir.	31	60%
Aranan nokta etrafında alınan değerlerin görüntüleri belirli bir nokta etrafında yoğunlaşıyorsa, o nokta fonksiyonun istenen noktadaki limitidir.	11	21%
YORUM YOK	5	10%
Belirli bir aralıkta tanımlı bir fonksiyonun bir noktada limitinin olması için o noktanın tanım aralığında olup olmadığına bakarız ve bu noktada grafik kopmamalıdır. Yani elimizi kaldırmadan grafiği çizmeliyiz.	2	4%
Limiti var olabilmesi için limiti hesaplanan nokta civarında fonksiyon tanımlı olmalı ve yalnızca bir teğet çizilebilmeli.	2	4%
Grafik belirli bir noktaya yaklaşıyor fakat o noktada değer almıyorsa o noktada limiti vardır.	1	2%
Genel Toplam	52	100%

Yukarıdaki tabloya göre; öğrencilerin %60’ının aranan noktada sağ ve sol limitlerin eşit olması durumunda limitin varlığından bahsedilebileceğini iddia etmişlerdir.

%21'i ise "Aranan nokta etrafında alınan değerlerin görüntüleri belirli bir nokta etrafında yoğunlaşıyorsa, o nokta fonksiyonun istenen noktadaki limitidir." ifadesini kullanmıştır.

Bu cevaplar toplam katılımcılar arasında %81'lik bir oran teşkil etmektedir.

Tablo 32: 1. Soruda yer alan süreklilik hakkındaki cevapların gruplandırılmış hali

1. Soruya süreklilik ile ilgili verilen cevaplar	Toplam	PAY
Sürekli olması için fonksiyonun limiti olmalı ve limit değeri fonksiyon değerine eşit olmalı. Fonksiyonumuz o noktada tanımlı olmak zorundadır. Grafiği elimizi hiç kaldırmadan çizebilmeliyiz.	21	40%
Sürekliliği için o noktada fonksiyonun grafiğinde herhangi bir kopma olup olmasına bakılır. Eğer grafiği elimizi kaldırmadan çizebiliyorsak sürekli dir diyebiliriz.	19	37%
Fonksiyon, limitinin olduğu noktada tanımlı ise sürekli dir.	8	15%
YORUM YOK	4	8%
Genel Toplam	52	100%

Öğrencilerin tek değişkenli fonksiyonların sürekliliği konusunda verdikleri cevaplar incelendiğinde, 21 öğrencinin (%40) süreklilik hakkında teorik bir tanım vermeye çalıştığı, 19 öğrencinin ise (%37) süreklilik hakkında fonksiyonun grafiği üzerinden anlatım yoluyla bir açıklama getirmeye çalıştıkları gözlemlenmektedir.

Merak edilen bir başka nokta ise, öğrencilerin dersten önce çok değişkenli fonksiyonların limiti hakkında ne düşündükleri idi. Öğrencilerin bu soruya verdikleri

cevapları bir önceki soru ile karşılaştırarak vermek burada daha anlamlı olacaktır. Verilen cevapları bir önceki soruya verdikleri cevapları dikkate alarak değerlendirmenin daha uygun olacağı düşünülmüştür.

2. 3 boyutlu öklidyen bir uzayda tanımlı bir fonksiyonun belirli bir noktada limitinin var olup olmadığına, sürekli olup olmadığına karar verebilmek için fonksiyonun hangi ayırt edici özelliklerinden yararlanılır?

Tablo 33: 1. soruda ve 2. soruda yer alan fonksiyonun limiti hakkında verilen cevapların gruplandırılmış hallerinin matrisi

2.Soruya verilen cevaplar 1.Soruya verilen cevaplar	Sağ ve sol limiti eşitse limit vardır.	YORUM YOK	Aranan nokta etrafında alınan değerlerin görüntüleri belirli bir nokta etrafında yoğunlaşıyorsa, o nokta fonksiyonun istenen noktadaki limitidir.	Üç boyutlu olduğu için grafiği dik eksenlere bölerek limit incelenir. Seviye eğrilerinin limitine bakılır.	Genel Toplam
Aranan noktada sağ ve sol limitler eşit ise "limit vardır" denir.	14	12	4	1	31
Aranan nokta etrafında alınan değerlerin görüntüleri belirli bir nokta etrafında yoğunlaşıyorsa, o nokta fonksiyonun istenen noktadaki limitidir.		8	2	1	11
YORUM YOK		5			5
Belirli bir aralıkta tanımlı bir fonksiyonun bir noktada limitinin olması için o noktanın tanım aralığında olup olmadığına bakarız ve bu noktada grafik kopmamalıdır. Yani elimizi kaldırmadan grafiği çizmeliyiz.		1		1	2

2.Soruya verilen cevaplar 1.Soruya verilen cevaplar	Sağ ve sol limiti eşitse limit vardır.	YORUM YOK	Aranan nokta etrafında alınan değerlerin görüntüleri belirli bir nokta etrafında yoğunlaşıyorsa, o nokta fonksiyonun istenen noktadaki limitidir.	Üç boyutlu olduğu için grafiği dik eksenlere bölerek limit incelenir. Seviye eğrilerinin limitine bakılır.	Genel Toplam
Limiti var olabilmesi için limiti hesaplanan nokta civarında fonksiyon tanımlı olmalı ve yalnızca bir teğet çizilebilmeli.		2			2
Grafik belirli bir noktaya yaklaşıyor fakat o noktada değer almıyorsa o noktada limiti vardır.			1		1
Genel Toplam	14	28	7	3	52

Yukarıdaki tabloya göre; tek değişkenli fonksiyonlar için “Aranan noktada sağ ve sol limitler eşit ise “limit vardır denir.” şeklinde cevap verenlerin 14’ü (%45) çok değişkenli fonksiyonlar için de aynı şeyin olması gerektiğini ifade etmiştir. 12 öğrenci (%39) ise bu konuda bir fikir beyan etmemiştir.

Önceki soruya kısaca “değerlerin yoğunlaştığı bir nokta” olarak cevap veren 11 öğrenciden 8’i (%73) çok değişkenli fonksiyonların limiti için herhangi bir yorum yapmazken, yine aynı mantıkla çok değişkenli fonksiyonlarda limite ulaşılabileceğini savunan sadece 2 (%18) öğrenci vardır.

Ayrıca 1. soruya yorum yazmayan 5 öğrencinin tamamı 2. soruda da yorumsuz kalmıştır.

Sadece 2. soruya verilen cevaplar değerlendirildiğinde yorum yazmayanların sayısının 28’e yükselerek %54’lük payla ilk sırada oldukları görülmektedir. Çok değişkenli fonksiyonlarda limitin tespitinin, tek değişkenli fonksiyonlarda yapıldığı gibi

olması gerektiğini savunan $14+2=16$ öğrenci (%31) vardır. İki grup toplam %85’lik bir paya sahiptir. Burada 3 öğrencinin diğerlerinden farklı olarak seviye eğrilerinden bahsetmesinden yola çıkarak, bu öğrencilerin daha önce bu dersi aldıkları ihtimalinden söz edilebilir.

Öğrencilerin çok değişkenli fonksiyonların sürekliliği hakkında ne düşündükleri irdelemek ve tek değişkenli fonksiyonların sürekliliği hakkında sahip oldukları görüşlerle ilişkisini ortaya koymak için her iki soruya verilen gruplandırılmış cevapları yine matris şeklinde ele alınmıştır.

Tablo 34: 1. ve 2. soruda yer alan süreklilik hakkında verilen cevapların gruplandırılmış hallerinin matrisi

2.Soruya verilen cevaplar 1.Soruya verilen cevaplar	YORUM YOK	Süreklilik için seçtiğimiz aralıkta tanımsız kalan yer olmadığına bakarız.	Süreklilik için limitin olduğu noktadaki değeri, limite eşit olmasıdır.	Süreklilik için fonksiyonun grafiğini elimizi kaldırmadan çizebilmek gerekir.	Genel Toplam
Sürekli olması için fonksiyonun limiti olmalı ve limit değeri fonksiyon değerine eşit olmalı. Fonksiyonumuz o noktada tanımlı olmak zorundadır. Grafiği elimizi hiç kaldırmadan çizebilmeliyiz.	11		8	2	21
Sürekliliği için o noktada fonksiyonun grafiğinde herhangi bir kopma olup olmamasına bakılır. Eğer grafiği elimizi kaldırmadan çizebiliyorsak sürekli dir diyebiliriz	6	8	4	1	19
Fonksiyon, limitinin olduğu noktada tanımlı ise sürekli dir.	4	3	1		8

1.Soruya verilen cevaplar \ 2.Soruya verilen cevaplar	YORUM YOK	Sürekliilik için seçtiğimiz aralıkta tanımsız kalan yer olmadığına bakarız.	Sürekliilik için limitin olduğu noktadaki değeri, limite eşit olmasıdır.	Sürekliilik için fonksiyonun grafiğini elimizi kaldırmadan çizebilmek gerekir.	Genel Toplam
YORUM YOK	4				4
Genel Toplam	25	11	13	3	52

Tek değişkenli fonksiyonların sürekliliği için bir tanım vermeye çalışan 21 öğrencinin 11'i (%52) çok değişkenli fonksiyonların sürekliliği konusunda yorumsuz kalırken, 8'i çok değişkenli fonksiyonlarda da tek değişkenli fonksiyonlarda olduğu gibi süreklilik için "Limitin olduğu noktadaki değer, limite eşit olmalıdır." şeklinde cevap vermişlerdir. Bu grupta yer alan öğrencilerin sadece 2'si farklı bir yöntemle çok değişkenli fonksiyonlardaki sürekliliği izah etmeye çalışmışlardır.

Tek değişkenli fonksiyonların sürekliliğini fonksiyonların grafiği üzerinden anlamlandırmaya çalışan 19 öğrenciden 6'sı çok değişkenli fonksiyonların sürekliliği için yorum yazmazken, sadece 1'i tek değişkenli fonksiyonların sürekliliği hakkındaki düşüncesini çok değişkenli fonksiyonların sürekliliğine aktardığı görülmektedir.

Burada dikkat çeken bir başka nokta da tek değişkenli fonksiyonların sürekliliği konusunda yorum yazmayan öğrenci sayısı 4 (%8) iken, bu sayı çok değişkenli fonksiyonların sürekliliği konusunda 25'e (%48) yükselmiştir.

Çok değişkenli fonksiyonlar dersine başlamadan önceki derste yapılan başka bir çalışmada ise öğrencilerden tek değişkenli fonksiyonların bir noktadaki limitinin $\varepsilon - \delta$ tekniği ile verilmiş tanımını, iki değişkenli fonksiyonların limiti için genelleştirmeleri istenmiştir.

Bu çalışmaya katılan 43 öğrenciden 33'ü (%77) “ $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ vardır, öyle ki $\forall (x, y) \in R^2$ ikilileri için $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$ iken $|f(x) - L| < \varepsilon$ o.ş. bir $\delta > 0$ sayısı bulanabiliyorsa, $L \in R$ limiti vardır.” şeklinde cevap vermiştir.

4.2.2. Bilişsel Düzey Belirleme Testi Bulguları

Öğrencilerle çok değişkenli fonksiyonlarda limit ve süreklilik dersi işlendikten sonra yapılan çalışma sonuçları aşağıdadır. Bu çalışmaya katılan 37 öğrenciye 4 soru yöneltilmiştir. Sorular ve öğrencilerin sorulara vermiş oldukları cevapların gruplandırılmış halleri sırasıyla aşağıda verilmiştir.

1. Kaynaklarda iki değişkenli bir fonksiyonun bir noktadaki limitini incelerken o noktaya mümkün olan bütün eğrilerle yaklaşılması tavsiye edilmektedir. Size göre böyle bir yaklaşımın, limitin belirlenmesine olan katkıları veya zararları neler olabilir? Açıklayınız.

Tablo 35: 1. Soruya verilen cevapların gruplandırılmış halinin dağılımı

1. Soruya verilen cevaplar	TOPLAM	PAY
İki değişkenli bir fonksiyonun bir noktadaki limitini incelerken o noktaya her yönden yaklaşmak gerekir.	18	49%
Tek değişkenli fonksiyonlarda sağdan ve soldan yaklaşmak yeterli idi. Burada ise mümkün olduğu kadar çok yoldan yaklaşmak gerekir.	11	30%
YORUM YOK	3	8%
Çok değişkenli fonksiyonlarda limiti aranan noktaya çemberlerle yaklaşmak en doğru yoldur.	2	5%
Limiti bulmada en garantili yol tanımı kullanmaktır.	2	5%
Çok değişkenli bir fonksiyonlarda limit bulurken, fonksiyonun grafiğine bakmak en garantili yodur.	1	3%
Genel Toplam	37	100%

Bu çalışmaya katılan 37 öğrenciden 18'i (%49) iki değişkenli fonksiyonlarda limitin arandığı noktaya her yönden yaklaşmak gerektiğini, 11'i (%30) mümkün olduğu kadar çok yönden yaklaşımı savunmuştur.

3 öğrenci yorumsuz kalırken, 2 öğrenci “Çok değişkenli fonksiyonlarda limiti aranan noktaya çemberlerle yaklaşmak en doğru yoldur.” ifadesini kullanmıştır.

1) Bir yaklaşımda bulunuyorsak önce yaklaştığımız noktadaki bütün eğrilerle yaklaşılmalıdır. Katkılar daha iyi bir şekilde limitin olup olmadığını inceleyebiliriz. Her taraftan yaklaşarak daha garanti bir sonucu verebiliriz. Fakat bu yaklaşımda matematiksel hesaplamalarda ki ufak yanlışlıklar doğru limiti ve yaklaşımın sonucu yanlış bulabiliriz.

2- Bence bu şekilde bir fonksiyonun bir noktadaki limiti bu yolla seçilebilir sadece. Çünkü mümkün olmayan yaklaşımlar sorununuzu yanı sıra ne kadar yaklaşırsak yaklaşalım yine yaklaşılmadığımız yönler olacaktır. Böyle bir yönün katkısı yaklaşımdan bulduğumuz sonucu tanımlı kullanarak garantiye yelmez. Ancak doğru bulduğumuz sonuç tanımlı bozduğumuzdur. Bu da sorunun yanıtına sebep olabilir.

Şekil 27: 1. Soruya verilen cevaplardan birkaç örnek

2. $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ de $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$ ile verilen fonksiyonunun $(0,0)$ noktasındaki

limiti ve sürekliliği hakkındaki düşüncelerinizi yazınız.

Öğrencilerin 2. soruya verdikleri limit ve süreklilik hakkındaki cevaplar, bir arada değerlendirilerek analiz edilmiştir.

Tablo 36: 2.soruda yer alan limit ve süreklilik hakkındaki cevapların gruplandırılmış hallerinin matrisi

2.Soruya verilen <u>süreklilik</u> hakkındaki cevaplar 2.Soruya verilen <u>limit</u> hakkındaki cevaplar	(0,0) noktasında tanımsız olduğundan sürekli değildir.	Limiti olduğu için süreklidir.	Yorum yok.	Limiti olmadığı için sürekli değil.	Toplam
İki farklı yoldan yaklaşım, farklı sonuçlar ve limit yok.				15	15
Doğru ailesi ile yaklaşım, farklı sonuçlar ve limit yok.				8	8
Kutupsal koordinatlarla yaklaşım, limit yok.				5	5
İki farklı doğru ile yaklaşım, farklı sonuçlar ve limit yok.				3	3
İki farklı doğru ailesi ile yaklaşım, farklı sonuçlar ve limit yok.				2	2
İki farklı eğri yaklaşım, farklı sonuçlar ve limit yok.				1	1
Kutupsal koordinatlarla yaklaşım, limit var.		1			1
x'e göre iki kere türev, limit 1.	1				1
Yorum yok.			1		1
Toplam	1	1	1	33	37

15 öğrenci (%41), limiti aranan noktaya iki farklı yoldan yaklaşarak limitin olmadığını göstermişler ve limit olmadığı için de bu noktada sürekli olmadığını savunmuşlardır.

Çalışmaya katılan 37 öğrenciden 33'ü (%89) 6 farklı yol izleyerek aranan noktada limitin olmadığını göstermiştir. Bu öğrencilerin tamamı limit olmadığı için aranan noktada fonksiyonun sürekliliğinden bahsedilemeyeceğini belirtmiştir.

2) $y=mx$ için $\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x,y)), \lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x,y))$

$$f(x,y) = \frac{x^2}{x^2 + m^2 x^2} = \frac{x^2}{x^2(1+m^2)} = \frac{1}{1+m^2}$$

$x=my$ için

$$f(x,y) = \frac{my}{m^2 y^2 + y^2} = \frac{my}{y^2(m^2+1)} = \frac{m}{y(m^2+1)} \quad \left(\begin{array}{l} \text{lim yok} \\ \text{e (y'ye bağlı)} \end{array} \right)$$

lim yok ise sürekli değildir.

2) iter değişkenli fonksiyonlarda değişkenleri kutupol sisteme yazabiliyoruz

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos \theta \\ y &= r \cdot \sin \theta \end{aligned} \quad f(r) = \frac{r^2 \cos^2 \theta}{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} \Rightarrow f(r) = \cos^2 \theta$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \cos^2 \theta = \cos^2 \theta$$

Burada limit θ açısına bağlı olduğu için ve θ açısında bağımsız değişken olduğundan limit yoktur.

Limiti olmadığından sürekliliğinden bahsedemeyiz.

Şekil 28: 2. Soruya verilen cevaplardan birkaç örnek

3. $g(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ ile verilen fonksiyonun (0,0) noktasındaki limiti ve sürekliliği

hakkındaki düşüncelerinizi yazınız.

Burada yine öğrencilerin 3. soruya verdikleri limit ve süreklilik hakkındaki cevaplar, bir arada değerlendirilerek analiz edilmiştir.

Tablo 37: 3.soruda yer alan limit ve süreklilik hakkındaki cevapların gruplandırılmış hallerinin matrisi

3.Soruya verilen <u>süreklilik</u> hakkındaki cevaplar 3.Soruya verilen <u>limit</u> hakkındaki cevaplar	(0,0) noktasında tanımlı olmadığından sürekli değil.	Limit olduğu için sürekli dir.	Limiti olmadığı için sürekli değildir.	Yorum Yok	Toplam
İki farklı yol ile yaklaşım, aynı sonuç ve limit 0.	5	8			13
Kutupsal koordinatlarla yaklaşım, limit 0.	6	1			7
Yorum Yok	1			6	7
Doğru ailesi ile yaklaşım, limit 0.	2		1		3
İki farklı doğru ile yaklaşım, aynı sonuç ve limit 0.	2	1			3
Bir doğru ailesi ve bir eğri ile yaklaşım, aynı sonuç ve limit 0.				1	1
İki farklı doğru ailesi ile yaklaşım, aynı sonuç ve limit 0.		1			1
Tanımı kullanarak, limit 0.	1				1
x'e göre türev ve y=0 için limit 0.	1				1
Toplam	18	11	1	7	37

Burada 37 öğrenciden 13'ü (%35) limitin arandığı noktaya iki farklı yol ile 3'ü (%8) iki farklı doğru ile yaklaşmak suretiyle aynı değeri elde ederek, sonucu 0 olarak

bulmuştur. Bu soruyu 7 (%19) öğrenci cevapsız bırakmıştır. İki farklı yol, iki farklı doğru, iki farklı doğru ailesi ya da bir doğru ailesi ve bir eğri ile yaklaşarak aynı sonuca ulaşan ve limiti 0 bulan 18 öğrenci (%49) bulunmaktadır.

Burada dikkat edilmesi gereken bir diğer nokta ise, yorum yazmayanların sayısının 2. soruda 1 iken 2. soruda 7'ye yükselmiş olmasıdır.

Fonksiyonun sürekliliği hakkında yorum yapan 30 öğrenciden 11'i (%37) aranan noktada limit olduğu için aynı zamanda fonksiyonun sürekli olduğunu savunmuştur.

$$\begin{aligned} 3) \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2+y^2} \right) &= \lim_{y \rightarrow 0} (0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2+y^2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} (1) = 1 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} (0,0) \text{ da limiti yok sürekli değil} \\ \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \right) &= \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{2xy}{2x} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} (y) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{0}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} (0,0) \text{ da limiti var. Fakat bu noktada sürekli değildir. } (0,0) \text{ için payda } 0 \text{ elde ettiğimizden tanımsızdır.} \\ \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} ③ \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x,y) \right) &= \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 y}{x^2+y^2} \right) \right) = 0 \\ \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x,y) \right) &= \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 y}{x^2+y^2} \right) \right) = 0 \\ \text{Şimdi solda limit aynı limit var ve süreklidir.} \\ f(x,y) &= \frac{x^2}{x^2+y^2} \Rightarrow \text{limit yok} \quad \text{sürekli olarak bahsedemeyiz.} \end{aligned}$$

Soru 3:

$f(x,y)$ 'nin $(0,0)$ 'da sürekli olmadığını soru 2'de göstermiştik.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0$$

Böylece $g(x,y)$, $(0,0)$ 'da sürekli ve limiti sıfırdır.

Şekil 29: 3. Soruya verilen cevaplardan birkaç örnek

Bu noktada öğrencilerin iki değişkenli fonksiyonların limitini bulmada izledikleri yolu ve düşünce yapılarını daha iyi tahlil edebilmek için 2. ve 3. sorulara verdikleri limitle ilgili gruplandırılmış cevaplara bir arada bakmak gerekir.

Tablo 38: 2. ve 3.sorularda yer alan limit hakkındaki cevapların gruplandırılmış hallerinin matrisi

3. soru \ 2. soru	İki farklı yol ile yaklaşım, aynı sonuç ve limit 0.	Doğru ailesi ile yaklaşım, limit 0.	Kutupsal koordinatlarla yaklaşım, limit 0.	İki farklı doğru ile yaklaşım, aynı sonuç ve limit 0.	İki farklı doğru ailesi ile yaklaşım, aynı sonuç ve limit 0.	x'e göre türev ve $y=0$ için limit 0.	Yorum Yok	Tanımı kullanarak, limit 0.	Bir doğru ailesi ve bir eğri ile yaklaşım, aynı sonuç ve limit 0.	Genel Toplam
İki farklı yoldan yaklaşım, farklı sonuçlar ve limit yok.	10	1					4			15
Doğru ailesi ile yaklaşım, farklı sonuçlar ve limit yok.	3	2	1				1		1	8
Kutupsal koordinatlarla yaklaşım, limit yok.			5							5
İki farklı doğru ile yaklaşım, farklı sonuçlar ve limit yok.				3						3
İki farklı doğru ailesi ile yaklaşım, farklı sonuçlar ve limit yok.					1		1			2
x'e göre iki kere türev, limit 1.						1				1
Yorum yok.							1			1
İki farklı eğri ile yaklaşım, farklı sonuçlar ve limit yok.								1		1
Kutupsal koordinatlarla yaklaşım, limit var.			1							1
Genel Toplam	13	3	7	3	1	1	7	1	1	37

Öğrencilerin 2. ve 3. sorulara verdikleri cevaplar bir arada değerlendirildiğinde, toplam 24 öğrencinin (%65) 2. soruda kullandığı çözüm yöntemini 3. soruda da kullanarak çözüm aradığı gözlemlenmiştir.

Burada 2. soruda iki farklı yol ile, iki farklı doğru ile, iki farklı doğru ailesi ile yaklaşarak sonuçların farklı çıkması sonucu limitin olmadığını belirten toplam 17 öğrencinin (%46), aynı yöntemlerle 3. soru için sonuçların eşit olması ile birlikte fonksiyonun (0,0) noktasındaki limitinin o olduğunu söylemeleri dikkat çekicidir.

4. $f(x,y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2}$ için $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} f(x,1)$ limitini inceleyiniz. Cevabınızın

gerekçelerini açıklayınız.

Tablo 39: 4. Soruya verilen cevapların gruplandırılmış halinin dağılımı

4. Soruya verilen cevaplar	TOPLAM	PAY
y=1 değeri için elde edilen tek değişkenli fonksiyonun limiti.	25	68%
İki değişkenli fonksiyon kullanılarak, iki farklı yoldan yaklaşım.	8	22%
Yorum yok.	3	8%
İki değişkenli fonksiyon kullanılarak, iki farklı eğri ailesi ile yaklaşım.	1	3%
Genel Toplam	37	100%

4. soruda 25 öğrenci (%68) fonksiyonda y=1 değeri elde edilen tek değişkenli fonksiyonun limitini bulmuştur. 9 öğrenci (%24) fonksiyonu iki değişkenli olarak değerlendirerek limit aramıştır.

$$4) f(x,y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} f(x,1) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x^2 + 1}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 1}{x^2} = \infty$$

$$\lim_{y \rightarrow 1} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 1}{x^2} \right) = \lim_{y \rightarrow 1} \infty = \infty$$

Limit var ve ∞ 'dir.

4-) $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x^2}$

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} f(x,y)$ için limit?

$x=my$ için

$f(x,y) = \frac{m^2y^2+y^2}{m^2y^2} = \frac{m^2+1}{m^2}$

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} f(x,y) = \frac{m^2+1}{m^2}$

$y=mx$

$f(x,y) = \frac{x^2+m^2x^2}{x^2} = 1+m^2 \Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} f(x,y) = 1+m^2$

m değerleri değişeceğinden eşit olamaz limit yok

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 1} \frac{x^2+y^2}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+1}{x^2} = \infty$

$\lim_{y \rightarrow 1} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+y^2}{x^2} \right) = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{x^2+1}{x^2} = \infty$

Sonsuz

Şekil 30: 4. Soruya verilen cevaplardan birkaç örnek

4.2.3. Yarı Yapılandırılmış Görüşme Sonuçları

Bu çalışmada adaylarla yürütülen bilişsel düzey belirleme testleri ve araştırmacının derslerde yapmış olduğu gözlemler sonucunda elde edilen veriler ışığında kavram imajlarının daha derin bir şekilde irdelenmesine ihtiyaç duyulan ve öğrenme zorluğu çektiğine inanılan 6 adayla görüşmeler yapılmıştır. Adaylarla yapılan yarı yapılandırılmış görüşmelerin araştırmacı tarafından seçilmiş küçük bir kısmı aşağıdaki bölümde yer almakta olup, görüşmelerin tamamı Ek-6 da sunulmuştur. Ayrıca okuyucuya kolaylık sağlamak ve iki değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği hakkında adaylarla yapılan görüşmelerin içeriğinin daha iyi analiz edilebilmesi amacıyla adayların sorulara vermiş oldukları cevaplar gruplandırılarak tablo halinde özetlenmiştir.

4.2.3.1. Aday H.Y. İle Yapılan Görüşme Sonuçları

Araştırmacı: *Tek değişkenli fonksiyonlarda mı, yoksa çok değişkenli fonksiyonlarda mı limit bulmak daha zor?*

H.Y.: *Tek değişkenli fonksiyonlarda bir değerin hangi sayıya yaklaştığını tahmin etmek çok zor değildi. Tabi ki bulunması zor olan limit bulma problemleri de vardı ancak belirli işlemlerle sonucu bulmak mümkün oluyordu. Aynı şeyleri çok değişkenli fonksiyonlar için söylemek mümkün olmuyor. Tek değişkenli fonksiyonlarda sadece sayı doğrusu üzerinde çalışıyoruz, ancak örneğin üç değişkenli fonksiyonlar üzerinde limiti tahmin etmek çok zor, çünkü fonksiyonun şekli çok karmaşık.*

Araştırmacı: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right)$ ifadesinden ne anlıyorsunuz?

H.Y.: *Öncelikle $f(x, y)$ fonksiyonunda x 'ler sabit iken y 'leri 0'a yaklaşıyoruz. Ortaya çıkan fonksiyonda da x 'i 0'a yaklaştırarak limit değerini buluyoruz.*

Araştırmacı: $\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right)$ limiti hakkında ne düşünüyorsunuz?

H.Y.: *Burada da tam tersini yapıyoruz. Önce y 'leri sabit tutup, x 'leri 0'a yaklaşıyoruz. Daha sonra y 'ler için 0 noktasında limit alıyoruz.*

Araştırmacı: *Bu iki limit için sonuçların eşit çıkması durumunda ne yaparsınız, sonuçların eşit çıkmasının sizce bir anlamı var mı?*

H.Y.: *Var, eğer sonuçlar eşit çıkarsa, diyelim ki her iki limit için de sonuç a gibi bir sayı çıktı, o zaman, “her iki limit de eşit ve sonuç a ’dır” deriz.*

Araştırmacı: *Bu durumu tek değişkenli fonksiyonlarda hangi duruma benzetiyorsunuz?*

H.Y.: *Bu durum tek değişkenli fonksiyonlarda sağdan ve soldan limitlerin bulunmasına benziyor. Eğer limitler eşitse “limit vardır”, değilse “limit yoktur” diyoruz.*

4.2.3.2. Aday E.Ö. İle Yapılan Görüşme Sonuçları

Araştırmacı: *Eğri boyunca ya da doğru boyunca yaklaşmak ne demektir?*

E.Ö.: *şu anda limit hakkında mı konuşuyoruz?*

Araştırmacı: *Peki biz bir noktada fonksiyonun limitini araştırırken neden epsilon-delta tekniğini kullanıyoruz?*

E.Ö.: *Hesaplama kolaylığı sağladığı için. Bazı sorularda çözümleri bulmak daha kolay oluyor.*

Araştırmacı: *Epsilon-deltayı kullanmak hoşunuza gidiyor mu?*

E.Ö.: *Hayır gitmiyor. Bir sürü farklı simge var ve yapılanlar hep havada kalıyor. Ne yapıldığının pek farkında değiliz. Sorularda hep deltayı epsilon cinsinden bulmamız isteniyor, buluyoruz ama bunu neden yaptığımızı tam bilemiyoruz, o yüzden yapılanlar hep havada kalıyor.*

4.2.3.3. Aday N.B. İle Yapılan Görüşme Sonuçları

Araştırmacı: $g(x,y)=\frac{x-y+1}{x+y+1}$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasındaki limitini bulurken

kullandığınız çözüm yönteminizi anlatır mısınız?

N.B.: *Sanki burada limitin olmayacağını düşünüyorum o yüzden, önce y yerine $y=mx$ yazarım. Sonra sonuca bakarım. Bir de y yerine $y=mx^3$ yazarım. Eğer limitler farklı çıkarsa limit yoktur derim. Yani limitin olmadığını böylece göstermiş olurum.*

Araştırmacı: *Tamam, bu soruya tekrar döneceğiz ama önce şunu sormak istiyorum. y -değişkeni yerine neden $y=mx$ koyuyorsun ve burada m 'nin ne gibi bir etkisi var?*

N.B.: *Burada $y=x$ olur, $y=2x$ olur... yani ben bu şekilde genelleme yapmış oluyorum.*

Araştırmacı: *Peki, limitin olmadığını göstermek için sadece $y=mx$ değişken değişimini kullanmak yeterli olmuyor mu? Bu şekilde limit alındığında sonucun ne çıkmasını bekliyorsunuz?*

N.B.: *Ha evet hocam sonuçta sadece m 'ye bağlı bir değer kalırsa bu bize limitin olmadığını göstermek için yeterli, çünkü m 'ler keyfi değişkenler olduğu için sonuçta limitler de değişmiş olacak.*

Araştırmacı: *Tamam o zaman, soruya dönecek olursak; sen bu yöntemi kullanırsın. Eğer sonuç m ye bağlı çıkarsa limitin olmadığını söylersin. Ama eğer sonuç m 'den bağımsız çıkarsa ne yaparsın?*

N.B.: *O zaman diyelim ki limitin değeri 1 çıktı, ikinci durumu yani $y = mx^3$ değişken değişimini yaparım ve eğer bu durumda da sonuç 1 çıkarsa limit değeri 1'dir derim. Ama emin değilim. O zaman sezgisel olarak limit değerini 1 bulduk diyelim, şimdi de epsilon-delta tekniğiyle bu sonucun doğru olup olmadığını kontrol ederim.*

4.2.3.4. Aday A.S. İle Yapılan Görüşme Sonuçları

Araştırmacı: *Limiti bulmak için fonksiyonun grafiğini zihinde canlandırmak şart mıdır?*

A.S.: *Ben genellikle fonksiyonunun grafiğine bakarak limite bakarım.*

Araştırmacı: *Peki, örneğin $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ fonksiyonun $(0,0)$ noktasındaki limiti bulmak için neler yaparsınız?*

A.S.: *Sessiz.*

Araştırmacı: Bu fonksiyon tek değişkenli olsaydı, limiti nasıl bulurdun?

A.S.: Önce sağdan ve soldan yaklaştırdım. Büyük bir ihtimalle ikisi de aynı sayıya yaklaşıacaktır. Dolayısıyla limit çıkan sayı olacaktır.

Araştırmacı: $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasındaki limitini bulunuz.

A.S.: Öncelikle fonksiyonun $(0,0)$ noktasında tanımsız olduğunu görebiliyorum ama limiti bulabileceğimi sanmıyorum.

4.2.3.5. Aday E.D. İle Yapılan Görüşme Sonuçları

Araştırmacı: Şimdi aşağıdaki soruyu birlikte ele alalım. Öncelikle çözmeye a şikkından başlayalım.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

fonksiyonu veriliyor.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x,y) \right)$ ve $\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x,y) \right)$ limitlerini hesaplayınız.
- $y=2x$ doğrusu boyunca $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ limitini hesaplayınız.
- f fonksiyonunun $(0,0)$ noktasında limiti var mıdır?

E.D.: $\frac{0}{x^2} = 0$ olduğu için sonuç sıfırdır. Öbür limit için de aynı sonucu elde ederiz.

Araştırmacı: Limiti için ne dersiniz?

E.D.: *O halde limit 0 demektir, çünkü sağdan ve soldan limit değerleri aynıdır.*

4.2.3.6. Aday E.C. İle Yapılan Görüşme Sonuçları

Araştırmacı: *Sizce tek değişkenli fonksiyonlar için mi, yoksa çok değişkenli fonksiyonlar için mi limiti bulmak daha kolay?*

E. C.: *Tek değişkenli fonksiyonlarda limiti bulmak daha kolay.*

Araştırmacı: *Neden öyle?*

E. C.: *Bu zamana kadar, lisede olsun, dershanede olsun hep tek değişkenli fonksiyonlarla uğraştık. Örneğin bir $y=f(x)$ tek değişkenli fonksiyonu için, fonksiyonun grafiğini çizmek ve bu grafik üzerinden yorum yapmak kolay. Ama iki değişkenli fonksiyonların grafiğini üç boyutlu uzayda zihinde canlandırması daha zor. Belki bazı kalıplaşmış işlemlerle limitleri bulunabiliyor ama fonksiyonun grafiğini zihinde canlandıramıyoruz.*

Araştırmacı: *Eğri boyunca ya da doğru boyunca yaklaşmak ne demektir?*

E. C.: *Limiti aradığımız noktadan geçen eğriler boyunca limit aramaktır.*

Araştırmacı: $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasındaki limitini bulunuz.

E. C.: *Burada fonksiyon $(0,0)$ noktasında tanımsız olduğu için, fonksiyonu bu durumdan kurtarmak için dönüşümler yapmak gerekir. Örneğin kutupsal koordinatları kullanabilirim.*

Araştırmacı: $y = x^2$ ile yaklaşmak ne anlama geliyor?

E. C.: *$(0,0)$ noktasından geçen $y = x^2$ eğrisini ifade ediyor.*

4.2.3.7. Yarı Yapılandırılmış Görüşme Sonuçlarının Özeti

Bu kısımda, iki değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği hakkında adaylarla yapılan görüşmelerin içeriğinin daha iyi analiz edilebilmesi için mülakatlarda adaylara yöneltilen tüm sorular ve adayların sorulara vermiş oldukları cevaplar gruplandırılarak tablo halinde özetlenmiştir.

Tablo 40: Adaylar H.Y., E.Ö. ve N.B. ile yapılan yarı yapılandırılmış görüşmelerin özet tablosu

N O	GÖRÜŞME SONUÇLARI	H.Y.	E.Ö.	N.B.
1	<i>Tek değişkenli ve çok değişkenli fonksiyonlarda limit ve süreklilik</i>	Tek değişkenli fonksiyonların limitini bulurken bazı kalıp işlemlerden faydalandığını ancak çok değişkenli fonksiyonlarda böyle bir şeyin mümkün olmadığını için çok değişkenli fonksiyonların limitini bulmanın daha zor olduğunu söyledi. İki değişkenli bir fonksiyonun grafiği üzerinden limit ve süreklilik hakkında doğru yorumlar yapıyor.	Tek değişkenli fonksiyonların sürekliliğini incelerken grafiğin bir noktasında bir boşluk olup olmadığına bakarak karar veriyor. Ancak aynı düşüncelerle çok değişkenli fonksiyonların grafiğine bakarak sürekliliği hakkında fikir yürütemiyor, çünkü şekilleri çok karışık buluyor.	Tek değişkenli fonksiyonlarda limitin epsilon-delta tanımını anlamının daha kolay, iki değişkenli fonksiyonlarda ise dairesel bölgeyi ya da komşuluğu anlamının daha zor olduğunu belirtti. Ayrıca limiti bulurken epsilon-delta tanımı yerine daha çok $y=x$ gibi doğrularla yaklaşıldığını söyledi.
2	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right)$ ve $\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right)$ ifadeleri hakkında yorum.	Eğer sonuçlar a gibi bir sayıya eşitse sonucu a kabul ediyor. Bu durumu tek değişkenli fonksiyonlarda sağdan ve soldan limitlerin bulunmasına benzetiyor.		
3	<i>Eğri boyunca ya da doğru boyunca yaklaşmak ne demektir?</i>		Ne hakkında konuştuğumuzu anlamadı.	

N O	GÖRÜŞME SONUÇLARI	H.Y.	E.Ö.	N.B.
4	<i>Epsilon-deltayı tekniği</i>		Epsilon-deltayı tekniğinde birbirinden farklı birçok simge olduğunu belirterek, bu yöntemle yapılanların havada kaldığını düşünüyor. Çok değişkenli fonksiyonlarda limiti bulmak için bu tekniği hiç kullanmadıklarını savundu.	Epsilon-delta tekniğini limitin ne olduğunu bulmak için değil, tahmin edilen bir limit değerinin aranan değer olup olmadığını ispatlamak için kullandığını söyledi.

Tablo 41: Adaylar A.S., E.D. ve E.C. ile yapılan yarı yapılandırılmış görüşmelerin özet tablosu

NO	GÖRÜŞME SONUÇLARI	A.S.	E.D.	E.C.
1	<i>Tek değişkenli ve çok değişkenli fonksiyonlarda limit ve süreklilik</i>	İki değişkenli fonksiyonun sadece cebirsel ifadesi verildiğinde limiti bulmak için ne yapması gerektiğini kafasında tam oturtamamış. Yine de bunun için kutupsal koordinatları kullanmanın en uygun yol olduğunu düşünüyor ancak bu yöntemle de her fonksiyonda başarılı olunamadığını söyledi.	Limit bulmak için en uygun yolun epsilon-delta tekniğinin olduğunu söyledi. Ancak bu yöntemi kullanmanın iki değişkenli fonksiyonlarda zor olmasından dolayı, çok değişkenli fonksiyonların limiti için diğer yöntemlere başvurulduğunu belirtti.	Tek değişkenli fonksiyonlar için limit bulmanın, liseden beri tanıdık olduğu için kolay olduğunu söyledi. Ayrıca çok değişkenli fonksiyonların grafiklerinin zihinde canlandırılmasının zor olmasından dolayı, limiti sezgisel olarak tayin etmenin mümkün olmadığını belirtti.
2	Grafiği verilen tek değişkenli ve iki değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği hakkında yorum.	İki değişkenli fonksiyonların limitini ancak fonksiyonun grafiği üzerinden yorum yaparak bulabiliyor.	Grafikler üzerinden sağlıklı yorumlar yapabiliyor.	

NO	GÖRÜŞME SONUÇLARI	A.S.	E.D.	E.C.
3	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) \text{ ve } \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) \text{ ifadeleri}$ <i>hakkında yorum.</i>		Sağ ve sol limitlerin her ikisinde de 0 çıktığından limitin 0'a eşit olduğunu söyledi.	
4	<i>Eğri boyunca ya da doğru boyunca yaklaşmak ne demektir?</i>			Limitin arandığı noktadan geçen eğriler boyunca limit aramak olduğunu söyledi.

4.2.4. Envanter çalışması bulguları

Bu kısımda iki değişkenli reel fonksiyonlardaki limit ve süreklilik kavramları hakkında öğrencilerin edinmesi gereken asgari kazanımlar belirlenerek 10 maddelik bir envanter ortaya çıkartılmıştır. Çalışmada Bölüm 4.1.3'de envanter çalışmasının yapıldığı 13 öğrencinin bu bölümde konu hakkında elde edilen araştırma verileri (ön test, bilişsel düzey belirleme testleri ve yarı yapılandırılmış görüşmeler) tekrar incelenerek, her öğrenciye belirlenen konular hakkında edindiği bilişsel seviyenin belirlenmesi amacıyla 1'den 5'e kadar değerlendirme puanı verilmiştir. Bu şekilde hem öğrencinin konu hakkındaki bilişsel seviyesi ölçülmüş, hem de konu hakkındaki her bir kazanımın öğrencilerin geneli tarafından algılanma durumu tespit edilmiş olacaktır.

Tablo 42: İki değişkenli reel fonksiyonlardaki limit ve süreklilik kavramları hakkında kazanım envanteri

K O D	Kriterler	B.K.	I.TÜ	A.R. K.	E.V.	M.Ö	E.D	E.C	M.T	H.Y	E.Ö	A.S.	A.K.	G.K	ORTALA MA
A	İki değişkenli fonksiyonların grafiklerini çizebilir, üzerinden yorum yapabilir.	3	3	3	3	2	3	3	3	2	3	3	3	3	2,85
B	Limitin geometrik gösterimi ile epsilon-delta gösterimi arasında ilişki kurarak, ikisi arasında bir fonksiyon tanımlar.	3	2	3	3	2	4	4	3	4	2	3	3	4	3,08

K O D	Kriterler	B.K.	I.TÜ	A.R. K.	E.V.	M.Ö	E.D	E.C	M.T	H.Y	E.Ö	A.S.	A.K.	G.K	ORTALA MA
C	Fonksiyonun limit noktasında tanımlı olup olmaması ve limit değeri ile fonksiyonun o noktadaki değeri arasındaki ilişkiyi belirtir.	4	3	3	3	2	3	3	3	4	3	3	3	4	3,15
D	Fonksiyonun grafiğine bakarak bir noktadaki limit değerini tahmin eder.	3	3	3	2	3	4	4	2	3	3	3	4	3	3,08
E	Limitin epsilon-delta tanımında kullanılan komşulukların ne anlama geldiğini bilir.	3	2	2	3	2	4	4	4	4	3	2	3	3	3,00
F	Limitin arandığı noktanın fonksiyonun yığılma noktası olması gerektiğini bilir.	2	2	3	2	3	4	4	4	4	2	2	3	3	2,92
G	Delta'nın Epsilon'a ye bağlı bir değer olduğunu bilir.	3	3	3	2	3	3	4	3	4	3	3	3	2	3,00
H	Fonksiyonun belirli bir noktada sürekli olup olmadığını tespit eder.	3	3	3	2	3	3	4	4	4	4	3	3	3	3,23
I	Limit değerinin yaklaşma şeklinden bağımsız olduğunu bilir.	3	2	3	3	3	4	5	2	4	3	2	3	3	3,08
İ	Limit değerini bulmak için fonksiyonun kutupsal koordinatlardaki ifadesini kullanır.	3	2	2	2	2	5	5	2	3	4	2	3	2	2,85
ORTALAMALAR		3,0	2,5	2,8	2,5	2,5	3,7	4,0	3,0	3,6	3,0	2,6	3,1	3,0	

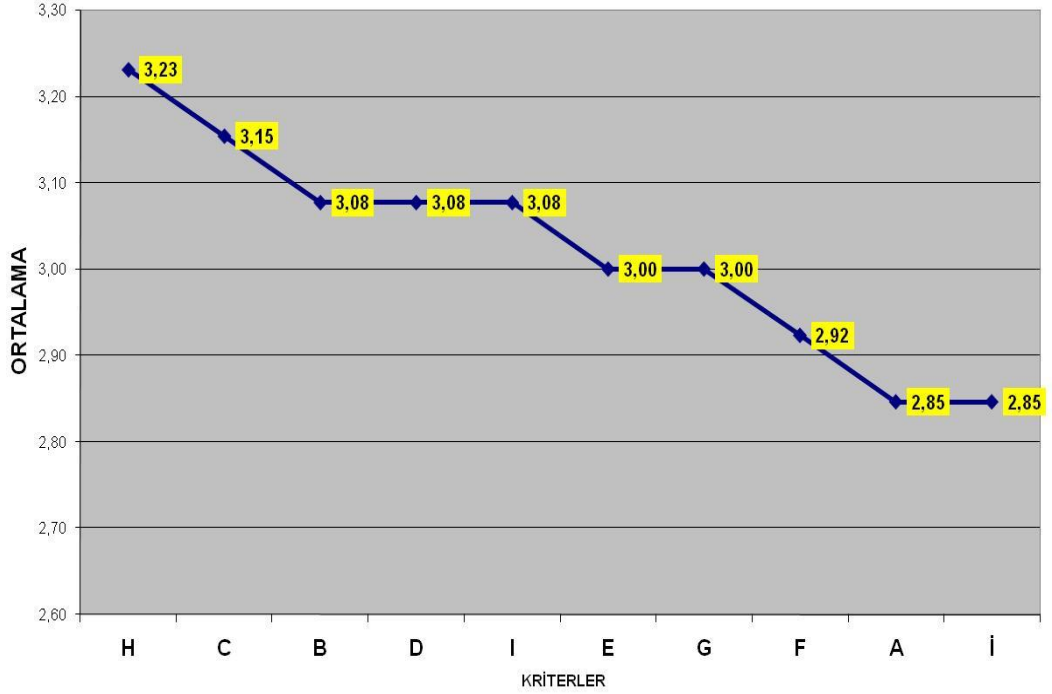
DEĞERLENDİRMELER	ÇOK KÖTÜ	KÖTÜ	ORTA	İYİ	ÇOK İYİ
	1	2	3	4	5

Tablo 42 dikkatle incelendiğinde;

- Her bir öğrenci için ayrı değerlendirme yapıldığı,
- Her öğrenciye ait, sonuç olarak değerlendirilebilecek kişisel ortalamaların olduğu,
- Her kritere ait öğrenci ortalamalarının bulunduğu

görülebılır.

Aşağıda elde edilen bulgular Tablo 42 incelenerek ortaya çıkartılmıştır.



Grafik 2: Kriterlerin Ortalaması

Grafik 2'ye göre en yüksek ortalamaya sahip ilk 3 kriter aşağıda verilmiştir.

Tablo 43: En yüksek ortalamaya sahip ilk 3 kriter

KOD	Kriterler	ORTALAMA
H	Fonksiyonun belirli bir noktada sürekli olup olmadığını tespit eder.	3,23
C	Fonksiyonun limit noktasında tanımlı olup olmaması ve limit değeri ile fonksiyonun o noktadaki değeri arasındaki ilişkiyi belirtir.	3,15
B	Limitin geometrik gösterimi ile epsilon-delta gösterimi arasında ilişki kurarak, ikisi arasında bir fonksiyon tanımlar.	3,08

Grafik 2'ye göre en düşük ortalamaya sahip 3 kriter aşağıda verilmiştir.

Tablo 44: En düşük ortalamaya sahip son 3 kriter

KOD	Kriterler	ORTALAMA
F	Limitin arandığı noktanın fonksiyonun yığılma noktası olması gerektiğini bilir.	2,92
A	İki değişkenli fonksiyonların grafiklerini çizebilir, üzerinden yorum yapabilir.	2,85
İ	Limit değerini bulmak için fonksiyonun kutupsal koordinatlardaki ifadesini kullanır.	2,85

4.3. Adayların tek değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği ile ilgili yeterlilikleri ile aynı adayların çok değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliğine ilişkin yeterliliklerinin kıyaslanması

Bu bölümde Bölüm 4.1.3 ve Bölüm 4.2.4' te yapılan envanter çalışmalarında birbiriyle örtüşen 9 kriter ele alınarak, adayların tek değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği ile ilgili yeterlilikleri ile aynı adayların çok değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliğine ilişkin yeterlilikleri kıyaslanmıştır. Birbiriyle örtüşen her yeterlilik arasında bir ilişki olup olmadığı, yeterlilikler aralarındaki korelasyon katsayısının hesaplanması ile tespit edilmiştir. En az iki değişken arasındaki ilişkinin incelenmesine “Korelasyon” denir (Çil,2002, s.267). Burada bulunan korelasyon katsayılarının (r) anlamlı olup olmadığını tespit etmek için “t” testi uygulanmıştır.

Hesaplanan korelasyon katsayısının anlamlı ve güvenilir bir sonuç verip vermemesi, bu katsayının anlamlılığının ölçülmesi ile mümkündür. Bu anlamlılık, bir sonuç testi olan “t testi” ile yapılabilir (Türkbil, 1981, s.164).

Bu kıyaslama aynı zamanda adayların genelleme ve soyutlama yeteneklerinin ölçümlemesi açısından da anlamlı olacaktır. Zira bu bölümde ele alınan ve birbiriyle örtüşen bilişsel yeterlilikler, adayların tek değişkenli fonksiyonların limit ve sürekliliğinden, çok değişkenli fonksiyonların limit ve sürekliliğine geçiş sürecinde sergiledikleri genelleme ve soyutlama yeteneklerinin ölçümlemesine imkân sağlamaktadır.

Bölüm 2.3. de açıklandığı üzere genellemede sadece anlaşılmış süreçlerin bir genişlemesi yapılırken, soyutlamada yoğun bir zihinsel reorganizasyon (yeniden şekillenme) gerekir.

Öğrencilerin bilişsel yapısını ve fikirlerini değiştirmeden sadece genişlemelerle yapılan genellemeye “expansive (genişleyerek) genelleme”, öte yandan var olan bilişsel yapıyı yeniden yapılandırmayı gerektiren genellemeye ise “reconstructive (yeniden yapılandırılmış) genelleme” denir. (Harel ve Tall,1989)

Expansive (genişleyerek) genelleme öğrencinin zihnini, bilişsel yapıyı değiştirmeden soyutlama yapmaya götürür. Öğrencilerin yürüttükleri bilişsel genişleme eylemlerinin kendilerini bir genellemeye götürdüğünü **fark etmeleri**, bir soyutlama işlemidir, bu türden soyutlamalara generic (çıkarımsal) soyutlama denir. Generic soyutlama daha çok matematiksel uygulamalarla uğraşanlar tarafından yürütülen bir zihinsel faaliyettir. Formal (yapısal) soyutlama ise generic (çıkarımsal) soyutlamanın bir sonraki aşaması olup, bilişsel yeniden yapılanma gerektirir. (Harel ve Tall,1989)

Yürütülen çalışmalar sonucu elde edilen adayların bilişsel yapılarına ait envanterlerde birbiriyle örtüşen 9 kriter, aynı zamanda adayların genelleme ve soyutlama yapma yeteneklerini ortaya koyabilmek için de kullanılmıştır. Araştırmada adayların genelleme ve soyutlama yapma yetenekleri incelenirken Harel ve Tall’un (1989) “genelleme” ve soyutlama” kavramları hakkında yaptıkları tanımlamalar metodolojik bir araç olarak kullanılmıştır.

Tablo 45: İlk kritere ait kıyas tablosu

Türü	Kriterler	Değişken	B.K.	İ.TÜ.	A.R.K.	E.V.	M.Ö.	E.D.	E.C.	M.T.	H.Y.	E.Ö.	A.S.	A.K.	G.K.	ORTALAMA	r
Tek Değişkenli Fonksiyonlar	Fonksiyonun limit noktasında tanımlı olup olmaması ve limit değeri ile fonksiyonun o noktadaki değeri arasındaki ilişkiyi belirtir.	Xi	4	4	4	4	3	3	4	4	4	4	4	3	4	3,77	0,5
Çok Değişkenli Fonksiyonlar	Fonksiyonun limit noktasında tanımlı olup olmaması ve limit değeri ile fonksiyonun o noktadaki değeri arasındaki ilişkiyi belirtir.	Yi	4	3	3	3	2	3	3	3	4	3	3	3	4	3,15	

Tablo 45’e göre adayların “Fonksiyonun limit noktasında tanımlı olup olmaması ve limit değeri ile fonksiyonun o noktadaki değeri arasındaki ilişkiyi belirtir.” şeklinde ifade edilen yeterlilikleri tek değişkenli ve çok değişkenli fonksiyonlar için bir arada değerlendirilmiştir.

Buna göre tabloda r ile ifade edilen korelasyon katsayısı 0,5 olarak ölçülmüştür. Bu değer t-testine göre %90 güvenilrlikle doğrudur ($n=13$ olmak üzere 11 serbestlik derecesine göre $t_{tab.}=1,796$ ve $t_{hes.}=1,92$ olup, $t_{tab.} < t_{hes}$ dir). Bu değer, iki veri arasında orta düzeyde, anlamlı pozitif bir ilişki olduğunu gösterir, yani adayların tek değişkenli fonksiyonların limit noktasında tanımlı olup olmamasını ve limit değeri ile fonksiyonun o noktadaki değeri arasındaki ilişkiyi görüp görememeleri ile aynı yeterliliği çok değişkenli fonksiyonlar için göstermesi arasında zayıfa yakın bir ilişki bulunmaktadır.

Adaylar, verilen tek değişkenli bir fonksiyonun tanımsız olduğu bir noktada da limite sahip olabileceği konusunda iyi bir ortalamaya sahip iken, aynı konuda çok değişkenli fonksiyonlar için daha düşük bir ortalamaya sahiptirler. Tablo 45 te verilen iki yeterlilik arasında zayıfa yakın bir ilişki söz konusu olduğu için adayların tek değişkenli fonksiyonlardan yola çıkarak bir genelleme sonucu çok değişkenli fonksiyonların tanımsız olduğu bir noktada da limite sahip olabileceği gerçeğine ulaşmış olmaları ihtimali biraz uzaktır. Bu yüzden aynı zamanda adayların konu

hakkında soyutlama yapamadıkları ve genelleme yaparak konu hakkında fikir geliştiren adayların, bilişsel yapılarını ve fikirlerini değiştirmeden expansive (genişleyerek) bir genelleme yaptıkları söylenebilir.

Tablo 46: İkinci kritere ait kıyas tablosu

Türü	Kriterler	Değişken	B.K.	İ.T.Ü.	A.R.K.	E.V.	M.Ö.	E.D.	E.C.	M.T.	H.Y.	E.Ö.	A.S.	A.K.	G.K.	ORTALAMA	r
Tek Değişkenli Fonksiyonlar	Fonksiyonun grafiğine bakarak bir noktadaki limit değerini tahmin eder.	Xi	5	5	5	4	5	5	5	4	5	5	5	5	5	4,85	0,75
Çok Değişkenli Fonksiyonlar	Fonksiyonun grafiğine bakarak bir noktadaki limit değerini tahmin eder.	Yi	3	3	3	2	3	4	4	2	3	3	3	4	3	3,08	

Bu tabloda (Tablo 46) adayların tek değişkenli fonksiyonların grafiğine bakarak bir noktadaki limit değerini tahmin etme ve çok değişkenli fonksiyonların grafiğine bakarak bir noktadaki limit değerini tahmin etme yeterlilikleri kıyaslanmıştır. İki veri arasında korelasyon katsayısı $r=.75$ olarak ölçülmüş olup, iki değişken arasında güçlü bir ilişki olduğu söylenebilir. Bu değer t-testine göre %90 güvenilirlilikle doğrudur ($n=13$ olmak üzere 11 serbestlik derecesine göre $t_{tab.}=1,796$ ve $t_{hes.}=3,71$ olup, $t_{tab.} < t_{hes}$ dir).

Bu yeterlik konusunda çok değişkenli fonksiyonlar ve tek değişkenli fonksiyonlar için aday ortalamaları arasında oldukça büyük bir fark gözlemlenmiştir. Adaylar iki değişkenli fonksiyonların grafiğine bakarak bir noktadaki limit değerini tahmin etme konusunda düşük bir ortalama sahiptirler. Bu duruma adayların iki değişkenli fonksiyonların grafiğini okuma konusundaki yetersizlikleri sebep gösterilebilir.

Tablo 46 ya göre verilen iki yeterlilik arasında güçlü bir ilişki söz konusu olduğu için adayların tek değişkenli fonksiyonların grafiğine bakarak bir noktadaki limit değerini tahmin etme yeterliliklerinden yola çıkarak bir genelleme sonucu çok değişkenli fonksiyonların grafiğine bakarak bir noktadaki limit değerini tahmin etme yeterliliği sergiledikleri düşünülebilir. Bu yüzden adayların burada expansive (genişleyerek) bir genelleme yaptıkları söylenebilir ve adaylar yaptıkları bu genellenmenin farkında oldukları için de burada bir generic (çıkarımsal) soyutlamadan bahsedilebilir.

Tablo 47: Üçüncü kritere ait kıyas tablosu

Türü	Kriterler	Değişken	B.K.	İ.TÜ.	AR.K.	E.V.	M.Ö.	E.D.	E.C.	M.T.	H.Y.	E.Ö.	A.S.	A.K.	G.K.	ORTALAMA	r
Tek Değişkenli Fonksiyonlar	Limitin geometrik gösterimi ile epsilon-delta gösterimi arasında ilişki kurarak, ikisi arasında bir fonksiyon tanımlar.	Xi	3	3	4	4	4	4	4	4	4	3	4	3	4	3,69	0,53
Çok Değişkenli Fonksiyonlar	Limitin geometrik gösterimi ile epsilon-delta gösterimi arasında ilişki kurarak, ikisi arasında bir fonksiyon tanımlar.	Yi	3	2	3	3	2	4	4	3	4	2	3	3	4	3,08	

Bu tabloda adayların “Limitin geometrik gösterimi ile epsilon-delta gösterimi arasında ilişki kurarak, ikisi arasında bir fonksiyon tanımlar.” şeklinde ifade edilen yeterlilik, tek değişkenli ve çok değişkenli fonksiyonlar için kıyaslanmıştır. Burada korelasyon katsayısı $r=0,53$ olarak hesaplanmıştır. Bulunan bu korelasyon katsayısı t-testine göre %90 güvenilirlikle doğrudur ($n=13$ olmak üzere 11 serbestlik derecesine göre $t_{tab.}=1,796$ ve $t_{hes.}=2,06$ olup, $t_{tab.} < t_{hes.}$ dir). Burada adayların tek değişkenli fonksiyonlarda ve çok değişkenli fonksiyonlarda limitin geometrik gösterimi ile epsilon-delta gösterimi arasındaki ilişki kurma ve ikisi arasında bir fonksiyon tanımlama bilgileri arasında pozitif yönlü, orta seviyede güçlü bir ilişki vardır. Dolayısıyla adaylar çok değişkenli fonksiyonların limiti için bu bilgiyi kullanırken, tek

değişkenli fonksiyonların limiti konusunda edindikleri bilgilerden faydalandıkları söylenebilir. Adaylar, tek değişkenli fonksiyonlarda limitin geometrik gösterimi ile epsilon-delta gösterimi arasındaki ilişki kurma ve ikisi arasında bir fonksiyon tanımlama bilgisini, bilişsel yapılarını ve fikirlerini değiştirmeden expansive (genişleyerek) bir genelleme yardımı ile iki değişkenli fonksiyonlara aktarabilmişlerdir.

Ancak adaylar, çok değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği konusunda epsilon-delta tekniğini çok az kullandıklarını ve epsilon-delta mantığını 3-boyutlu grafikler üzerinden anlamalarının daha zor olduğunu ifade etmişlerdir. Bu durumu yukarıdaki tabloda yer alan ortalamalara bakarak da görmek mümkündür. Adayların bu konuda hem tek, hem de iki değişkenli fonksiyonlar için orta seviyede generic (çıkarımsal) soyutlama gerçekleştirdikleri söylenebilir, çünkü her iki yeterlilik ortalaması da 3 seviyelerinde seyretmiştir.

Tablo 48: Dördüncü kritere ait kıyas tablosu

Türü	Kriterler	Değişken	B.K.	İ.TÜ.	A.R.K.	E.V.	M.Ö.	E.D.	E.C.	M.T.	H.Y.	E.Ö.	A.S.	A.K.	G.K.	ORTALAMA	r
Tek Değişkenli Fonksiyonlar	Limitin epsilon-delta tanımında kullanılan komşulukların ne anlama geldiğini bilir.	Xi	2	2	3	3	2	4	4	4	3	3	4	3	4	3,15	0,51
Çok Değişkenli Fonksiyonlar	Limitin epsilon-delta tanımında kullanılan komşulukların ne anlama geldiğini bilir.	Yi	3	2	2	3	2	4	4	4	4	3	2	3	3	3,00	

Tablo 48’de limitin epsilon-delta tanımında kullanılan komşulukların ne anlama geldiğini ne kadar bildiği ve tek değişkenli fonksiyonlar konusunda bildiklerinin çok değişkenli fonksiyonlar konusunda bildikleri ile bir ilişkisi olup olmadığı gösterilmiştir. Burada korelasyon katsayısı $r=0,51$ olarak hesaplanmıştır. Bu değer t-testine göre %90 güvenilirlikle doğrudur ($n=13$ olmak üzere 11 serbestlik derecesine göre $t_{tab.}=1,796$ ve $t_{hes.}=1,96$ olup, $t_{tab.} < t_{hes}$ dir). Buna göre bu iki değişken arasında orta dereceli, pozitif bir

ilişki olduğu söylenebilir. Öğrencilerin en çok zorluk çektikleri konulardan biri de “Limitin epsilon-delta tanımında kullanılan komşulukların ne anlama geldiği” konusudur. Bunu tablodan da gözlemlemek mümkündür, zira her iki değişken için de ortalamalar düşük ve birbirine yakın çıkmıştır. Adayların bu konuda bilişsel seviyeleri düşük olduğu için konu hakkında orta seviyede generic (çıkarımsal) soyutlama yapabildikleri düşünülebilir. Adayların tek değişkenli fonksiyonlar konusunda az bilen az bildiğini, çok bilen çok bildiğini expansive (genişleyerek) genelleme ile iki değişkenli fonksiyonlara aktardıkları söylenebilir.

Tablo 49: Beşinci kritere ait kıyas tablosu

Türü	Kriterler	Değişken	B.K.	İ.TÜ.	AR.K.	E.V.	M.Ö.	E.D.	E.C.	M.T.	H.Y.	E.Ö.	A.S.	A.K.	G.K.	ORTALAMA	r
Tek Değişkenli Fonksiyonlar	Limitin arandığı noktanın fonksiyonun yığılma noktası olması gerektiğini bilir.	Xi	3	2	4	3	3	3	4	4	4	4	3	3	4	3,38	0,5
Çok Değişkenli Fonksiyonlar	Limitin arandığı noktanın fonksiyonun yığılma noktası olması gerektiğini bilir.	Yi	2	2	3	2	3	4	4	4	4	2	2	3	3	2,92	

Bu tabloda (Tablo 49) adayların tek değişkenli ve çok değişkenli fonksiyonlar için limitin arandığı noktanın fonksiyonun yığılma noktası olması gerektiği bilgisi ölçülmüştür. Burada korelasyon katsayısı $r=0,5$ olarak tespit edilmiştir. Bu değer t-testine göre %90 güvenilirlikle doğrudur ($n=13$ olmak üzere 11 serbestlik derecesine göre $t_{tab.}=1,796$ ve $t_{hes.}=1,93$ olup, $t_{tab.} < t_{hes.}$ dir). Buna göre bu iki veri arasında orta düzeyde, pozitif bir ilişki söz konusudur. Bu konunun limitin anlaşılması konusunda bir mihenk taşı olması hasebiyle, öğrenciler tarafından çok iyi biliniyor olması gerekliliği malumdur. Ancak adaylar bu konuda düşük sayılabilecek ortalamalara sahiptir ve çok değişkenli fonksiyonlarda elde edilen ortalama, tek değişkenli fonksiyonlarda elde edilen ortalamadan daha düşüktür.

Burada da adayların bu konuda bilişsel seviyeleri düşük olduğu için konu hakkında soyutlama yapamadıkları söylenebilir. Adayların tek değişkenli fonksiyonlar konusunda az bilen az bildiğini, çok bilen çok bildiğini expansive (genişleyerek) genelleme ile iki değişkenli fonksiyonlara aktardıkları söylenebilir.

Tablo 50: Altıncı kritere ait kıyas tablosu

Türü	Kriterler	Değişken	B.K.	İ.T.Ü.	A.R.K.	E.V.	M.Ö.	E.D.	E.C.	M.T.	H.Y.	E.Ö.	A.S.	A.K.	G.K.	ORTALAMA	r
Tek Değişkenli Fonksiyonlar	Delta'nın Epsilon'a ye bağlı bir değer olduğunu bilir.	Xi	4	4	4	3	4	3	4	4	4	3	4	4	3	3,69	0,6
Çok Değişkenli Fonksiyonlar	Delta'nın Epsilon'a ye bağlı bir değer olduğunu bilir.	Yi	3	3	3	2	3	3	4	3	4	3	3	3	2	3,00	

Tablo 50 ile adayların tek değişkenli ve çok değişkenli fonksiyonlar için limitin tespitinde kullanılan epsilon-delta tekniğinde Delta'nın Epsilon'a bağlı bir değer olduğunu bilip bilmedikleri ve bu iki bilgi arasında bir ilişki olup olmadığı araştırılmıştır. Burada korelasyon katsayısı $r=0,60$ olarak tespit edilmiştir. Bu değer t-testine göre %90 güvenilirlikle doğrudur ($n=13$ olmak üzere 11 serbestlik derecesine göre $t_{tab.}=1,796$ ve $t_{hes.}=2,49$ olup, $t_{tab.} < t_{hes.}$ dir). Bu demektir ki bu iki veri arasında orta seviyede, pozitif bir ilişki söz konusudur. Dolayısıyla adaylar bilişsel yapılarını ve fikirlerini değiştirmeden expansive (genişleyerek) genelleme ile iki değişkenli fonksiyonlar için Delta'nın Epsilon'a bağlı bir değer olması gerektiğini sezdikleri söylenebilir.

Bu konunun bilinmesi öğrencilerin epsilon-delta tekniğini neden kullanıldığının bilinmesi açısından önem arz etmektedir. Adaylar özellikle tek değişkenli fonksiyonlarda limitin varlığını göstermek amacıyla yürüttükler işlemler sonunda Delta'yı Epsilon'a bağlı bir değer olarak bulmak zorunda olduklarının farkındadırlar.

Adayların tek değişkenli fonksiyonlar için limitin tespitinde kullanılan epsilon-delta tekniğinde Delta'nın Epsilon'a bağlı bir değer olduğunu bilişsel olarak soyutlayabildikleri, ancak iki değişkenli fonksiyonlar için soyutlama konusunda daha az başarı gösterdikleri söylenebilir. Bu yüzden adayların tek değişkenli fonksiyonlar için bu bilgi hakkındaki sahip oldukları ortalama, çok değişkenli fonksiyonlara göre daha yüksektir.

Tablo 51: Yedinci kritere ait kıyas tablosu

Türü	Kriterler	Değişken	B.K.	İ.T.Ü.	A.R.K.	E.V.	M.Ö.	E.D.	E.C.	M.T.	H.Y.	E.Ö.	A.S.	A.K.	G.K.	ORTALAMA	r
Tek Değişkenli Fonksiyonlar	Bir fonksiyonun bir noktadaki limiti ile soldan limiti ve sağdan limiti arasındaki ilişkiyi belirtir.	Xi	5	5	5	5	4	5	5	4	5	5	4	5	5	4,77	0,49
Çok Değişkenli Fonksiyonlar	Limit değerinin yaklaşma şeklinden bağımsız olduğunu bilir.	Yi	3	2	3	3	3	4	5	2	4	3	2	3	3	3,08	

Bu tabloda (Tablo 51) adayların tek değişkenli fonksiyonlar için “bir fonksiyonun bir noktadaki limiti ile sağdan limiti ve soldan limiti arasındaki ilişki”yi belirtip belirtmediği ile çok değişkenli fonksiyonlar için “limit değerinin yaklaşma şeklinden bağımsız olduğu” bilgisi ve ikisi arasındaki ilişki incelenmiştir. Tek değişkenli fonksiyonların limitini tespit etmek için fonksiyonun sağ ve sol limitlerinin varlığı ve bu limitlerin eşitliği incelenir. Bu düşünce 3-boyutlu bir uzaya aktarılırsa, limitin aranan nokta etrafında yapılacak her türlü yaklaşım şeklinden bağımsız olması gerekir. Bu yüzden bu iki bilgi arasında bir ilişki söz konusudur ve bu çalışma ile bu ilişkinin adaylar tarafından idrak edilip edilmediği araştırılmıştır. İki değişken arasında korelasyon katsayısı tablodan da görüldüğü üzere $r=0,49$ olarak hesaplanmıştır. Bu değer t-testine göre %90 güvenilirlikle doğrudur ($n=13$ olmak üzere 11 serbestlik derecesine göre $t_{tab.}=1,796$ ve $t_{hes.}=1,87$ olup, $t_{tab.} < t_{hes}$ dir). Dolayısıyla bu iki değişken arasında pozitif yönde, zayıf bir ilişki vardır. Dolayısıyla adayların tek değişkenli fonksiyonlar için bildiklerini iki değişkenli fonksiyonlar için genelleştirdikleri

söylenemez. Bu türlü bir genellemede adaylar sahip oldukları bilişsel yapıyı yeniden yapılandıracakları için burada reconstructive (yeniden yapılandırılmış) genellemeden bahsetmek daha doğru olur.

Tek değişkenli fonksiyonlar için “bir fonksiyonun bir noktadaki limiti ile sağdan limiti ve soldan limiti arasındaki ilişki” konusunda adayların oldukça yüksek bir ortalamaya sahip oldukları gözlemlenmiştir. Adayların hemen hemen tamamı, özellikle grafiği verilen bir fonksiyonun limitini tespit etme konusunda limiti aranan noktada fonksiyonun sağ ve sol limitlerinin eşit olup olmadığına baktıklarını, eğer eşitse limitin var, değilse limitin olmadığını ifade etmişlerdir. Dolayısıyla adaylar bu konuyu tek değişkenli fonksiyonlar için bilişsel anlamda soyutlayabilmişlerdir. Ancak aynı düşünceyi çok değişkenli fonksiyonların grafiği üzerinden limitin tespiti için kullanırken bir takım sıkıntıların yaşandığı ve hataları yapıldığı görülmektedir. Zira bu konuda adayların çok değişkenli fonksiyonlar için sahip oldukları ortalama, tek değişkenli fonksiyonlar için sahip oldukları ortalamadan bir hayli düşük kalmıştır. Adayların çok değişkenli fonksiyonların limitinin tespitinde “limit değerinin yaklaşma şeklinden bağımsız olduğu” konusunu tam olarak soyutlayamadıkları gözlemlenmiştir. Adayların bu konuyu özümseyebilmeleri için konu hakkındaki bilişsel alt yapılarını yeniden yapılandırarak formal (yapısal) soyutlama yürütmeleri gerekmektedir.

Ayrıca adaylar iki değişkenli fonksiyonların limitini bulmak için kullanılan $\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y))$, $\lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y))$ sıralı limitleri bulma yöntemini adeta tek değişkenli fonksiyonlarda kullanılan sağ ve sol limitlerin bulunması gibi algılamışlardır ve iki değişkenli fonksiyonlarda limitin varlığı için iki farklı yaklaşım sonucu elde edilen limitlerin eşit olmasını yeterli görmekteydiler. Bu durum adayların bilişsel yapılarını değiştirme yoluna gitmeden expansive (genişleyerek) genelleme yürütmeyi tercih ettiklerini ortaya koymaktadır.

Tablo 52: Sekizinci kritere ait kıyas tablosu

Türü	Kriterler	Değişken	B.K.	İ.TÜ.	A.R.K.	E.V.	M.Ö.	E.D.	E.C.	M.T.	H.Y.	E.Ö.	A.S.	A.K.	G.K.	ORTALAMA	r
Tek Değişkenli Fonksiyonlar	Özel tanımlı fonksiyonların limitlerini bulur ve onlarla ilgili uygulamalar yapar.	Xi	3	3	4	3	4	4	4	4	4	5	4	4	3	3,77	0,43
Çok Değişkenli Fonksiyonlar	Limit değerini bulmak için fonksiyonun kutupsal koordinatlardaki ifadesini kullanır.	Yi	3	2	2	2	2	5	5	2	3	4	2	3	2	2,85	

Tablo 52’de ise adayların tek değişkenli fonksiyonlarda verilen özel tanımlı fonksiyonların limitlerini bulabilme yeterlilikleri ile çok değişkenli fonksiyonlarda limit değerini bulmak için fonksiyonun kutupsal koordinatlardaki ifadesini kullanabilme seviyeleri belirlenmeye çalışılmış ve bunlar arasında bir ilişki olup olmadığı araştırılmıştır. Burada korelasyon katsayısı $r=0,43$ olarak tespit edilmiştir, yani adayların bu iki konu hakkındaki bilgileri arasında pozitif yönlü ancak zayıf bir ilişki söz konusudur. Bu değer t-testine göre %80 güvenilirlilikle doğrudur ($n=13$ olmak üzere 11 serbestlik derecesine göre $t_{tab.}=1,363$ ve $t_{hes.}=1,58$ olup, $t_{tab.} < t_{hes.}$ dir). Adayların tek değişkenli fonksiyonlarda verilen özel tanımlı fonksiyonların limitlerini bulabilme yeterlilik ortalaması, çok değişkenli fonksiyonlarda limit değerini bulmak için fonksiyonun kutupsal koordinatlardaki ifadesini kullanabilme seviye ortalamasının bir hayli üzerinde gözükmemektedir. Bu da bize şunu göstermektedir; öğrenciler tek değişkenli özel fonksiyonların limitini bulma noktasında gösterdikleri esnek yaklaşım yöntemlerini kullanmadaki başarılarını çok değişkenli fonksiyonların limitini bulma noktasında gösteremiyorlar. Burada konu itibarıyla genelleme faaliyetinden bahsedilemez ancak adayların her iki durumda da formal (yapısal) soyutlama yapmış olmaları beklenir.

Adaylar tek değişkenli özel tanımlı fonksiyonların limitlerini bulma ve onlarla ilgili uygulamalar yapma yeterliliğini, fonksiyonlar hakkındaki bilişsel temellerini yeniden yapılandırarak formal (yapısal) soyutlama ile geliştirebileceklerdir. Aynı şekilde iki

değişkenli fonksiyonların limit değerini bulmak için fonksiyonun kutupsal koordinatlardaki ifadesini kullanabilme yeterliliğini adaylar, bilişsel temellerini yeniden yapılandırarak formal (yapısal) soyutlama ile geliştirebileceklerdir.

Tablo 53: Dokuzuncu kritere ait kıyas tablosu

Türü	Kriterler	Değişken	B.K.	İ.T.Ü.	AR.K.	E.V.	M.Ö.	E.D.	E.C.	M.T.	H.Y.	E.Ö.	A.S.	A.K.	G.K.	ORTALAMA	r
Tek Değişkenli Fonksiyonlar	Fonksiyonun belirli bir noktada sürekli olup olmadığını tespit eder.	X_i	4	4	4	4	3	4	4	5	4	5	4	4	5	4,15	0,39
Çok Değişkenli Fonksiyonlar	Fonksiyonun belirli bir noktada sürekli olup olmadığını tespit eder.	Y_i	3	3	3	2	3	3	4	4	4	4	3	3	3	3,23	

Bu tabloda (Tablo 53) ise tek değişkenli ve çok değişkenli fonksiyonların belirli bir noktada sürekli olup olmadığını tespit edebilme yeterlilikleri ölçülmüş ve bunlar arasında bir ilişki olup olmadığı araştırılmıştır. Adayların büyük bir çoğunluğunun, özellikle grafiği verilen tek değişkenli bir fonksiyonun bir noktada sürekli olup olmadığını hemen söyleyebildikleri, çok değişkenli fonksiyonlar için verdikleri cevaplarda ise tereddütler yaşadıkları ve cevaplarından emin olmadıkları gözlemlenmiştir. Bunu yukarıda verilen tabloda yer alan ortalamalardan görmek de mümkündür. Adayların, tek değişkenli fonksiyonların sürekliliği için kullandıkları bilgi ve yöntemlerini çok değişkenli fonksiyonların sürekliliğini tespit etme konusuna aktarmakta zorluk çektikleri görülmüştür. Burada adaylar tek değişkenli fonksiyonların sürekliliği hakkında bildiklerini iki değişkenli fonksiyonların sürekliliğine genişletememişlerdir. Hâlbuki bu durumda sadece expansive (genişleyerek) genelleme yeterli olacaktır. Burada korelasyon katsayısı $r=0,39$ olarak ölçülmüştür. Bu değer t-testine göre %80 güvenilirlikle doğrudur ($n=13$ olmak üzere 11 serbestlik derecesine göre $t_{tab.}=1,363$ ve $t_{hes.}=1,38$ olup, $t_{tab.} < t_{hes.}$ dir). Dolayısıyla bu iki veri arasında pozitif

yönlü, zayıf bir ilişki vardır. Yani adayların tek değişkenli fonksiyonların sürekliliği için kullandıkları bilginin, çok değişkenli fonksiyonların sürekliliğinin tespit edilmesi konusunda pek etkili olmadığı sonucu çıkarılabilir. Adayların iki değişkenli fonksiyonların grafiğini okuma konusunda sıkıntıları olduğu için, verilen iki değişkenli bir fonksiyonun grafiği üzerinden süreklilik hakkında yorum yaptıklarında pek kendilerinden emin olamadıkları gözlemlenmiştir. Burada adayların tek değişkenli fonksiyonların sürekliliği konusunu soyutlayabildikleri ancak iki değişkenli fonksiyonların sürekliliği konusunda gerekli olan generic (çıkarımsal) soyutlama sürecine giremedikleri söylenebilir.

Adayların tek değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği ve çok değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği konularında, çalışmalar süresince gösterdikleri kişisel performanslar envanter çalışmalarında elde ettikleri ortalamalar ele alınarak değerlendirilebilir. Burada amaç adayların tek değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği hakkında ölçülebilen yeterlilikleri ile iki değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği hakkında ölçülebilen yeterlilikleri arasında bir ilişkinin olup olmadığını tespit etmektir. Buna göre; envanter çalışmalarının kıyaslama yapılan konuları dikkate alındığında aşağıdaki tablo elde edilir.

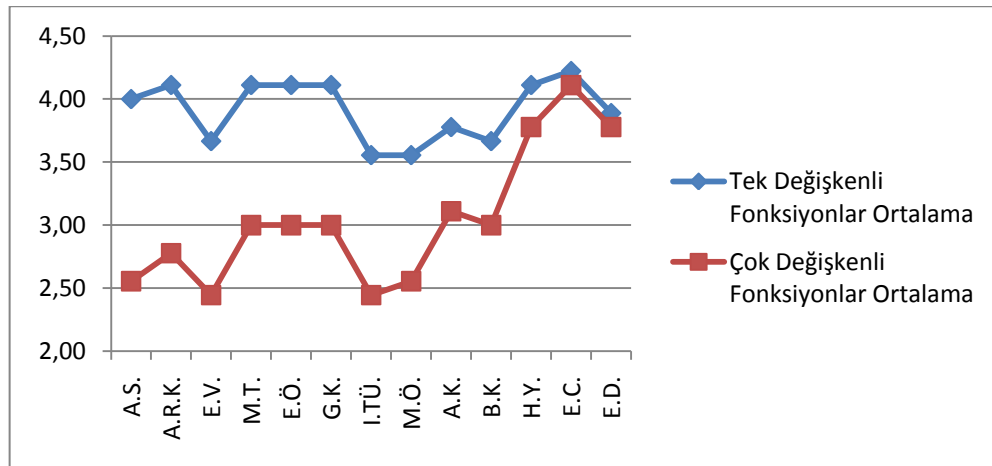
Tablo 54: Adaylara ait ortalama tablosu

Türü	Kriterler	B.K.	I.TÜ.	A.R.K.	E.V.	M.Ö.	E.D.	E.C.	M.T.	H.Y.	E.Ö.	A.S.	A.K.	G.K.	r
Tek Değişkenli Fonksiyonlar	Ortalama	3,67	3,56	4,11	3,67	3,56	3,89	4,22	4,11	4,11	4,11	4	3,78	4,11	0,56
Çok Değişkenli Fonksiyonlar	Ortalama	3	2,44	2,78	2,44	2,56	3,78	4,11	3	3,78	3	2,56	3,11	3	

Burada korelasyon katsayısı $r=0,56$ olarak ölçülmüştür. Bu değer t-testine göre %90 güvenirlikle doğrudur ($n=13$ olmak üzere 11 serbestlik derecesine göre $t_{tab.}=1,363$ ve $t_{hes.}=1,38$ olup, $t_{tab.} < t_{hes}$ dir). Bu çerçevede adayların tek değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği hakkında ölçülebilen yeterlilikleri ile iki değişkenli fonksiyonlar hakkında ölçülebilen yeterlilikleri arasında pozitif yönlü, güçlü bir ilişki olduğu söylenebilir. Dolayısıyla burada adaylar için, “iki değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği kavramlarını yapılandırırken tek değişkenli fonksiyonlar için bu kavramlarla ilgili sahip oldukları kavram imajları etkili olmaktadır” ifadesi kullanılabilir.

Ayrıca Tablo 54 aynı zamanda adayların tek ve iki değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği hakkındaki bilişsel seviyelerini ortaya koyması açısından önemli bir göstergedir.

Bu tablonun grafiksel gösterimine bakılırsa adaylar tarafından ortaya konulan performanslar arasındaki ilişki daha net görülecektir.



Grafik 3: Aday Ortalamaları

Yukarıdaki grafik, performans ortalamaları arasındaki farklar büyükten küçüğüne göre sıralanarak düzenlenmiştir. Grafik 3’e göre sadece 3 adayın dışında tüm adayların çok değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği konusunda gösterdikleri performanslar, tek değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği konusunda gösterdikleri performansa göre gözle görülür bir şekilde düşüktür.

Çok değişkenli fonksiyonlarda adayların göstermiş oldukları performans düşüklüklerinin sebepleri “Sonuç” bölümünde ele alınacaktır.

BÖLÜM 5

SONUÇLAR, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

5. Sonuç, Tartışma, Yorum ve Öneriler

Bu bölüm tezin araştırma problemi ile ilgili verilerin analizi sonucu elde edilen bulgular ışığında ulaşılan sonuçlara ve tartışmalara ayrılmıştır.

5.1. Adayların tek değişkenli reel fonksiyonların limiti ve sürekliliği ile ilgili kavram bilgileri ve kavram imajları hakkındaki sonuç, tartışma ve yorumlar

1. Adayların ön kavram bilgisi olarak adlandırılan limitin gerçek hayattaki manasına ilişkin inanışları ve düşünceleri ile adayların okulda gördükleri fonksiyonların limiti ve sürekliliği konularının öğrenilmesi arasında bir ilişki gözlemlenememiştir. Tek değişkenli fonksiyonlarda limit ve süreklilik kavramları hakkındaki bilişsel düzey belirleme testinde adaylara yöneltilen “Limit sözcüğünü duyduğunuzda aklınıza gelen ilk şey nedir?” şeklindeki 1.soruya “Sınır” cevabını verenler grubunda yer alan 9 adaydan (%20) limitle ilgili güncel hayattaki inanışlara paralel olarak sadece 2’si, testte yer alan “Bir fonksiyonun bir noktadaki limitinin var olmasının önemi sizce ne olabilir?” sorusuna “Fonksiyonun o noktada sınırlı olduğunu belirtir.” cevabını vermişlerdir. Ayrıca tüm adayların ilerleyen süreçlerde konu hakkındaki farkındalıklarının, limitin gerçek hayattaki manasından farklı olduğu gözlemlenmiştir. Örneğin Fey (1984) bu durumla ilgili tespitini; “Öğrencilerin limite ilişkin sezgisel anlamaları ile okulda formal olarak öğrendikleri limit kavramı arasında çoğu zaman ilişki bulunmamaktadır.” şeklinde ifade etmiştir. “Limitin günlük hayattaki algılanış şekli matematiksel limit kavramına taşındığında, öğrencilerin sağdan ve soldan limit kavramlarına anlam vermelerini ve dolayısıyla limitin kavramsal olarak taşıdığı anlamı oluşturmalarını zorlaştırabilmektedir” (Jordaan, 2005).

2. Adayların limit ile birlikte akıllarında yer eden “yaklaşma” kavramını, fonksiyonun limitinin arandığı noktada “yaklaşık bir değer elde etme” olarak

anlamlandırdıkları görülmüştür. Tek değişkenli fonksiyonlarda limit ve süreklilik kavramları hakkındaki bilişsel düzey belirleme testinde yöneltilen “Sizce limit kavramı neden ortaya atılmıştır?” şeklindeki 2.soruya, çalışmaya katılan 30 adayın tam olarak yarısı (15 aday) “Yaklaşık sonuç elde etmek için.” şeklinde bir gruplandırılmış cevap vermişlerdir. “Bir fonksiyonun bir noktadaki limitinin var olmasının önemi sizce ne olabilir?” şeklindeki 3.soruya ise 12 aday (%27) “Fonksiyonun o noktadaki yaklaşık değerini verir.” gruplandırılmış cevabı ile diğer gruplandırılmış cevaplar arasında ilk sırada yer almışlardır.

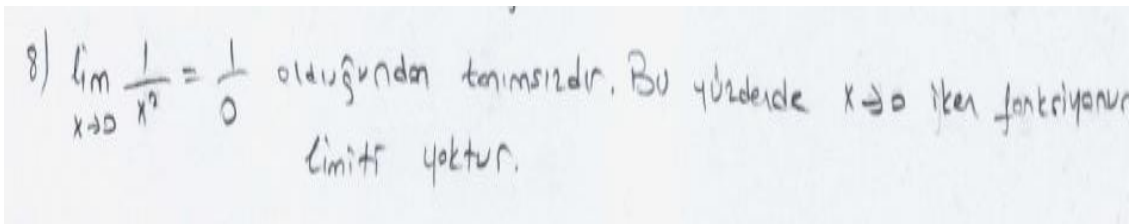
3. Adaylar grafiği verilen bir fonksiyonun limitini bulmakta zorlanmamaktadırlar. Graham&Ferini-Mundy (1989), öğrencilerin sürekli bir fonksiyonunun tanımlı olduğu bir noktadaki limitini bulmada oldukça başarılı olduğunu, bunlarla ilgili basit bir limit problemi verildiğinde uygun grafik gösterimleri yardımıyla da problemleri çözebildiklerini belirtmişlerdir. Tek değişkenli fonksiyonlarda limit ve süreklilik kavramları hakkındaki bilişsel düzey belirleme testinde adaylara 4. ve 9. Sorularda grafiği verilen bir fonksiyonun belirli noktalardaki limiti sorulmuş, 4. soruda adayların tamamı, 9. soruda ise %96’sı doğru cevabı vermişlerdir.

4. Limitin $\varepsilon - \delta$ tekniği ile verilen tanımında yer alan $\varepsilon - \delta$ sembollerinin görevlerini ve tanımın anlaşılması için gerekli olan komşuluk ve yakınsaklık kavramlarını öğrencilerin sadece küçük bir kısmı tam olarak bilmektedir. “Tanımda ε neyi temsil etmektedir?” sorusuna çalışmaya katılan 45 adaydan sadece 13’ü (%29) sadece “L limit değerinin bir komşuluğu” cevabını, “Tanımdaki δ neyi temsil etmektedir?” sorusuna ise 23 adayın (%51) “ $x=a$ noktasının komşuluğu” cevabını vermişlerdir. Ayrıca adaylara yönelik yürütülen düzey belirleme testinde yer alan 5. soru tamamen limitin $\varepsilon - \delta$ tekniği ile verilen tanımında yer alan ifadelerin anlamlarının adaylar tarafından nasıl algılandığı hakkında idi, ancak verilen cevaplar incelendiğinde adayların hiçbir soruya tatmin edici cevaplar veremedikleri gözlemlenmiştir. Bu tespit Todorov’un yapmış olduğu çalışmanın sonucu ile paralellik arz etmektedir. Todorov (2001) bir limitin $\varepsilon - \delta$ tanımında dört miktar belirleyici ($\forall, \exists, \forall, \forall$) kullanıldığı için, tanımın karmaşıktığını iddia etmektedir. Todorov’a göre bir fonksiyonun limit değerini bulmak için $\varepsilon - \delta$ limit tanımı kullanıldığında tahmini bir L limit değeri gerekmektedir. $\varepsilon - \delta$ limit tanımı L değerini nasıl hesaplayacağımız

hakkında herhangi bir ipucu vermemektedir. L değeri için makul bir değer tahmin etmek zorundayız ve bundan sonra $\varepsilon - \delta$ limit tanımı yardımıyla tahminimizin doğruluğunu ispatlarız ya da ispatlayamayız. Eğer fonksiyonun grafiğini biliyorsak L değeri makul tahmin edilebilir, bu tahmini öğrencilerin yapması biraz güçtür.

5. Adaylar bir fonksiyonun bir noktadaki limitini bulmak için başta yerine koyma tekniği olmak üzere lisede gördükleri teknikleri tercih etmektedirler. Limiti bulurken $\varepsilon - \delta$ tekniğine istenmedikçe başvurmuyorlar. Ancak belirli bir noktada limiti verilen bir fonksiyon için $\varepsilon - \delta$ tekniğini kullanarak limitin varlığını göstermede oldukça başarılı oldukları gözlemlenmektedir. Adaylara yöneltilen “ $\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 1) = 7$ olduğunu gösteriniz” sorusuna 45 adaydan 33’ü (%73) $\varepsilon - \delta$ tekniğini kullanarak limitin 7 olduğunu gösterebilmişlerdir. Benzer bir sonucu Williams (1991) yaptığı bir çalışmada şöyle ifade etmiştir; “Öğrenciler basit ve pratik limit modellerini limitin formal tanımlarından daha önemli görüyorlar. Özellikle sınıf ortamında öğrenciler için bu basit ve pratik limit modelleri sınavlarda başarılı olmak için yeterli görülmektedir. Öğrencilerin formal bilgileri (sürekli fonksiyonlarda yerine yazma, çarpanlara ayırma, sadeleştirme, eşlenik kullanma ve L'Hopital's kuralını uygulama gibi...) kavramsal bilgilerinden oldukça ayrıktır.”

6. Bir fonksiyonun tanımsız olduğu bir noktadaki limiti için (örnek: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$) adayların büyük bir bölümü limitin sonsuz olduğunu, önemli bir bölümü de fonksiyonun o noktada tanımlı olmadığı için limitin olamayacağını ifade etmiştir. Dolayısıyla öğrenciler fonksiyonun tanımsız olduğu noktalarda fonksiyonun limitini bulmada sıkıntı yaşamaktadırlar. Örnek vermek gerekirse;



8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{0}$ olduğundan tanımsızdır. Bu yüzden $x \rightarrow 0$ iken fonksiyonun limiti yoktur.

Şekil 31: Bir cevap örneği

Şekil 31’de verilen bir cevap, durumun özetlenmesi açısından önemli bir örnektir. Buna benzer bir sonuca Sanches (1996) yaptığı bir çalışmada ulaşmıştır. Sanches’e göre özellikle belirsizlik durumları söz konusu olduğunda öğrencilerin fonksiyonun limitini bulmada yaşadığı sıkıntılar artmaktadır. Rasyonel fonksiyonların tanımsız olduğu noktalarda kimi zaman limitinin varlığı, bazen de fonksiyonların tanımlı olduğu noktalarda limitinin olmaması gibi nedenler sıkıntılar yaratmaktadır.

7. Araştırmacıya göre adaylar süreklilik konusunu, limit konusundan daha iyi ve daha kolay anlıyorlar. Adaylar süreklilik hakkında limit konusuna nazaran daha doğru tespitler yapabiliyorlar. Bu durumun süreklilik konusunun limit konusundan sonra ele alınmasından ve süreklilik için formal bir tanım yerine birkaç şartın yerine getirilmesinin yeterli olmasından kaynaklandığı düşünülmektedir. Özellikle grafiği verilen bir fonksiyonun istenen noktalarda sürekli olup olmadığına adaylar rahat karar verebildikleri gözlemlenmiştir. “Düzlemde tanımlı bir fonksiyonun bir noktada limitinin var olup olmadığına, sürekli olup olmadığına karar verebilmek için fonksiyonun hangi ayırt edici özelliklerinden yararlanılır?” sorusunun süreklilikle ilgili kısmına çalışmaya katılan 52 adaydan yorumda bulunmayan 4 kişi hariç tümü doğru cevaplar vermişlerdir. Bu durumu Tablo 32’den de gözlemlemek mümkündür.

8. Adaylar limitini bulmakta zorlandıkları bir fonksiyon için en çok fonksiyonun o noktadaki sağ ve sol limitlerine bakarak karar vermeye çalışıyorlar. Örneğin “grafiği verilen bir fonksiyonun belirli bir noktadaki limitini nasıl tespit edersiniz?” sorusuna 45 katılımcıdan 37’si (%82) “Sağ ve sol limitlerinin aynı olması gerekir.” grublandırılmış cevabı vermiştir. Bunun gibi başka sorular için de adaylar benzer cevaplar vermişlerdir. Ayrıca adayların tek değişkenli reel fonksiyonların limiti hakkında sahip oldukları kalıcı bilgilerin en güçlüsünün “sağ ve sol limitler eşitse, limit vardır” yargısı olduğu gözlemlenmiştir. Çok değişkenli reel fonksiyonların limiti ve sürekliliği konularının işlendiği Analiz 2 dersine başlamadan önce derse katılan toplam 52 öğrenci ile yürütülen ön test çalışmasında “Düzlemde tanımlı bir fonksiyonun bir noktada limitinin var olup olmadığına karar verebilmek için fonksiyonun hangi ayırt edici özelliklerinden yararlanılır?” sorusuna 31 aday (%60) “Aranan noktada sağ ve sol limitler eşit ise ‘limit vardır’ denir.” grublandırılmış cevabını vermiştir.

9. Topoloji dersini alan öğrencilerle yapılan çalışmada, adayların limitin topolojide verilen tanımında yer alan $\forall V \in U_{(L)} \text{ için } \exists U \in U_{(a)} \ni f(U) \subset V$ ifadelerin, limitin $\varepsilon - \delta$ tekniği ile verilen tanımıyla örtüştüğünü tam anlayamadıkları gözlemlenmiştir. (Bknz. 4.1.4. **Dersi Almış 3. Sınıf Öğrencilerinin, limitin topoloji dersinde verilen tanımı ile limitin $\varepsilon - \delta$ tekniği ile verilen tanımı arasında bir bağ kurma konusunda bilişsel düzey belirleme test bulguları**). Topoloji dersinde limit konusu işlenirken adayların iki tanım arasındaki benzerlikleri görebilmeleri için, derste limitin topolojideki tanımı ile tek değişkenli reel fonksiyonlar için limitin $\varepsilon - \delta$ tekniği ile verilen tanımının bir arada tartışılması daha faydalı olacaktır.

5.2. Adayların iki değişkenli reel fonksiyonların limiti ve sürekliliği ile ilgili kavram bilgileri ve kavram imajları hakkındaki sonuç, tartışma ve yorumlar

1. Adaylar çok değişkenli fonksiyonlarda limit ve süreklilik konusunu görmeden önce grafiği verilen bir 2 değişkenli bir fonksiyonun limiti ve sürekliliği hakkında yorumsuz kalmışlardır. Tek değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği konusu işlendikten sonra adaylarla yapılan mülakatlarda kendilerine iki değişkenli bir fonksiyonun grafiği verilmiş ve kendilerinden fonksiyonun limiti ve sürekliliği hakkında yorum yapmaları istenmişti (Bknz. 4.1.2. Yarı Yapılandırılmış Görüşme Sonuçları). Adaylar, limit ve süreklilik için 2 boyutlu grafiklerde yaptıkları yorumları, kendilerine verilen 3 boyutlu grafikler için yapmakta zorlanmışlardır. Ayrıca adaylar 2 değişkenli fonksiyonların grafikleri ve bu grafikleri nasıl çizilecekleri hakkında yeterli bilgiye sahip değildirler. Adayların Analitik Geometri ile Çok Değişkenli Analiz derslerini aynı dönemlerde aldıkları, bu yüzden de adayların 3 boyutlu öklid geometrisine aşina olmadıkları gözlemlenmiştir. (Bknz. 4.1.2. Yarı Yapılandırılmış Görüşme Sonuçları).

2. Tek değişkenli fonksiyonların sürekliliği hakkında sağlam kavram bilgisine sahip olan adayların çoğu, iki değişkenli bir fonksiyonun bir noktada sürekli olması için ne gerekir sorusuna cevap vermekte çekimser kalmıştır. Buna, öğrencilerin tek değişkenli bir fonksiyonun bir noktadaki sürekliliği için daha çok o noktada fonksiyonun grafiğinde bir kopma olup olmamasına bakmalarının sebep olduğu düşünülmektedir. Bu yüzden ki 3-boyutlu bir uzayda tanımlı iki değişkenli bir fonksiyonun grafiği için bu türden kopmaların nasıl gözükeceğini tasavvur edemedikleri

için yorumsuz kaldıkları söylenebilir. Zaten Tablo 34'e bakıldığında tek değişkenli fonksiyonların sürekliliğini fonksiyonun grafiği üzerinden açıklamak isteyen 19 öğrenciden sadece bir tanesi aynı düşüncüyü iki değişkenli fonksiyonların sürekliliğini izah etmek için kullandığı görülmektedir. Tablo 37 incelendiğinde $g(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ ile verilen fonksiyonun (0,0) noktasındaki sürekliliği konusunda "Limit olduğu için süreklidir" cevabını veren ve hiç cevap yazmayan öğrenciler yaklaşık %49'luk bir kesimi teşkil etmektedirler.

3. Adaylar iki değişkenli fonksiyonların limitini bulmak için en çok iki farklı yoldan yaklaşım yöntemini yani $\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y))$, $\lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y))$ limitlerini bulma yöntemini kullanmışlardır. Bu durum Tablo 36 ve Tablo 37'den açıkça görülebilir. Bu yöntemde örneğin $\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y))$ limitini bulmak için öncelikle $\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ limitini bulmak gerekir. Bu limit x bağımsız değişkeni göz ardı edilerek ve genelde $y \rightarrow 0$ için yerine koyma yöntemi ile kolayca bulunabilir. Daha sonra elde edilen fonksiyon x 'e bağlı, tek değişkenli bir fonksiyon olacaktır ve $x \rightarrow 0$ limit kolayca bulunabilmektedir. Dolayısıyla bu yöntemde limit bulmak için çoğu zaman tek değişkenli fonksiyonlarda tercih edilen yerine koyma metodu kullanıldığından, öğrencilerin bu nedenle iki değişkenli fonksiyonların limitini bulmak için en çok iki farklı yoldan yaklaşım yöntemini kullandıkları düşünülmektedir.

4. Adaylar iki değişkenli fonksiyonlarda limitin varlığı için, iki farklı yaklaşım sonucu elde edilen limitlerin, yani $\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y))$, $\lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y))$ limitlerinin eşit olmasını yeterli görmektedirler. Aylardan birinin vermiş olduğu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0$$

Böylece $g(x, y)$, $(0, 0)$ 'da sürekli ve limiti sıfırdır.

Şekil 32: Bir cevap örneği

Şekil 32 ile verilen cevap, belirtilen duruma güzel bir örnek olarak verilebilir. Araştırmacı bu durumu öğrencilerin tek değişkenli fonksiyonlarda limitin varlığı için gerekli olan “sağ ve sol limitlerin eşit olması” ilkesine benzetmelerine bağlamaktadır.

5. Tablo 38’den de görüldüğü gibi öğrenciler farklı sorulara aynı çözüm yöntemleri ile cevap vermeye çalışmışlardır. Tabloda her iki sorunun çözümü için kullanılan farklı yöntemler farklı renklerle gösterilmiştir. Daha açık bir şekilde ifade etmek gerekirse; iki değişkenli fonksiyonlar için yapılan bilişsel düzey belirleme testinde sorulan, fonksiyonların belirtilen noktalarda limitinin tespiti sorularına her aday benimsemiş olduğu çözüm yöntemini uygulamıştır. Örneğin, eğer aday ilk sorunun cevabı için iki farklı yoldan yaklaşarak çıkan sonuca göre limit tespiti yapmış ise, başka bir sorunun çözümü için de aynı yöntemi uygulamaya çalışmıştır. Bu durum öğrencilerin konuya çok iyi hâkim olmadıklarını, dolayısıyla konu hakkındaki farklı sorulara farklı çözümler getirecek kadar bilgi birikimine sahip olmadıklarını düşündürmektedir.

6. Adaylar iki değişkenli bir fonksiyonun her hangi bir değişkeninin sabit bir değer olması durumunda fonksiyonun tek değişkenli bir fonksiyon gibi görmekte zorlanmamaktadırlar. ($f(x,y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2}$ için $f(x,1) = \frac{x^2 + 1}{x^2}$ olması gibi.) Öğrenciler iki değişkenli bir fonksiyonu tek değişkenli hale getirebildiklerinde, elde edilen fonksiyonun limitini tek değişkenli fonksiyonların limitini bulurken kullandıkları pratik yöntemlerle çözmeye çalışıyorlar.

7. Yapılan çalışmalar sonucunda, adayların konu hakkında sorulan standart sorulara verdikleri cevaplarda işlemsel becerilerinin iyi olduğu gözlemlenmiştir. Örneğin; “limitin tekniği ile verilen tanımını kullanarak $\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 1) = 7$ olduğunun gösterilmesi”, “ $f(x) = \lfloor \sin x \rfloor$ ile verilen fonksiyonun $x = \pi$ noktasındaki limitinin bulunması”, “ $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ de $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$ ile verilen fonksiyonunun $(0,0)$ noktasındaki limitinin bulunması”, “ $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x,y) \right)$ limitinin hesaplanması” gibi soruların çözümünde adayların yürüttükleri işlemlerde bir sıkıntı yaşamadıkları görülmüştür. Ancak biraz daha kavram bilgisinin sorgulandığı sorularda adayların başarısız kaldıkları söylenebilir. Örneğin “Limitin sonsuz olması ile belirsiz olması

arasında bir fark var mıdır?”, “ $|f(x) - L| < \varepsilon$ eşitsizliği ne anlam taşımaktadır?”, “limitin tekniği ile verilen tanımında ve $y=mx$ ’nin rollerinin ne olduğu”, “ $y=mx$ doğrularıyla yaklaşmak ne demektir?”, “ $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right)$ ve $\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right)$ limitleri için sonuçların eşit çıkmasının sizce bir anlamı var mı?” gibi sorulara adayların tatmin edici cevaplar veremedikleri görülmüştür. Bu önemli tespit hakkında Sabella ve Redish (1995) “Öğrenciler için asıl zor olan anlatılan konularla ilgili kavramların öğrenilmesidir, algoritmik hesaplamaların öğrenilmesi değil” demişlerdir.

8. Özellikle adaylarla yapılan görüşmeler esnasında, dersler hakkında yapılan sohbetlerde; adaylar kendileri için konu hakkında kavram bilgisinin öğrenilmesinin değil, bir şekilde dersten geçmenin daha önemli olduğunu itiraf etmişlerdir. Adaylar, üniversite eğitimi sonrasında öğretmen olarak göreve başladıklarında, yapacakları matematik dersinde kendilerine sadece lise matematik bilgisinin gerekli olduğu için üniversitede gördükleri matematiğin kendilerine pek katkı sağlamayacağını düşünmektedirler.

Matematik öğretmeni yetiştirilmesinde iki temel hedeften söz edilebilir (Hiebert, Morris, Glass, 2003):

1. Matematiksel alan uzmanlığına sahip olunmasını sağlamak,
2. Öğretmeyi öğrenmeye yönelik bilgileri, becerileri ve eğilimleri geliştirmek; yani öğretmenlik becerileri kazandırmak.

Dolayısıyla adayların, yukarıda bahsi geçen hedeflerden “Öğretmeyi öğrenmeye yönelik bilgileri, becerileri ve eğilimleri geliştirmek” konusuna odaklandıkları, ancak “Matematiksel alan uzmanlığına sahip olunmasını sağlamak” konusunu ihmal ettikleri söylenebilir.

Ancak bilinmeli ki; yukarıda tespit edilen durumla ilgili olarak yapılan araştırmalar, öğretmenlerin öğrettikleri matematiği bilmek zorunda olduklarını ortaya koymaktadır. Fakat öğretmenlerin ne kadar matematiksel bilgiye ihtiyaç duyduklarını belirlemek basit bir mesele olmamıştır. Lise Matematik öğretmen adaylarını hazırlama programlarının tasarımını etkileyen iki yaygın bakış açısı vardır. Bunlar;

- a) Günümüz matematikçileri hangi konuları araştırıyor ve çalışıyorlarsa öğretmen adayları da o konuları çalışmalıdırlar, çünkü bu öğretmen adaylarına matematik disiplininin kapsamlı bir resmini sunacaktır. Böylelikle adaylar okul ders programlarını etkileyen başlıkların neler olması gerektiği hakkında en iyi şekilde fikir üretebilmeye muktedir olabileceklerdir.
- b) Matematik öğretmen adayları meslek için bilhassa matematik eğitimini, öğretim metotlarını, matematik eğitimindeki pedagojiyi ve 9–12 Lise matematik ders programını çalışmalıdırlar.

Sonuç olarak bu bakış açılarının her ikisi de öğretmen adaylarının matematik lisans programını (veya aşağı yukarı buna denk olan bir programı) tamamlamaları gerektiğini savunmaktadır. (Argun, 2008)

5.3. Adayların çok değişkenli fonksiyonların limit ve sürekliliği ile ilgili kavram bilgilerini ve kavram imajlarını yapılandırırken tek değişkenli fonksiyonlarda bu kavramlarla ilgili oluşturdıkları kavram bilgilerinin ve kavram imajlarının etkileri ve adayların yürüttükleri matematiksel genelleme ve soyutlama süreçlerinde yaşadıkları sıkıntılar hakkındaki sonuç, tartışma ve yorumlar

1. Adaylar limitin $\varepsilon - \delta$ tekniği ile verilmiş tanımını hiçbir ön bilgiye sahip olmaksızın iki değişkenli fonksiyonlar için genelleştirebilmişlerdir.

Çok değişkenli fonksiyonlar dersine başlamadan önceki derste yapılan bir çalışmada öğrencilerden tek değişkenli fonksiyonların bir noktadaki limitinin $\varepsilon - \delta$ tekniği ile verilmiş tanımını, iki değişkenli fonksiyonların limiti için genelleştirmeleri istenmiştir.

Bu çalışmaya katılan 43 öğrenciden 33'ü (%77) “ $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \lambda > 0$ vardır, öyle ki $\forall (x, y) \in R^2$ ikilileri için $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$ iken $|f(x) - L| < \varepsilon$ o.ş. bir $\delta > 0$ sayısı bulanabiliyorsa, $L \in R$ limiti vardır.” şeklinde cevap vermiştir.

Adaylar mevcut bilişsel yapılarını ve fikirlerini değiştirmeden sadece genişlemelerle bu genellemeyi gerçekleştirdikleri için, adayların burada expansive

genelleme (genişlemeye yönelik genelleme) yürüttükleri söylenebilir. Adayların özellikle expansive (genişlemeye yönelik) genelleme gerektiren işlemlerde daha başarılı oldukları söylenebilir.

2. Adayların tek değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği konusunda sahip oldukları kavram bilgilerinin zayıf olduğu söylenebilir. Dolayısıyla zayıf olan kavram bilgilerinin üzerine adaylardan genellemeler ve soyutlamalar yaparak iki değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği konusunu anlamaları beklenmektedir.

Adayların tek değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği konusunda sahip oldukları bilgilerin, bilişsel yapılarını ve fikirlerini değiştirmeden sadece genişlemelerle yaptıkları “expansive” (genişleyerek) genelleme sonucu iki değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği kapsamında;

- “Fonksiyonun limit noktasında tanımlı olup olmaması ve limit değeri ile fonksiyonun o noktadaki değeri arasındaki ilişkiyi belirtme.”
- “Fonksiyonun grafiğine bakarak bir noktadaki limit değerini tahmin etme”
- “Limitin geometrik yorumu ile epsilon-delta ile verilen tanımı arasında ilişki kurma”
- “Limitin epsilon-delta tanımında kullanılan komşulukların ne anlama geldiği”
- “Fonksiyonlar için limitin tespitinde kullanılan epsilon-delta tekniğinde delta'nın epsilon'a bağlı bir değer olduğunun bilinmesi”
- “Fonksiyonun belirli bir noktada sürekli olup olmadığının tespiti”

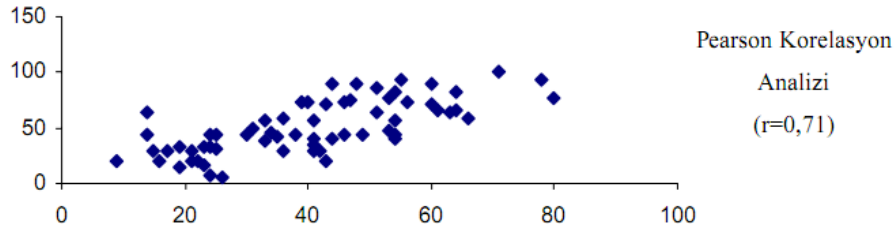
gibi hususları anlamalarına yardımcı olduğu söylenebilir.

Ancak adaylar iki değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği kapsamında;

- “limit değerinin yaklaşma şeklinden bağımsız olduğu”
- “limit değerini bulmak için fonksiyonun kutupsal koordinatlardaki ifadesini kullanabilme”

konularını öğrenirken kendilerinden beklenen, tek değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği kapsamında sahip oldukları bilişsel yapıyı yeniden yapılandırmayı gerektiren “reconstructive (yeniden yapılandırılmış)” genelleme yapma becerisi gösteremedikleri gözlemlenmiştir.

Dolayısıyla bu noktada öğrencilerin genelleme yaparken sahip oldukları bilişsel yapının ne kadar sağlam olması gerektiği net bir şekilde ortaya çıkmaktadır. Benzer bir tespiti Alkan ve Bukova (2005) dile getirmişlerdir. 64 öğretmen adayı ile yürüttükleri çalışmada, adaylardan “tahmin edebilme, tümevarım, tümdengelim, betimleme, genelleme, örnekleme, biçimsel ve biçimsel olmayan usa vurma, doğrulama ve benzeri karmaşık süreçlerin bir birleşim kümesi (Liu Po-Hung, 2003)” olarak tanımlanan matematiksel düşünme güçlerinin tespiti için, “Türev Kavramı” ile üstten sınırlandırılan ve önceden belirlenen “matematiksel düşüncenin ölçütleri (Greenwod, 1993)” temel alınarak hazırlanmış, test edilmiş ve denetlenmiş problemleri çözmeleri istenmiştir. Deneklerin ölçme aracında yer alan problemlerde sergiledikleri genelleme becerileri matematiksel düşünme güçleri ile birlikte değerlendirilmiştir. Sonuç olarak öğretmen adaylarının Analiz I-II derslerinde başarıyı etkileyen genelleme yapabilme puanları ile MD düzeyleri arasında belli ölçüde doğrusal bir bağıntı olduğunu tespit etmişlerdir ($r=0.71$). (Grafik 4)



Grafik 4: Adayların matematiksel düşünme puanları ile AnalizI-II genelleme yapabilme puanları.

Özetle, matematiksel düşünme gücünü oluşturan, var olan kavramsal bilgiler, adayların matematiksel genelleme yapabilme becerileri ile yakın ilişkilidir. Bu yüzden adayların, tek değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği hakkında var olan kavram bilgilerini sağlamlaştırılmadan expansive (genişlemeye yönelik) ve reconstructive (yeniden yapılandırmaya yönelik) genelleme gerektiren iki değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliğini yapılandırmaya geçmelerinin uygun olmayacağı izlenimi oluşmuştur.

3. Adayların yürüttükleri bilişsel genişleme eylemlerinin kendilerini bir genellemeye götürdüğünü **fark etmeleri** sonucunda, adaylar konu hakkında generic (çıkarımsal) soyutlama yapmış olurlar. Böylece adaylar, expansive (genişlemeye yönelik) genelleme yardımı ile iki değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği

konularında oluşturdıkları tüm bilgileri generic (çıkarımsal) soyutlama ile özümsemiş olurlar. Bu husus dikkate alındığında adayların bu tür genellemeyi iyi yürüttükleri gözlemlenen

- “Fonksiyonun grafiğine bakarak bir noktadaki limit değerini tahmin etme”(Tablo.46 - $r=0.75$)
- “Limitin geometrik gösterimi ile epsilon-delta gösterimi arasında ilişki kurarak, ikisi arasında bir fonksiyon tanımlama” (Tablo.47 - $r=0.53$)
- “Limitin epsilon-delta tanımında kullanılan komşulukların ne anlama geldiği” (Tablo.48 - $r=0.51$)
- “Fonksiyonlar için limitin tespitinde kullanılan epsilon-delta tekniğinde delta'nın epsilon'a bağlı bir değer olduğunun bilinmesi”(Tablo.50 - $r=0.60$)

konularında iki değişkenli fonksiyonlar için generic (çıkarımsal) soyutlama yapabildikleri söylenebilir ancak bilişsel düzey ortalamalarına bakıldığında adayların bu konular hakkında tek değişkenli fonksiyonlarda daha başarılı bir soyutlama gerçekleştirdikleri söylenebilir.

İki değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği kavramlarını oluştururken adayların;

- “limit değerinin yaklaşma şeklinden bağımsız olduğu”
- “limit değerini bulmak için fonksiyonun kutupsal koordinatlardaki ifadesini kullanabilme”

konularını öğrenirken tek değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği konusu temel alınarak yürütülen “reconstructive (yeniden yapılandırılmış)” genelleme yapma becerisini gösteremedikleri için generic (çıkarımsal) soyutlamanın bir sonraki aşaması olan ve bilişsel yeniden yapılanma gerektiren formal (yapısal) soyutlamayı gerçekleştiremedikleri iddia edilebilir.

5.4. Öneriler

Bu kısımda, elde edilen bulgular ve sonuçlara dayalı olarak tek ve iki değişkenli reel fonksiyonlarda limit ve süreklilik kavramlarının öğrenilmesi ve öğretimi ile ilgili önerilere yer verilmiştir. Ayrıca bu çalışma sonucunda elde edilen sonuç ve yapılan önerilerin, böyle bir araştırmanın fonksiyonlarda limit ve süreklilik kavramlarının

yapılandırılması çalışmaları dikkate alındığında, iki değişkenli fonksiyonlarda limit ve süreklilik kavramlarını içermesi açısından literatürde bir ilk olduğu dikkate alındığında, bu kavramlarla ilgili yapılacak çalışmalara ışık tutabileceği düşünülmektedir.

1. Kavram bilgileri sağlam olmadan, sınıf geçmenin pek de önemli olmadığı, sadece ortaöğretim matematik bilgilerinin matematik öğretmenliği için yeterli olmadığı adaylara mutlaka hatırlatılmalıdır. Zira adayların ifadelerinden yola çıkarak kendileri için sadece sınıf geçmenin önemli olduğunu düşündükleri, dolayısıyla kavram bilgilerini özümseme yerine, sınavlarda başarı için gerekli bilgileri ezberleme yoluna gittikleri söylenebilir. Matematik disiplininin kapsamlı bir resmine hâkim olabilmek için günümüz matematikçileri hangi konuları araştırıyor ve çalışıyorlarsa öğretmen adaylarının da o konuları çalışmaları gerektiği, böylelikle adayların okul ders programlarını etkileyen başlıkların neler olması gerektiği hakkında en iyi şekilde fikir üretebilmeye muktedir olabilecekleri hususları derslerde mutlaka işlenmeli ve adayların bu hususlarda bir vizyonlarının olması sağlanmalıdır. Adayların bu şekilde derslere olan konsantrasyonun ve motivasyonun artacağı düşünülmektedir.

2. Bu araştırmada ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının tek ve iki değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği ile ilgili kavram bilgileri arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Bu araştırmanın bir benzeri pür matematik eğitimi alan lisans öğrencileri ile de yürütülebilir. Zira pür matematik eğitimi alan lisans öğrencilerinin matematik öğretmen adaylarından farklı olarak “Öğretmeyi öğrenmeye yönelik bilgi, beceri ve eğilimleri geliştirmek” konusuna daha az odaklandıkları için matematiksel alan uzmanlığına sahip olma kaygısını daha fazla taşıdıkları düşünüldüğünden, benzer bir araştırmada farklı sonuçlar elde edilebilir.

3. Adayların limit ile birlikte akıllarında yer eden “yaklaşma” kavramını, fonksiyonun limitinin arandığı noktada “yaklaşık bir değer elde etme” olarak anlamlandırdıkları görülmüştür. Bu husus limitin öğretimi esnasında dikkate alınarak, yaklaşık değer elde etme işleminin limitin kullanıldığı durumlardan sadece biri olduğu öğrencilere örnekler verilerek açıklanmalıdır.

4. Adaylar grafiği verilen bir fonksiyonun limitini bulmakta zorlanmamaktadırlar. Dolayısıyla öğrencilere limit ve süreklilik kavramı öğretilirken ve formal tanımlar açıklanırken grafikler üzerinde daha fazla durulmalıdır.

5. Limitin $\varepsilon - \delta$ tekniği ile verilen tanımında yer alan $\varepsilon - \delta$ sembollerinin görevlerini ve tanımın anlaşılması için gerekli olan komşuluk ve yakınsaklık kavramlarını adayların sadece küçük bir kısmı tam olarak bilmektedir. Dolayısıyla adaylara komşuluk ve yakınsaklık kavramlarının ve tanımda yer alan $\varepsilon - \delta$ ve miktar belirleyici $(\forall, \exists, \forall)$ sembollerin tanım içindeki görevleri ayrıntılı bir biçimde anlatılması gerekmektedir.

6. Öğrencilerin işlemsel bilgilerinin (sürekli fonksiyonlarda yerine yazma, çarpanlara ayırma, sadeleştirme, eşlenik kullanma ve L'Hopital's kuralını uygulama gibi...) kavramsal bilgilerinden ayrık olduğu gözlemlenmiştir. Matematikte kalıcı ve işlevsel bir öğrenme ancak işlemsel ve kavramsal bilginin dengelenmesiyle mümkün olabilir. Özellikle teorik bilgilerin verildiği derslerde kavramsal öğrenme ağırlıkta olması gerekirken, işlemsel öğrenmeye daha çok ağırlık verildiği gözlemlenmiştir. Yani derslerde işlemsel ve kavramsal öğrenme dengelenememiştir. İşlemsel ve kavramsal öğrenme dengelenmediğinden konular kavrama düzeyinde öğrenilememiştir. Öğrenciler için asıl zor olan anlatılan konularla ilgili kavramların öğrenilmesidir, algoritmik hesaplamaların öğrenilmesi değildir. Dolayısıyla temel kavramların konu edildiği derslerde kavramsal öğrenmeye ağırlık verilmesi ve buna yönelik öğretim tekniklerinin geliştirilmesi önem arz etmektedir.

7. Limit kavramıyla ilgili adaylarda gözlemlenen en kalıcı bilginin “Aranan noktada sağ ve sol limitler eşit ise fonksiyonun o noktada limiti vardır” olduğu görülmüştür. Burada ifadenin sade ve pratik olmasından dolayı tekerleme gibi akılda kalıcı bir etkisinin olduğu söylenebilir. Eğiticiler sadece limit ve süreklilik konularında değil, diğer konu anlatımlarında da bu tür benzer ifadelerin üzerinde durarak, öğrencilerde konu hakkında kalıcı etki bırakabilirler.

8. Çok değişkenli fonksiyon analizi dersi verilmeden önce, analitik geometri derslerinde çok değişkenli fonksiyonlar, adaylara ayrıntılı bir biçimde tanıtılmalıdır. Adayların bilgi düzeylerinin en yüksek olduğu, “grafiki verilen tek değişkenli bir fonksiyonun sürekliliği hakkında yorum yapabilme” yeterliliklerini bile, adayların iki

değişkenli fonksiyonların grafikleri hakkında yeterli bilgiye sahip olmadıklarından, grafiği verilen iki değişkenli bir fonksiyonun bir noktada sürekliliğinin tespiti konusuna genelleyemedikleri gözlemlenmiştir.

9. İki değişkenli fonksiyonlarda limitin varlığı için, $\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y))$, $\lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y))$ limitlerinin eşit olması ile tek değişkenli fonksiyonlarda limitin varlığı için gerekli olan “sağ ve sol limitlerin eşit olması” ilkesinin farklı durumlar olduğu adaylara sebepleri ile anlatılmalıdır, çünkü adaylar bu iki durumu birbiriyle örtüştürmektedirler. Bu hususun derslerde ele alınmasının, “çok değişkenli fonksiyonların limitinin, limitin arandığı noktaya yaklaşım şekline bağımsız” olduğu ilkesini ve bununla birlikte birçok temel kavramların önemini adaylara hatırlatmak açısından faydalı olacağı düşünülmektedir.

10. İki değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği kavramları ile ilgili derslerde mümkün olduğu kadar farklı ve bol soru çözülmeli ve çözüm yolları hakkında tartışılmalıdır. Zira adayların iki değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği kavramları ile ilgili farklı tipten sorulara aynı çözüm yöntemleri ile cevap vermeye çalıştıkları gözlemlenmiştir.

11. Adayların tek değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği kavramları hakkındaki bilgileri ile daha çok expansive (genişlemeye yönelik) genellemeler yaparak iki değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği kavramlarını yapılandırdıkları ancak reconstructive (yeniden yapılandırmaya yönelik) genelleme gerektiren süreçlerde pek başarılı olamadıkları gözlemlenmiştir. Bu yüzden derslerde iki değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği kavramları işlenirken özellikle reconstructive (yeniden yapılandırmaya yönelik) genelleme gerektiren kısımlar üzerinde yoğunlaşılmalıdır. Ayrıca tek ve iki değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği hakkında tam bir soyutlama gerçekleştirebilmeleri için, adayların öğrendiği konuları mutlaka pekiştirmeleri gerekmektedir. Konunun özümsemesi ve kalıcı olabilmesi için adaylar konu hakkında araştırmalar yapmak, farklı sorular çözmek, tek ve iki değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği konusunun geçtiği her derste konuya ilişkin sahip oldukları bilgileri tekrar gözden geçirmek suretiyle pekiştirme yoluna gitmeleri tavsiye edilebilir. Zira soyutlamanın gerçekleşmesinde pekiştirmenin önemini vurgulayan başka araştırmacılar da vardır (Monaghan ve Özmantar, 2006). Ayrıca her dersin başında bir

nceki derste yapılanları hatırlatmak ya da dersin sonunda gelecek derste ne yapılacağını söylemek, hem konuların bütünlüğü hem de öğrencinin ne yapılacağını bilmesi açısından önemlidir. Dersle ilgili verilecek her türlü bilgi; örneğin, işlenecek konular, yararlanabilecek kaynaklar, sınav sayısı ile zamanı ve türleri vb. Öğrenciler için faydalı olacaktır, çünkü böylece ğrenci kendinden ne beklendiğini bilecek ve dersle ilgili taşıdığı endişelerini üzerinden atacaktır.

KAYNAKÇA

ACER (2000). Evaluation and validation of the Trial Postgraduate Research Experience Questionnaire. Higher Education Division, Evaluations and Investigations Program, Department of Employment, Education and Training. Canberra: Australian Government Publishing Service.

Akbulut, K. (2004). Limit Öğretimi ve Kavram Yanılgıları, Yüksek Lisans Tezi, Atatürk Üniversitesi.

Akkoyunlu, A., Güler, M., Uğurel, I. ve Alan, E., (2003). Orta Öğretimde Limit Kavramının Oluşturulmasına Yönelik Bir Çalışma,

<http://www.matder.org.tr/bilim/oolkoybc.asp?ID=140> adresinden 18.09.2009 tarihinde alınmıştır.

Aksoy, Y. (2007). “Türev Kavramının Öğretiminde Bilgisayar Cebiri Sistemlerinin Etkisi”, Doktora Tezi. Gazi Üniversitesi, Ankara.

Albayrak, M. (2000). Eğitim Fakülteleri ve Öğretmenler İçin İlköğretimde Matematik ve Öğretimi. Ankara.

Alkan, H. ve Altun, M. (1998). Matematik öğretimi. Eskişehir: Açıköğretim Fakültesi Yayınları.

Altun, M. (1998). Matematik Öğretimi, Alfa Basım Yayım Dağıtım, İstanbul.

Argün, Z., (1998). “Lise Matematik Öğretmenlerinin Yetiştirilmesinde Mevcut Yargılar, Yeni Fikirler” Tübav Bilim Dergisi, Cilt:1, Sayı:2, Sayfa:89-95, Ankara.

Ausubel, D, P. (1960). The use of advance organizers in the learning and retention of meaningful verbal material Journal of Educational Psychology, 51,261-212.

Ausubel, D. (1968), Educational Psychology: A Cognitive view, New York.

Aztekin, S., (2003) Repertuar çizelge tekniği ve limit konusuna uygulanması, Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi.

Baki, A., (2006). Kuramdan uygulamaya Matematik Eğitimi. İstanbul Bilge Matbaacılık.

Baki, A., (1998). “Cebirle İlgili İşlem Yanılgılarının Değerlendirilmesi”, 3.Ulusal Fen Bilimleri Eğitimi Sempozyumu, Karadeniz Teknik Üniversitesi Fatih Eğitim Fakültesi, Trabzon, s.46-49.

Balcı, M. (1996). Analiz I, Balcı Yayınları, Cilt-I, 1.Baskı, Ankara

Ball, G., Smith, G., Wood, L., Coupland, M., Stephenson, B., and Crawford, K. (1998), Int. J. Math. Educ. Sci. Technol, 29, 827 - 841.

Barak, B. (2007). Limit Konusundaki Kavram Yanılgılarının Belirlenmesi, Yüksek Lisans Tezi, Balıkesir Üniversitesi.

Barbé, J., Bosch, M., Espinoza, L. & Gascón, J. (2005). Didactic restrictions on the teacher's practice: The case of limits of functions at spanish high schools. Educational Studies in Mathematics, 59, 235-268.

Baştürk S. (2005). “Üniversite Matematik Bölümü öğrencilerinin Türkiye’deki matematik eğitimi hakkındaki çağrışımları: lise, dersane ve üniversite boyutunda”, Yeditepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, sayı 1.

Baykul, Y. (1999). İlköğretim Matematik Öğretimi-1. ve 5. sınıflar, Anı Yayıncılık, Ankara.

Best, J. ve Kahn. J., (1989). Research in Education, (Sixth Edition), Needham Heights, Massachusetts.

Beurk, D. (1982). An experience with some able women who avoid mathematics.

For the Learning of Mathematics, 3, 19–24.

Beydoğan, H. Ö. 1998. Çocuklarda Kavram Öğrenme ve Kavram Öğretme. Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Yayınları. Erzurum.

Beyer, S., Rynes, K., Perrault, J., Hay K. ve Haller, S., (2003), Gender Differences in Computer Science Students, SIGCSE'03, February 19-23, Reno, Nevada, USA.

Bilgin, İ. ve Geban, Ö. “Benzeşim (Analoji) Yöntemi Kullanarak Lise 2. Sınıf Öğrencilerinin Kimyasal Denge Konusundaki Kavram Yanılgılarının Giderilmesi”, Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, sayı:20, 2001, ss. 29-32.

Bingölbalı, E. ve Monaghan, J. (2008). Concept image revisited. Educational Studies in Mathematics, 68(1), 19-35.

Bloom, B. S., Engelhart, M. D., Furst, E. J., Hill, W. H., and Krathwohl, D. R. (1956), Taxonomy of Educational Objectives: Cognitive Domain, New York: McKay.

Borasi, R. (1994). Capitalizing on errors as "springboards for inquiry": A teaching experiment.' Journal for Research in Mathematics Education^ 25(2), 166-208.

Borasi, R. (1996). Reconceiving mathematics instruction: A focus on errors. Nonwood, New Jersey: Ablex Publishing Corporation.

Bukova E. (2006). Öğrencilerin limit kavramını algılamasında ve diğer kavramlarla ilişkilendirmesinde karşılaşılan güçlükleri ortadan kaldıracak yeni bir program geliştirme. Yayımlanmış doktora tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

Bukova E., Alkan H. (2005), Öğretmen Adaylarında Matematiksel Düşünmenin Gelişimi, GÜ, Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi, Cilt 25, Sayı 3 (2005) 221-236, Ankara.

Camacho, J.,E.,D., 2002. Comparing Declarative And Procedural Learning Strategies Under A Problem Based Learning Approach, Yayınlanmamış Doktora Tezi, United States International University, San Diego.

Cebeci, S. (2002). Bilimsel Araştırma ve Yazma Teknikleri. İstanbul: Alfa Basım Yayım Dağıtım.

CIAI, 2003. Curriculum-Instruction-Assessment-Improvement, Mathematical Power For All Students K-12, <http://fcit.usf.edu/math/resorce/power.html>, 16.10.2004.

Champagne, A., Gunstone, R., & Klopfer, L. (1985). Effective Changes In Cognitive Structures Among Physics Students. (Edit: L. Pines). New York: Academic Pres.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives apportees par une approche anthropologique, Recherches en Didactique des Mathematiques 12(1):77-111.

Clement, J. (1982). Student preconceptions in introductory mechanics. American Journal of Physics, 50(66).

Cohen, L., and Manion, L., & Morrison, K., (2000) (5th Edition), Research Methods in Education, London: Routledge Falmer.

Cornu, B.: (1981) Quelques obstacles a l'apprentissage de la Notion de limite, Recherches en Didactique des Mathematiques 4, pp. 236-268.

Çepni, S. (2001). Araştırma ve Proje Çalışmalarına Giriş, Erol Ofset, Trabzon.

Çolak, H., (2002) Limit Öğretiminde İki Farklı Öğretim Durumunun Karşılaştırılması, Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi.

Davis, Robert B., & Vinner, Shlomo (1986). The Notion of limit: Some seemingly unavoidable misconception stages, *Journal of Mathematical Behavior*, 5,281-303.

Demirel Ö. (2005). Öğretme Sanatı. PegemA Yayıncılık.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 25-41)

Dubinsky, E., Cottrill, J., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., Vidakovic, D., (1996), Understanding The Limit Concept: Beginning with a Coordinated Process Schema, *Journal of Mathematical Behaviour*.

Dubinsky, E., Schwingendorf, K., (2004), *Calculus, Concepts, Computers and Cooperative Learning (C4L)*, The Purdue Calculus Reform Project.

Durmuş, S. (2004). Matematikte Öğrenme Güçlüklerinin Saptanması Üzerine Bir Çalışma. *Kastamonu Eğitim Dergisi*. 12(1), 125-128, (Mart, 2004).

Erbaş, K., Ersoy, Y., (2002). “Dokuzuncu Sınıf Öğrencilerinin Eşitliklerin Çözümündeki Başarıları ve Olası Kavram Yanılgıları”, V.Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi, ODTÜ, Ankara, s.225.

[Eric D. 1989. Hispanic and Anglo Students' Misconceptions in Mathematics. http://ericae.net/ED313192.htm](http://ericae.net/ED313192.htm)

Eryılmaz, A. ve Sürmeli, E., (2002). “Üç-Aşamalı Sorularla Öğrencilerin Isı ve Sıcaklık Konularındaki Kavram Yanılgılarının Ölçülmesi”, V.Ulusal Fen ve Matematik Eğitimi Kongresi, ODTÜ, Ankara, s.110.

Ferrini-Mundy, J ve Graham, K. (1994). Research in calculus learning: Understanding of limits, derivatives and integrals. In J.J. Kaput ve E. Dubinsky (Eds.), *Research Issues in Mathematics Learning: Preliminary Analyses and Results* (pp.32-45).

Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics.

Fey, J. (1984) Computing and mathematics: The impact on secondary school curricula. Reston, VA: The National Council of Teacher of Mathematics.

Fischbein, E. (1987). Intuition in science and mathematics. Dordrecht, The Netherlands: Reidel.

Fischbein, E. (1993). The interaction between the formal and the algorithmic and the intuitive components in a mathematical activity, in R. Biehler, R. W. Scholz, R. Straser ve B. Winkelmann (Eds.), Didactics of mathematics as a scientific discipline (pp. 231-345). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Fisher, K. M. (1985), A Misconception in Biology: Aminoacids and Translation, Journal of Research in Science Teaching, vol.22,pp.53-62.

Francis, E. (1992). The Concept of Limit in College Calculus: Assessing Student Understanding And Teacher Beliefs. Dissertation Abstracts International, 53, 3465A.

Gilbert, J. K., (1977). "The study of student misunderstandings in the physical sciences", Research in Science Education 7, p.165–171.

Gillman, L. (1997). Rigor in Calculus, Notices of American Mathematical Society .44 (8), 932-934 (September).

Graeber, A., Tirosh, D, ve Glover, R. (1989), Preservice teachers' misconceptions in solving verbal problems in multiplication and division. Journal for Research in Mathematics Education, 20, 95-102.

Graham, K., & Ferini-Mundy, J. (1989). Anexploration of students understanding of central concepts in calculus. San Francisco, CA: The Annual American Educational Research Association

Greenwood J. J. (1993), Teaching and Assessing Mathematical Power and

Mathematical Thinking, The Arithmetic Teacher, Nov 1993, 41,3: ProQuest Education Complete pg.144.

Guralnik, D.B. (1986). Webster's new world dictionary. 2nd ed., New York: Prentice Hall Press.

Hammer, D. (1996). More than misconceptions: Multiple perspectives on student knowledge and reasoning, and an appropriate role for education research. American Journal of Physics, 64(10), 1316-1325.

Harel, G. & Tall, D. (1989). The General, the Abstract, and the Generic in Advanced Mathematics. For the Learning of Mathematics, 11(1), 38–42

Hewson, P. W. ve Hewson, M. A. G. (1984). The role of conceptual conflict in conceptual change and the design of science instruction. Instructional Science, 13, 1-13.

Hiebert, J. ve Carpenter, T. P., 1992. Learning and Teaching With Understanding, Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, 65-97, NCTM, Macmillan, New York.

Hiebert, J. (1992). Reflection and communication: Cognitive considerations in school mathematics reform, International Journal of Educational Research, 17(), 439–456.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics (pp. 1-27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Hiebert J. ve Wearne, D. (1993) Instructional Tasks, Classroom Discourse and Students Learning in Second Grade Arithmetic, American Educational Research Journal, 30(2) 393-425.

Hiebert, J., Morris, A. K. ve Glass, B. (2003). Learning to learn to teach: An experiment model for teaching and teacher preparation in mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 6, 201-222.

Hofe, R. vom (1998b): Probleme mit dem Grenzwert-Genetische Begriffsbildung und geistige Hindernisse-Eine Fallstudie aus dem computergestützten Analysisunterricht. in: *Journal für Mathematik-Didaktik*, to appear 1998, 35 p.

Jordaan, T. (2005). Misconceptions of the limit concept in mathematics course for engineering student. Yüksek lisans tezi. University of South Africa.

Kabaca, T. (2006). "Limit kavramının öğretiminde bilgisayar cebri sistemlerinin etkisi". Doktora tezi. Gazi Üniversitesi, Ankara.

Karaca, E. (2006). "Öğretimi Planlama, Uygulama ve Değerlendirme Yeterliklerine Yönelik Bir Algı Ölçeği". *Eğitim Araştırmaları Dergisi*, 25 (6), s.119-128.

Karasar, N. (1999). Bilimsel Araştırma Yöntemi, Nobel Yayın Dağıtım, 9. Basım, Ankara.

Landsell, J. M. (1999). Introducing Young Children To Mathematical Concepts: Problem With "New" Terminology. *Education Studies*, Vol. 25, No. 3, s. 327-333.

Liu P. H (1996), Do teachers need to incorporate the history of mathematics in their teaching?, *The Mathematics Teacher*. Reston: Sep .Vol.96, Iss. 6; pg. 416.

McCloskey, M. (1983). Naive theories of motion. in D. Gentner ve A. Stevens (Eâs.), *MentMÍ Models* (pp. 299-324). NJ: Lawrence Erlbaum, Hillsdale.

MEB (2005a). Orta Öğretim Matematik (9, 10, 11 ve 12. Sınıflar) Dersi Öğretim Programı, Ankara: Devlet Kitapları Basımevi.

Mirasyedioğlu, S. (komisyon başkanı) (2005), Orta Öğretim Matematik (9, 10,

11 ve 12. sınıflar) Dersi Öğretim Programı, T.C. MEB. Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı, Ankara.

Molodsij, Vlademir.N., (1977). Studien zur philosophischen Problemen der Mathematik (Ocerki po filosofskim vobramasam matematiki) Berlin: Dt. Verl. d. Wissenschaften.

Monaghan, J. ve Ozmantar, M. F. (2006). Abstraction and consolidation. Educational Studies in Mathematics, 62(3), 233-258.

Monaghan, J., Shyshiow, S. and Tali, D., (1994) Construction of the Limit Concept with a Computer Algebra System, Proceedings of PME 18, 1, pg.279-286.

Monaghan, John (1991). Problems with the language of limits, *For the Learning of Mathematics*, 11, 3, 20-24.

Moralı, S., Koroğlu, H. ve Çelik, A., (2004). “Buca Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmen Adaylarının Soyut Matematik Dersine Yönelik Tutumları ve Rastlanan Kavram Yanılgıları”, Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi, 24(1), s.161-175.

Morman Thomas (1981), Argumentieren, Begründen, Verallgemeinern. Zum Beweisen im Mathematikunterricht. Königstein/Ts.: Scriptor.

Morris, C., (1996).Academic Press Dictionary Of Science And Technology, Academic Press.

Murphy, D. L., (2002), Computer Algebra Systems in Calculus Reform.

NCTM, 1991. Professional Standarts for Teaching Mathematics, Reston, VA.

NCTM (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, Va.

New South Wales Department of Education and Australian Council for

Educational Research, (1972).

Novak, J. ve Gowin, B., 1998. Learning How To Learn, Cambridge University Press, USA.

Özbağcı, B. (2003), Matematik Dünyası Dergisi; 2003-II Güz Dönemi Sayısı, S.63-64

Piaget, J. (1977), The Development of thought: Equilibrium of cognitive structures, Newyork, Viking Press.

Polya, G. (1957) How To Solve it. Second edition. Doubleday Anchor Books and Company, Inc.

Porter, M. K. ve Masingila, J., O., 2000. Examining The Effects of Writing on Conceptual And Procedural Knowledge in Calculus, Educational Studies in Mathematics, 42.

Przenioslo, M., (2004), Images Of The Limit Of Function Formed in the Course of Mathematical Studies At The University, Educational Studies in Mathematics, 55: 103-132.

Rittle-Johnson, B. ve Koedinger, K. R., 2002. Comparing Instructional Strategies For Integrating Conceptual And Procedural Knowledge, Proceedings of the Annual Meeting of the North Psychology Of Mathematics Education, 1-4.

Robson, C. (1998). Real world research. Blackwell Publishers ltd., Oxford, UK.

Rosnick, P., ve Clement, J. (1980). Learning without understanding: The effect of tutoring strategies on algebra misconceptions. Journal of Mathematical Behavior, 5(1), 3-27.

Sabella, M.S., Redish, E. F., (1995). Student understanding of topics in linear

algebra, Physics Education Research Group University of Maryland Physics Department College Park, 1-6

Sanchez, R., A. (1996), Teacher's and Students' Mathematical Thinking in a Calculus Classroom: The Concept of Limit, UMI Microform 9700247, Doktora Tezi, Florida State University, College of Education, USA.

Science Teaching Reconsidered. 1997. National Academy of Sciences/National Research Council. National Academy Press. USA.

Skemp, R. R. (1971). The Psychology of Learning Mathematics, Penguin Books, Middlesex, England.

Skemp, R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *Arithmetic Teacher*, 26(3). 9-15.

Sierpiska, A. (1987). Humanities Students and Epistemological Obstacles Related to Limits. *Educational Studies in Mathematics*, 18, 371-397.

Smith, J. P., diSessa, A. A. ve Roschelle, J. (1993). Misconceptions reconceived: A constructivist analysis of knowledge in transition. *The Journal of the Learning Sciences*, 3(2), 115-163.

Swadener, Marc and R. SOEDJADI. (1988). Values, Mathematics Education And The Task Of Developing Pupils' Personalities: An Indonesian Perspective. *Educational Studies In Mathematics*. Vol. 19, No:2, May, s. 193-208.

Szydlik, J. (2000). Mathematics Beliefs and Conceptual Understanding of Limit of Function. *Journal Research in Mathematics Education*, 31(3), 258-276.

Şimşek, H.; Yıldırım, A. (2003). Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri. Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Star, J., R., 2002. Re-“Conceptualizing” Procedural Knowledge in Mathematics,

Reports, Descriptive, ED 472948.

Tall, D. (1988). Concept Image and Concept Definition. Senior Secondary Mathematics Education, QW&OC Utrecht, 37-41.

Tall, D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), Advanced mathematical thinking (pp. 3-21). Dordrecht: Kluwer.

Tall, D. O. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics, 12, 151-169.

Tall, D. O. (1987). Constructing the concept image of a tangent. Proceedings of the Eleventh International Conference of P.M.E., Montreal, III 69-75.

Tall, D. ve Thomas, M., 1991, Encouraging Versatile Thinking in Algebra Using the Computer, Educational Studies in Mathematics, 22, 2, 125-147.

Todorov, T.D. (2001), Back to classics: teaching limits through infinitesimals, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 32, 1, 120.

Toumasis, C. (1995). Concept Worksheet: An Important Tool For Learning. The Mathematics Teacher. February, Vol.88, No:2, s. 98-100.

Türk Dil Kurumu. (2005). Türkçe Sözlük. Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları.

Van De Walle, J. E. (1989), Elementary School Mathematics, Commonwealth University. Virginia.

Vinner, S. & Hershkowitz, R. (1980). Concept Images and some common cognitive paths in the development of some simple geometric concepts. Proceedings of the Fourth International Conference of P.M.E., Berkeley, 177-184.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 14, 293-305.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65 – 81). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Viennot, L. “Spontaneous Reasoning in Elementary Dynamics” *European Journal Science Education*, sayı:1, 1979, ss. 205-221.

Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, 356-366.

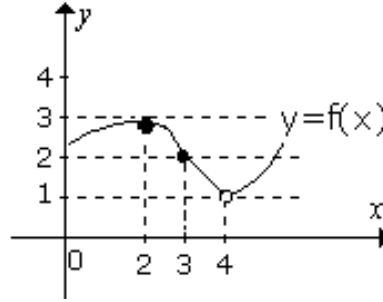
Williams, Steven R. (1991). Models of limit held by college calculus students, *Journal for Research in Mathematics Education*, 22, 219-236.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2000). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri*. Ankara Seçkin Yayınevi.

Yıldırım, C. (1999), *Matematiksel Düşünme, Remzi Kitabevi, İstanbul*

Ek-1 Tek değişkenli reel fonksiyonların limit ve sürekliliği hakkındaki bilişsel düzey belirleme test soruları

- 1) Limit sözcüğünü duyduğunuzda aklınıza gelen ilk şey nedir? Bu sözcüğün sizde neleri çağrıştırdığını yazınız.
- 2) Sizce limit kavramı neden ortaya atılmıştır? Düşüncelerinizi yazınız.
- 3) Bir fonksiyonun bir noktadaki limitinin var olmasının önemi sizce ne olabilir?
- 4) Aşağıda grafiği verilen fonksiyonun $x=4$ deki limitini belirlemek için yapılması gerekenleri yazınız.



- 5) Limitin aşağıdaki tanımını göz önüne alarak aşağıdaki soruları cevaplandırınız.

Tanım: $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve a da A cümlesinin bir yığılma noktası olsun.

Her $\varepsilon > 0$ için eğer $|x - a| < \delta$ olduğunda $|f(x) - L| < \varepsilon$ kalacak şekilde en az bir $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa x , a ya yaklaştığında f nin limiti “ L ” dir denir ve

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

yazılır.

- a. Tanımdaki ε neyi temsil etmektedir?
- b. Tanımdaki δ neyi temsil etmektedir?

- c. Tanımda yer alan “her $\varepsilon > 0$ ” ile kastedilen nedir? Burada neden “her” kelimesi kullanılmıştır, bunun yerine “en az bir” ifadesi kullanılamaz mı? Açıklayınız.
- d. “En az bir $\delta > 0$ sayısı” ile ne kastedilmektedir? Burada neden “en az bir” kelimesi kullanılmıştır? Açıklayınız.
- e. $|x - a| < \delta$ eşitsizliği ne anlam taşımaktadır? Açıklayınız.
- f. $|f(x) - L| < \varepsilon$ eşitsizliği ne anlam taşımaktadır? Açıklayınız.
- g. Tanımdaki L-sayısı neyi temsil etmektedir. Bunu “fonksiyonun grafiği” kavramını kullanarak açıklayınız.
- h. Şu ana kadar verdiğiniz cevapların bir özeti olarak bir fonksiyonun bir noktadaki limitinin ne olduğunu kendi ifadelerinizle açıklayınız.

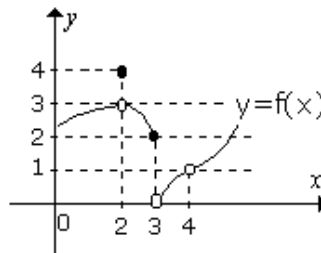
6) Yukarıdaki tanıma dikkate alarak; $\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 1) = 7$ olduğunu gösteriniz.

7) $f(x) = \lfloor \sin x \rfloor$ ile verilen fonksiyonun $x = \pi$ noktasındaki limitini araştırınız.

Vereceğiniz cevapların gerekçelerini yazınız.

8) $x \rightarrow 0$ için $f(x) = \frac{1}{x^2}$ fonksiyonunun varsa limitini bulunuz. Yoksa nedenini açıklayınız.

9)



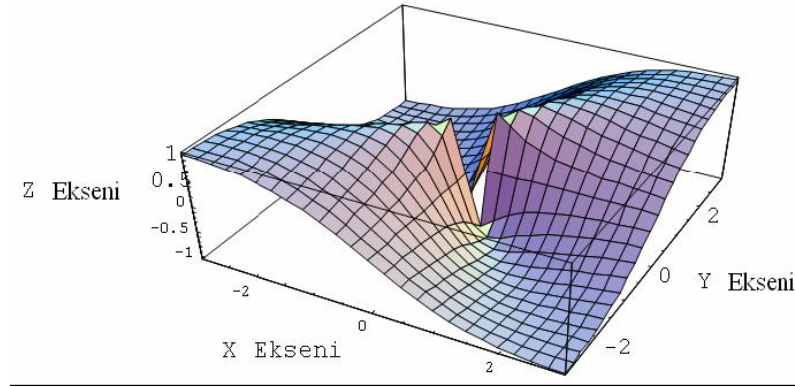
Üstte grafiği verilen f fonksiyonunun $x=2$, $x=3$ ve $x=4$ noktalarındaki limitleri nelerdir?

Bulunuz. Nedenlerini açıklayınız.

Ek-2 Tek değişkenli reel fonksiyonların limit ve sürekliliği hakkında yürütülen yarı yapılandırılmış görüşmeler

Aday M.K. İle Yapılan Görüşme Sonuçları

Araştırmacı: $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir.



Yukarıda verilen fonksiyonun grafiğine baktığınızda bu fonksiyonun sürekliliği ile ilgili ne söyleyebilirsiniz?

M.K.: Benim bildiğim sürekli fonksiyonlarda bir kopma olmaması ya da fonksiyonu tanımsız yapacak bir değer bulunmaması lazım. Bu yüzden verilen fonksiyon bence sürekli dir.

Araştırmacı: Grafikten ne anlıyorsun? Fonksiyona bakarak fonksiyonun sürekliliği hakkında bir şey söyleyebilir misin? 3 boyutlu grafiği verilen bir fonksiyonun sürekliliği hakkında ne söyleyebilirdin?

M.K.: Bu grafiğe bakarak kesin bir şey söylemek çok zor. Burada fonksiyonda herhangi bir kopma gözük müyor. Buradan hiçbir x ve y için fonksiyon tanımsız

olmuyor, yani kopma gözüküyor. Bu durumda fonksiyonun sürekli olduğunu söyleyebiliriz.

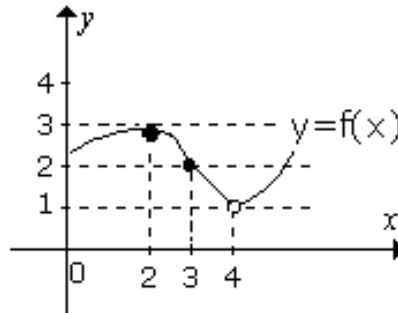
Araştırmacı: $f(x) = \sin x$ ile verilen fonksiyonun grafiğini birlikte çizelim...

M.K.: Hangi aralıkta çizeyim?

Araştırmacı: $(-\pi, \pi)$ aralığında. Peki bu fonksiyonun $x=0$ noktasındaki limiti hakkında ne dersiniz?

M.K.: Normalde bir fonksiyonun verilen bir noktadaki limitini bulmak için fonksiyonun o nokta etrafında tanımlı olması lazım. Burada $x=0$ noktasının her iki tarafında da fonksiyon tanımlıdır ve her iki taraftan da $x=0$ 'a yaklaşıldığında fonksiyonun $y=0$ noktasına yaklaşmaktadır. Dolayısıyla fonksiyonun $x=0$ noktasındaki limiti 0'dır diyebiliriz.

Araştırmacı: Aşağıda grafiği verilen fonksiyonun sürekliliği hakkındaki düşüncelerinizi benimle paylaşır mısınız?



M.K.: $x=4$ noktasında sürekli değildir, çünkü fonksiyonun o noktasında almış olduğu değer limitine eşit olması gerekir. $x=4$ noktası fonksiyonun tanım kümesinde değildir. O yüzden fonksiyonun bu noktada limiti var ama sürekli değildir. $x=0$ noktasında sağdan limiti var ama soldan limiti için bir şey söyleyemeyiz. O yüzden bu noktada da süreksizdir. Ama diğer noktalarda sürekli dir.

Aday M.T. İle Yapılan Görüşme Sonuçları

Araştırmacı: *Limitin “epsilon-delta tekniği” tanımında adı geçen epsilon ve delta sizin için ne ifade ediyor?*

M.T.: *Epsilon x-eksenindeki belli bir sayının komşuluğudur. Buna karşılık gelen, görüntüsünün y eksenindeki sayının etrafındaki komşuluk da delta komşuluğudur. Benim aklıma bunlar geliyor.*

Araştırmacı: *x reel bir sayı olmak üzere, $|x - 3| < 2$ eşitsizliğinin çözüm kümesi sizin için ne ifade ediyor?*

M.T.: *1 ile 5 arasındaki tüm sayılar.*

Araştırmacı: *Burada 3 sayısı neyi ifade eder?*

M.T.: *Bu eşitsizliğin çözüm kümesini bulmak için kullandığımız bir sayı. Bunu grafik üzerinde göstermek zor. Çözüm kümesi içinde 1 ile 5 ‘in arasında bir yer.*

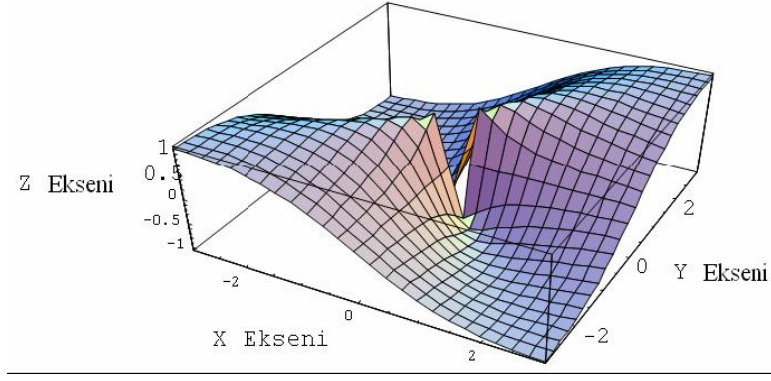
Araştırmacı: *Peki 2 nedir?*

M.T.: *2 noktasıyla bu fonksiyonu sınırlandırmış olduk. Sınırları belirledik. 2 den küçük değerleri aldık hep, 2 den büyük değerler bizi ilgilendirmiyor.*

Araştırmacı: *Grafik üzerinde 2 yi gösterebilir miyiz?*

M.T.: *Evet. 3 den küçük, yine arada bir yerde.*

Araştırmacı: *$f(x,y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir.*



Yukarıda verilen fonksiyonun grafiğine baktığınızda bu fonksiyonun sürekliliği ile ilgili ne söyleyebilirsiniz?

Mesela bana bu fonksiyon üzerinde (1, 1, 1) noktasını gösterebilir misin?

M.T.: *x-eksininde 1 burada, y ekseninde burada, z ekseninde ise burada. O halde burada olabilir. (Yanlış yeri gösteriyor)*

Araştırmacı: ***Sürekliliği hakkında ne diyebilirsin?***

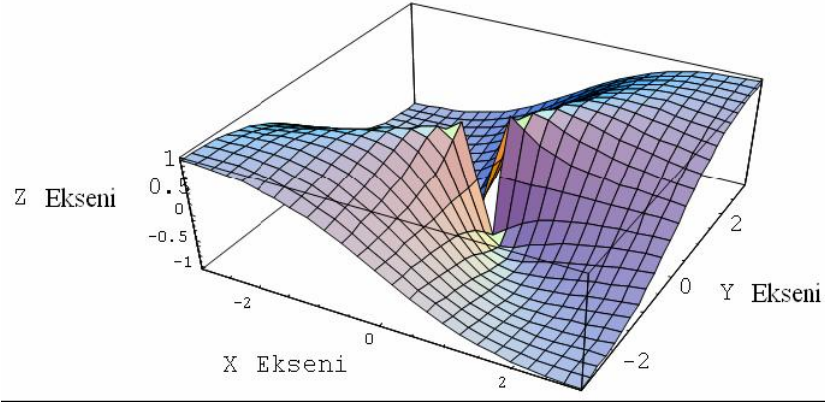
M.T.: *Ben 2 boyutlu düşünebiliyorum. Bu kesitte sürekli, burada da sürekli. O yüzden, tam bir fikrim yok, 3 boyutlu olduğu için tam bilmiyorum.*

Araştırmacı: ***Peki sadece fonksiyonun cebirsel ifadesine bakarak bir şey söyleyebilir misin?***

M.T.: *Fonksiyon bir aralıkta türevlenebilirse o aralıkta süreklidir diye bir teoremimiz vardı. Burada $-x$ e göre türev bölü, y ye göre türev diye bir şey vardı, liseden kalma bir şey. Biraz önceki teoremi de burada (üniversitede) gördüm. İki değişkenli fonksiyonların türevlenebilmesini görmedik ama lisedeki bilgilerime göre bu fonksiyon türevlenebilir diyebiliriz, o halde sürekli.*

Aday M.Y. İle Yapılan Görüşme Sonuçları

Araştırmacı: $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ ***fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir.***



Yukarıda verilen fonksiyonun grafiğine baktığınızda bu fonksiyonun sürekliliği ile ilgili ne söyleyebilirsiniz?

Buna başlamadan önce grafik üzerinden $(1, 1, 1)$ noktasını gösterebilir misin?

M.Y.: Şöyle, ortada bir yerde. (Doğru yeri gösterdi)

Şu açık aralıkta, kesik yerde sürekli değildir, pardon ben tanımlı olmakla karıştırdım. Tanımlı olduğu yerde sürekli dir.

Araştırmacı: Grafiğe bakarak söyleyebilir misin?

M.Y.: Bu fonksiyon sürekli değildir. Şu açık aralıkta tanımlı değildir. Orda aldığı değer, görüntüsü. Biraz karıştırdım galiba.

Araştırmacı: Sürekli değil ise süreksizlik noktası hangisidir? Eğer grafik sana bir ipucu vermediyse fonksiyona bakarak bir şey söyleyebilir misin?

M.Y.: $(0, 0, 0)$ noktasında sürekli değildir.

Araştırmacı: Böyle bir grafikte ilk defa mı karşılaşıyorsun?

M.Y.: Evet, ilk defa.

Araştırmacı: *Böyle bir fonksiyonla da mı ilk defa karşılaşıyorsun?*

M.Y.: *Hayır, bu tür fonksiyonları gördük de, grafiğini ilk defa görüyorum. Bu fonksiyonun grafiği bana biraz karışık geliyor.*

Araştırmacı: *Ama “(0, 0, 0) noktasında sürekli değildir” dedin?*

M.Y.: *Evet sürekli değildir, çünkü o noktada tanımlı değildir.*

Araştırmacı: *Limitin “epsilon-delta tekniği” tanımında adı geçen epsilon ve delta sizin için ne ifade ediyor?*

M.Y.: *Epsilon herhangi bir noktanın komşuluğunu oluşturmak için seçtiğimiz bir pozitif reel sayı. Delta da bu pozitif reel sayıya karşılık gelen, görüntülerin oluşturduğu aralıkta bir pozitif reel sayıdır.*

Araştırmacı: *Tanım: $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve a da A cümlesinin bir yığılma noktası olsun.*

Her $\varepsilon > 0$ için eğer $|x - a| < \delta$ olduğunda $|f(x) - L| < \varepsilon$ kalacak şekilde en az bir $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa x , a ya yaklaştığında f nin limiti “ L ” dir denilmekte ve

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

şeklinde sembolik olarak gösterilmektedir.

Limitin yukarıdaki tanımı göz önüne alındığında, tanımdaki L sembolü sizce neyi temsil etmektedir? Düşüncelerinizi benimle paylaşır mısınız?

M.Y.: *x sayıları değişken olduğu için onları a noktasına yaklaştırdığımızda, görüntüleri de belli bir sayıya yaklaşmaktadır. Bu sayı da fonksiyonun limitidir. Bunu da L ile gösteriyoruz.*

Araştırmacı: x reel bir sayı olmak üzere, $|x-3| < 2$ eşitsizliğinin çözüm kümesi sizin için ne ifade ediyor?

M.Y.: Çözdü.

Araştırmacı: Peki bu çözüm kümesinin belirttiği aralığı bana sayı doğrusu üzerinde gösterebilir misin?

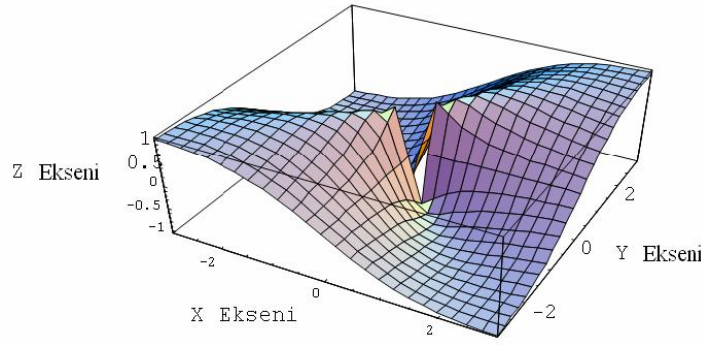
M.Y.: $(1,5)$ Bu bir açık aralık, bu açık aralıktaki tüm değerler.

Araştırmacı: 2 ve 3 sayılarının bu eşitsizlikteki görevleri sizce nedir?

M.Y.: Merkezi 3 kabul eden, 2 birim uzaklıktaki noktaları alıyoruz.

Aday G.K. İle Yapılan Görüşme Sonuçları

Araştırmacı: $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir.



Yukarıda verilen fonksiyonun grafiği hakkında neler düşünüyorsunuz?

G.K.: Biz henüz x - y - z eksenlerinde grafik çizmeye başlamadık. Sadece lineer derslerinde vektör çiziminde 2 boyutlu grafikler çiziyoruz.

Araştırmacı: Sizce sürekli bir fonksiyon mudur?

G.K.: Bence 0 noktasında bir kopma olur.

Araştırmacı: Bunu neye göre söylüyorsunuz?

G.K. : Fonksiyonun ifadesine göre. $x=0$ ve $y=0$ noktasında bir tanımsızlık oluyor. Bu nedenle 0 noktasında bir kopma olabilir. 0 dan öncesi ve 0 dan sonrası tanımlı olabilir ama 0 noktasında tanımlı değildir, o yüzden burada bir kopma olabilir.

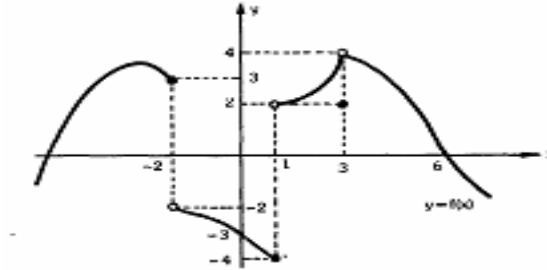
Araştırmacı: Grafikten süreklilik hakkında bir şey söyleyebilir misiniz?

G.K. : Dikkat çekici olan yer zaten şurası, hepsi burada toplanıyor. Burası kopma noktası olabilir.

Araştırmacı: Limit kavramı ile sonsuzluk kavramı arasında nasıl bir ilişki kurulabilir?

G.K.: Limit, fonksiyonun yakınsadığı bir sayıdır. Sonsuzluk ise erişilemeyen bir kavram. Sonuçta limitle fonksiyon için bir değer bulabiliyoruz ama sonsuzluk dediğimizde bir değer söz konusu değildir.

Aday A.S. İle Yapılan Görüşme Sonuçları



Yukarıdaki f fonksiyonu için aşağıdakileri bulunuz.

- | | |
|-------------------------------------|----------------------------------|
| a) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$ | e) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ |
| b) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$ | f) $\lim_{x \rightarrow 6} f(x)$ |
| c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ | g) $f(-2) \cdot f(1) \cdot f(3)$ |
| d) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ | |

Araştırmacı: Yukarıda grafiği görülen fonksiyonun $x=2$ deki limiti sizin için ne ifade etmektedir?

$x=2$ noktasına soldan yaklaşıldığındaki limiti nedir?

A.S.: 3 dür, çünkü soldan yaklaşırken, 3 sayısına doğru yaklaşıyor. O halde 3 dür.

Araştırmacı: *2 ye sağdan yaklaştığımızda?*

A.S.: *-2 dir derim, 2 nin sağından yaklaştığımızda fonksiyon -2 ye yaklaşıyor.*

Araştırmacı: *-2 de fonksiyon tanımlı mıdır?*

A.S.: *Değildir ama bu limiti etkilemez. Limite sağdan ve soldan bakıyoruz. Bu noktada fonksiyon tanımlı değildir, sürekli değildir ama bir limiti vardır.*

Araştırmacı: *$x=1$ deki limiti için ne söyleyebilirsiniz?*

A.S.: *$x=1$ noktasında da limiti yoktur. Sağ ve sol limitleri birbirine eşit değildir. Sağdan değeri 2, soldan değeri -4 olduğundan dolayı burada limit yoktur.*

Araştırmacı: *$x=3$ deki limiti için ne söyleyebilirsiniz?*

A.S.: *$x=3$ noktasındaki limit 4 dür. Sağdan ve soldan limit yaklaştığımızda fonksiyon 4'e yakınsar ama fonksiyonun bu noktadaki değeri 2 dir.*

Araştırmacı: *$x=6$ deki limiti için ne söyleyebilirsiniz?*

A.S.: *$x=6$ noktasındaki limiti 0 dır.*

Araştırmacı: *$x=3$ noktasındaki limit ne ifade eder?*

A.S. : *4'tür. $x=3$ deki değeri yok.*

Araştırmacı: *Fonksiyonun sürekliliği hakkında ne söylersiniz?*

A.S.: *Süreklidir, kopma yoktur.*

Araştırmacı: *$f(x) = \lfloor \ln x \rfloor$ ile verilen fonksiyonun grafiğini birlikte çizelim...*

A.S.: Önce $\sin x$ fonksiyonunu çizelim. Bu periyodik olarak ilerler. Birkaç x için değerini bulalım. Grafiği çizelim. Şimdi de mutlak değeri çizelim, alttaki kısmı üste alalım.

Araştırmacı: $(-\pi, \pi)$ aralığında. Peki bu fonksiyonun $x = \pi$ noktasındaki limiti hakkında ne dersiniz?

A.S.: $x = \pi$ deki limiti 0 dır. Sağdan soldan baktığımızda değerler 0 a yaklaşıyor. O yüzden 0 dır.

Aday H.Y. İle Yapılan Görüşme Sonuçları

Araştırmacı: $x \rightarrow 0$ için $f(x) = \frac{1}{x^2}$ fonksiyonunun varsa limitini bulabilir misiniz?

Yoksa nedenini açıklar mısınız?

H.Y.: $x=0$ da tanımsızlık var. Sınırsız artıyor, sonsuza yaklaşıyor. $x=0$ noktasındaki limiti sonsuzdur.

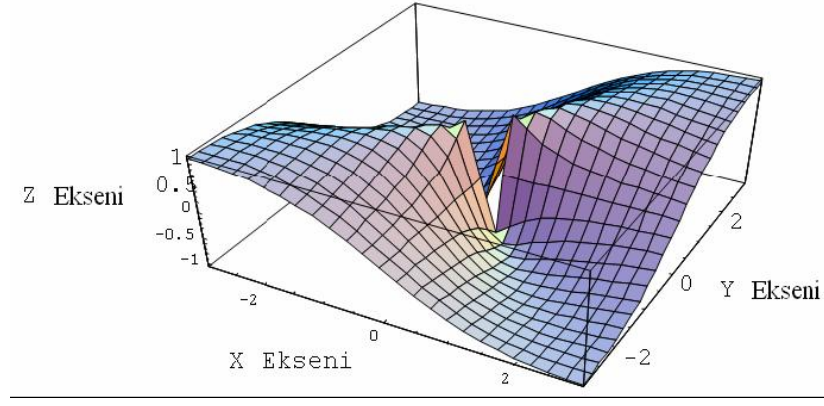
Araştırmacı: Neden?

H.Y.: Limit deyince sağdan ve soldan yaklaşmak lazım. İkisinde de sonsuza yaklaşıyor. O yüzden limiti sonsuzdur.

Araştırmacı: Limit kavramı ile sonsuzluk kavramı arasında nasıl bir ilişki kurulabilir?

H.Y.: Biraz önce limit $x=0$ da sonsuz dedik ama bunu fonksiyonun yaklaştığı bir yer olarak görebiliriz, yani sonsuza doğru gider deriz.

Araştırmacı: $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir.



Yukarıda verilen fonksiyonun grafiği hakkında neler düşünüyorsunuz?

Daha önce böyle bir grafik gördünüz mü?

H.Y.: Hayır görmedim. Bir kere sanırım karşılaşmıştım böyle bir şeyle ama hiç üzerinde durmamıştık, hemen geçmiştik.

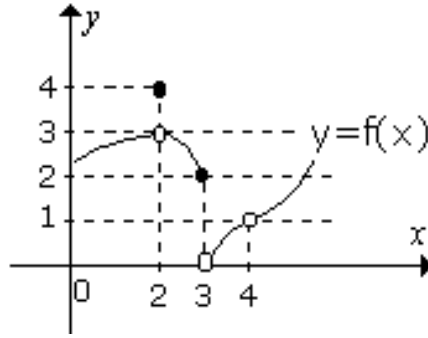
Araştırmacı: Sizce sürekli bir fonksiyon mudur?

H.Y.: Bence süreksizdir. $x=0$, $y=0$ 'daki limitini ve değerini bulmak gerekli. Burada önce limitini bulmak gerekli. Fonksiyona baktığımızda $x=0$ ve $y=0$ için $0/0$ çıkıyor, o da bir belirsizlik ifade ediyor. Bu belirsizlik de grafikte şurası herhalde. Burası açık gibi, burada bir boşluk var. Bence bu nokta orası gibi. Ancak sürekliliği hakkında grafik 3 boyutlu olduğundan dolayı bir şey söylemek çok zor. Yine de bence süreklidir.

Araştırmacı: Neden?

H.Y.: Süreklidir, çünkü 2 boyutlularda sağdan ve soldan limitlere bakılır önce, limiti varsa ve bu fonksiyonun o notadaki değerine eşitse süreklidir diyoruz. Ama bu grafik için böyle bir mantık yürütmek zor, çok soyut bir resim buradan bir şey söyleyemem. Burada bir boşluk varmış gibi geldi bana.

Aday N.B. İle Yapılan Görüşme Sonuçları



Araştırmacı: Üstte grafiği verilen f fonksiyonunun $x=2$ limiti nedir?

N.B.: 3, çünkü burada sürekli. Burada bu noktada tanımlı olup olmaması önemli değil, sürekli olduğu için limiti 3 dür.

Araştırmacı: $x=3$ deki limiti için ne söylersin?

N.B.: Limit yok, çünkü grafik çizdiğimizde elimizi kaldırmadan çizebiliyorsak, fonksiyona sürekli diyorduk. Sürekli olmadığı yerde limit yoktur diyorduk. O yüzden $x=0$ da limit yoktur.

Araştırmacı: $x=4$ deki limiti nedir?

N.B.: Var ve 1 dir. Soldan ve sağdan yaklaştığımızda 1 e geliyor. Yani limiti vardır. Limiti zaten yakınsamak demektir, o noktada o değeri alması şart değil.

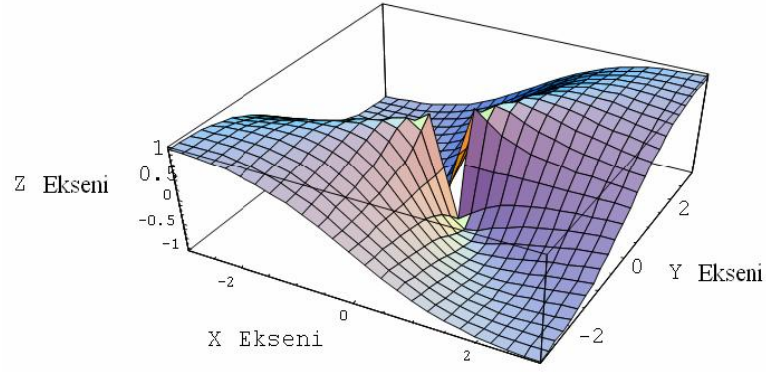
Araştırmacı: Burada limiti belirlemek için neler yapmak gerekir?

N.B.: Sağdan ve soldan yaklaştığımızda aynı değeri alıyorsa limit o değerdir.

Araştırmacı: $x=4$ noktasında fonksiyon sürekli midir?

N.B.: Sürekli, çünkü bunu ben sadece geometrik olarak açıklayabilirim. Burada sadece elimizi kaldırmadan çizebildiğimiz için fonksiyon $x=4$ noktasında sürekli. $x=4$ noktasında elimizi kaldırmıyoruz. O yüzden sürekli.

Araştırmacı: $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir.



Yukarıda verilen fonksiyonun grafiği hakkında neler düşünüyorsunuz?

Sizce sürekli bir fonksiyon mudur? Elimizi kaldırmadan grafiği çizebiliyorsak fonksiyon sürekli, demiştin. Peki, aynı metodu kullanarak bu fonksiyonun sürekliliği için ne söylersin?

N.B.: 3 boyutlu olarak çizmemiz mümkün değil. Sürekli değil gibi de gözüküyor.

Araştırmacı: Neden?

N.B.: Şimdiye kadar hep 2 boyutlu grafikler üzerinden gördük her şeyi. Bu 3 boyutlu ama bunu 2 boyutluya indirgemeye çalışıyorum. Ona benzetmeye çalışıyorum ama tam olarak benzetemesem de buradaki açıklığı bir doğru üzerinde bir kopukluk olarak görebiliriz. O yüzden burada sürekli değildir, diyorum.

Ek-3 Topoloji Dersi Almış 3. Sınıf Öğrencilerinin, limitin topoloji dersinde verilen tanımı ile limitin $\varepsilon - \delta$ tekniği ile verilen tanımı arasında bir bağ kurma konusunda bilişsel düzey belirleme test soruları

Tanım 1: $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve a da A cümlesinin bir yığılma noktası olsun.

Her $\varepsilon > 0$ için eğer $0 < |x - a| < \delta$ olduğunda $|f(x) - L| < \varepsilon$ kalacak şekilde en az bir $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa x , a ya yaklaştığında f nin limiti “ L ” dir denir ve

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

yazılır.

Tanım 2: $(E, \varphi), (F, \varphi')$ olmak üzere $f : E \rightarrow F$ bir fonksiyon ve $a \in E$ ve $b \in F$ olsun.

$$\forall V \in U_{(L)} \text{ için } \exists U \in U_{(a)} \ni f(U) \subset V$$

sağlanıyorsa x, a ya yaklaştığında f nin limiti “ L ” dir denir ve

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

yazılır.

- 1) Yukarıda verilen “Tanım 1” sizce neyin tanımıdır?
- 2) Yukarıda verilen “Tanım 2” sizce neyin tanımıdır?
- 3) Tanım 1 ve Tanım 2 arasında ne tür benzerlikler keşfedebildiniz?
- 4) Sizce hangi tanım daha sade?
- 5) Tanım 2’yi kullanarak $\lim_{x \rightarrow 1} (x + 3) = 4$ olduğunu gösterebilir misiniz?

Ek-4 Ön test soruları

1. Düzlemde tanımlı bir fonksiyonun bir noktada limitinin var olup olmadığına, sürekli olup olmadığına karar verebilmek için fonksiyonun hangi ayırt edici özelliklerinden yararlanılır?

2. 3 boyutlu öklidyen bir uzayda tanımlı bir fonksiyonun belirli bir noktada limitinin var olup olmadığına, sürekli olup olmadığına karar verebilmek için fonksiyonun hangi ayırt edici özelliklerinden yararlanılır?

Ek-5 İki değişkenli reel fonksiyonların limit ve sürekliliği hakkındaki bilişsel düzey belirleme test soruları

1. Kaynaklarda iki değişkenli bir fonksiyonun bir noktadaki limitini incelerken o noktaya mümkün olan bütün eğrilerle yaklaşılması tavsiye edilmektedir. Size göre böyle bir yaklaşımın, limitin belirlenmesine olan katkıları veya zararları neler olabilir? Açıklayınız.

2. $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ de $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$ ile verilen fonksiyonunun (0,0) noktasındaki limiti ve sürekliliği hakkındaki düşüncelerinizi yazınız.

3. $g(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ ile verilen fonksiyonun (0,0) noktasındaki limiti ve sürekliliği hakkındaki düşüncelerinizi yazınız.

4. $f(x,y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2}$ için $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} f(x,y)$ limitini inceleyiniz. Cevabınızın gerekçelerini açıklayınız.

Ek-6 İki değişkenli reel fonksiyonların limit ve sürekliliği hakkında yürütülen yarı yapılandırılmış görüşmeler

Aday H.Y. İle Yapılan Görüşme Sonuçları

Araştırmacı: *Limite neden ihtiyaç duyulmuştur?*

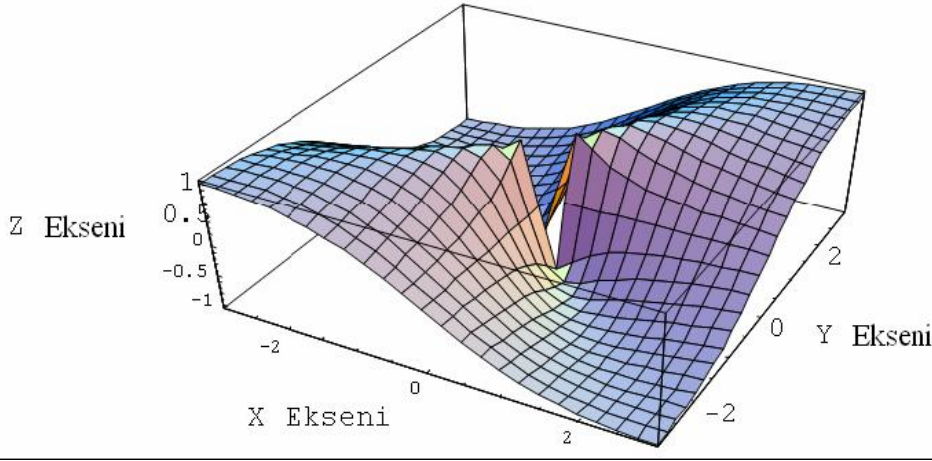
H.Y.: *Sonucu çok büyük veya çok küçük çıkan işlemleri kolaylaştırmak için.*

Araştırmacı: *Tek değişkenli fonksiyonlarda mı, yoksa çok değişkenli fonksiyonlarda mı limit bulmak daha zor?*

H.Y.: *Tek değişkenli fonksiyonlarda bir değerin hangi sayıya yaklaştığını tahmin etmek çok zor değildi. Tabi ki bulunması zor olan limit bulma problemleri de vardı*

ancak belirli işlemlerle sonucu bulmak mümkün oluyordu. Aynı şeyleri çok değişkenli fonksiyonlar için söylemek mümkün olmuyor. Tek değişkenli fonksiyonlarda sadece sayı doğrusu üzerinde çalışıyoruz, ancak örneğin üç değişkenli fonksiyonlar üzerinde limiti tahmin etmek çok zor, çünkü fonksiyonun şekli çok karmaşık.

Araştırmacı: $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir.



Yukarıda verilen fonksiyonun grafiği hakkında neler düşünüyorsunuz?
Sizce sürekli bir fonksiyon mudur?

H.Y.: Sürekli değil, çünkü $(0,0,0)$ noktasında fonksiyon tanımlı değil. Sürekli olması için öncelikle fonksiyonun o noktada limitinin var olması gerekir ve limit değerinin fonksiyonun o noktadaki değeri ile eşit olması gerekir. Bu en azından tek değişkenli fonksiyonlarda böyle idi. Çok değişkenli fonksiyonlarda bir açık daire olarak, fonksiyonun bu bölgedeki sürekliliği inceleniyor.

Araştırmacı: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x,y) \right)$ ifadesinden ne anlıyorsunuz?

H.Y.: Öncelikle $f(x,y)$ fonksiyonunda x 'ler sabit iken y 'leri 0'a yaklaşıyoruz. Ortaya çıkan fonksiyonda da x 'i 0'a yaklaştırarak limit değerini buluyoruz.

Araştırmacı: $\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x,y) \right)$ limiti hakkında ne düşünüyorsunuz?

H.Y.: Burada da tam tersini yapıyoruz. Önce y 'leri sabit tutup, x 'leri 0'a yaklaşıyoruz. Daha sonra y 'ler için 0 noktasında limit alıyoruz.

Araştırmacı: Bu iki limit için sonuçların eşit çıkması durumunda ne yaparsınız, sonuçların eşit çıkmasının sizce bir anlamı var mı?

H.Y.: Var, eğer sonuçlar eşit çıkarsa, diyelim ki her iki limit için de sonuç a gibi bir sayı çıktı, o zaman, “her iki limit de eşit ve sonuç a 'dır” deriz.

Araştırmacı: Bu durumu tek değişkenli fonksiyonlarda hangi duruma benzetiyorsunuz?

H.Y.: Bu durum tek değişkenli fonksiyonlarda sağdan ve soldan limitlerin bulunmasına benziyor. Eğer limitler eşitse “limit vardır”, değilse “limit yoktur” diyoruz.

Araştırmacı: Burada aslında $(0,0)$ noktasına iki farklı yoldan yaklaşıyor. Bu yaklaşımlar sonucu elde edilen limitler eşit olabilir ancak bu fonksiyonun $(0,0)$ noktasında limiti olduğunu göstermez.

H.Y.: Evet, hocam. İki farklı yoldan yaklaştığımızda eğer iki farklı sonuç elde ediyorsak, fonksiyonun aranan noktada limiti yoktur diyorduk, ancak limitlerin eşit olması limitin varlığı için yeterli değildi. Bunun için limitin arandığı noktaya tüm yollardan yaklaşmak gerekiyordu ve tüm yaklaşımların sonucu da aynı olması gerekiyordu.

Araştırmacı: Evet, örneğin $f(x,y)$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasındaki limitini bulmak için $y=x$ doğrusu ve $y=x^2$ eğrisi ile yaklaştığımızı düşünelim. Her iki yaklaşımda da sonucun eşit olduğunu varsayarsak, $(0,0)$ noktasında limitin var olduğunu söyleyebilir miyiz?

H.Y.: Hayır, ama farklı ise limitin olmadığını hemen söyleyebiliriz.

Araştırmacı: *Tebrik ederim.*

H.Y.: *Hocam, iki farklı yoldan yaklaştık, aynı sonuçları bulduk. Bu bize yine de bir limitin var olduğunu söyler mi?*

Araştırmacı: *Cevabı sen ver, diyelim ki üçüncü bir yaklaşım da limit bulamadık diyelim. Bu durum da hala o noktada limit mutlaka vardır diyebilir miyiz?*

H.Y.: *Evet, haklısınız hocam.*

Aday E.Ö. İle Yapılan Görüşme Sonuçları

Araştırmacı: *Tek değişkenli fonksiyonların grafiğine bakarak sürekliliğini nasıl tespit edersiniz?*

E.Ö.: *Grafiğin bir noktasında bir boşluk varsa, fonksiyonun o noktada sürekli olmadığını söyleyebiliriz. Yani grafiğini elimizi kaldırmadan çizebiliyorsak fonksiyona sürekli dir diyebiliyoruz. Ancak aynı düşüncelerle çok değişkenli fonksiyonların grafiğine bakarak sürekliliği hakkında fikir yürütmek çok zor. Şekiller çok karışık.*

Araştırmacı: *Bir fonksiyonun bir noktadaki limiti her zaman bir sayı (herhangi bir sayı) olmak zorunda mıdır?*

E.Ö.: *Limit ya bir sayıya eşittir ya da sonsuzdur ya da belirsizdir. Başka bir ihtimal yok ki zaten.*

Araştırmacı: *Limitin sonsuz olması ile belirsiz olması arasında bir fark var mıdır?*

E.Ö.: *Evet var. Limitin sonsuz olması, bir limitinin olduğunu gösterir ama tanımsız olması, sağ ve sol limitinin farklı olmasını gösterir.*

Araştırmacı: *Eğri boyunca ya da doğru boyunca yaklaşmak ne demektir?*

E.Ö.: *Şu anda limit hakkında mı konuşuyoruz?*

Araştırmacı: *Peki biz bir noktada fonksiyonun limitini araştırırken neden epsilon-delta tekniğini kullanıyoruz?*

E.Ö.: *Hesaplama kolaylığı sağladığı için. Bazı sorularda çözümü bulmak daha kolay oluyor.*

Araştırmacı: *Epsilon-deltayı kullanmak hoşunuza gidiyor mu?*

E.Ö.: *Hayır gitmiyor. Bir sürü farklı simge var ve yapılanlar hep havada kalıyor. Ne yapıldığının pek farkında değiliz. Sorularda hep deltayı epsilon cinsinden bulmamız isteniyor, buluyoruz ama bunu neden yaptığımızı tam bilemiyoruz, o yüzden yapılanlar hep havada kalıyor.*

Araştırmacı: *Biraz da konumuz dışına çıkalım. Analiz dersi hakkında neler düşünüyorsunuz?*

E.Ö.: *Analiz dersi daha çok uygulama ağırlıklı olduğu için analiz dersini çok seviyorum. Ayrıca analiz dersinin teorik kısmında anlatılanlar biraz havada kalıyor ama uygulama dersinde konular tekrar edilerek soru çözümleri yapıyoruz, o yüzden çok zevkli.*

Aday N.B. İle Yapılan Görüşme Sonuçları

Araştırmacı: *Uzayda tanımlı bir fonksiyonun bir noktadaki limitinin anlamı sizce nedir?*

N.B.: *Epsilon-delta tanımına göre, uzayda tanımlı bir fonksiyonun tahmin ettiğimiz limit noktasının epsilon komşuluğu, limitin arandığı noktanın delta yarıçaplı bir daire komşuluğu içinde kalmalıdır.*

Araştırmacı: *Bu sene incelediğiniz “çok değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği” konusunu öğrenirken, geçen yılki “tek değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği” kavramlarının herhangi bir katkısı olduğunu düşünüyor musunuz?*

N.B.: Tek değişkenli fonksiyonlarda limitin epsilon-delta tanımını anlamak daha kolaydı. İki değişkenli fonksiyonlarda dairesel bölgeyi ya da komşuluğu anlamak çok daha zor. Ayrıca limiti bulurken epsilon-delta tanımını yerine daha çok $y=x$ gibi doğrularla yaklaşıyoruz.

Araştırmacı: Peki, biz bir noktada fonksiyonun limitini araştırırken neden epsilon-delta tekniğini kullanıyoruz?

N.B.: Epsilon-delta tekniğini limitin ne olduğunu bulmak için değil, tahmin edilen bir limit değerinin aranan değer olup olmadığını ispatlamak için kullanılır. Örneğin bir fonksiyonun bir noktadaki limiti aranmış olsun ve biz sezgilerimizle bu limit değerinin a gibi bir sayı olduğunu tahmin edelim. İşte o zaman gerçekten de aranan limit değerinin a olup olmadığını ispat etmek için epsilon-delta tekniği kullanılır.

Araştırmacı: $g(x,y)=\frac{x-y+1}{x+y+1}$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasındaki limitini bulurken kullandığınız çözüm yönteminizi anlatır mısınız?

N.B.: Sanki burada limitin olmayacağını düşünüyorum o yüzden, önce y yerine $y=mx$ yazarım. Sonra sonuca bakarım. Bir de y yerine $y=mx^3$ yazarım. Eğer limitler farklı çıkarsa limit yoktur derim. Yani limitin olmadığını böylece göstermiş olurum.

Araştırmacı: Tamam, bu soruya tekrar döneceğiz ama önce şunu sormak istiyorum. y -değişkeni yerine neden $y=mx$ koyuyorsun ve burada m 'nin ne gibi bir etkisi var?

N.B.: Burada $y=x$ olur, $y=2x$ olur... yani ben bu şekilde genelleme yapmış oluyorum.

Araştırmacı: Peki, limitin olmadığını göstermek için sadece $y=mx$ değişken değişimini kullanmak yeterli olmuyor mu? Bu şekilde limit alındığında sonucun ne çıkmasını bekliyorsunuz?

N.B.: *Ha evet hocam sonuçta sadece m 'ye bağlı bir değer kalırsa bu bize limitin olmadığını göstermek için yeterli, çünkü m 'ler keyfi değişkenler olduğu için sonuçta limitler de değişmiş olacak.*

Araştırmacı: *Tamam o zaman, soruya dönecek olursak; sen bu yöntemi kullanırsın. Eğer sonuç m ye bağlı çıkarsa limitin olmadığını söylersin. Ama eğer sonuç m 'den bağımsız çıkarsa ne yaparsın?*

N.B.: *O zaman diyelim ki limitin değeri 1 çıktı, ikinci durumu yani $y = mx^3$ değişken değişimini yaparım ve eğer bu durumda da sonuç 1 çıkarsa limit değeri 1'dir derim. Ama emin değilim. O zaman sezgisel olarak limit değerini 1 bulduk diyelim, şimdi de epsilon-delta tekniğiyle bu sonucun doğru olup olmadığını kontrol ederim.*

Araştırmacı: *Çok değişkenli fonksiyonlarda limit konusunu işlerken limitleri bulurken hiç epsilon-delta tekniğini kullandınız mı?*

N.B.: *Evet, ama sadece teorik derste ele aldık, pek fazla üzerinde durmadık.*

Araştırmacı: *Peki, o zaman burada fonksiyonda $(0,0)$ noktasını x ve y değişkenleri için yerine koyun. Ne buldunuz?*

N.B.: *1*

Araştırmacı: *Fonksiyonun limitinin 1 olduğunu söyleyebilir miyiz?*

N.B.: *$(0,0)$ noktası için evet söyleyebiliriz.*

Araştırmacı: *Peki, neden ilk olarak aklınıza bu yöntem hiç gelmedi?*

N.B.: *Bu limiti tek değişkenli bir fonksiyon için sorsaydınız hemen bu yöntemi kullanırdım ama iki değişkenli bir fonksiyon olduğunda kafam karışıyor. Ayrıca böyle kolay bir soruyla daha önce hiç karşılaşmamıştık. Bu kadar kolay olabileceğini tahmin edemedim. Bize sorulan sorularda hep payda tanımsız veriliyor. Bu soruda da öyle zannettim.*

Aday A.S. İle Yapılan Görüşme Sonuçları

Araştırmacı: *Limite neden ihtiyaç duyulmuştur? Biz bir fonksiyonun limitini neden buluyoruz?*

A.S. : *İlk olarak bize “bir fonksiyonun belirli bir aralıkta bir sayıya yaklaşması” olarak tanıtıldı bize. Daha sonra limiti integralde alan hesaplamalarında, serilerin toplamında kullandık.*

Araştırmacı: *“Uzayda tanımlı bir fonksiyonun bir noktadaki limiti” ifadesinden ne anlıyorsunuz?*

A.S.: *Bir fikrim yok,*

Araştırmacı: *Limiti bulmak için fonksiyonun grafiğini zihinde canlandırmak şart mıdır?*

A.S.: *Ben genellikle fonksiyonunun grafiğine bakarak limite bakarım.*

Araştırmacı: *Peki, örneğin $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ fonksiyonun $(0,0)$ noktasındaki limiti bulmak için neler yaparsınız?*

A.S.: *Sessiz.*

Araştırmacı: *Bu fonksiyon tek değişkenli olsaydı, limiti nasıl bulurdun?*

A.S.: *Önce sağdan ve soldan yaklaştırdım. Büyük bir ihtimalle ikisi de aynı sayıya yaklaşacaktır. Dolayısıyla limit çıkan sayı olacaktı.*

Araştırmacı: *$f(x,y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasındaki limitini bulunuz.*

A.S.: Öncelikle fonksiyonun $(0,0)$ noktasında tanımsız olduğunu görebiliyorum ama limiti bulabileceğimi sanmıyorum.

Araştırmacı: Peki, çok değişkenli fonksiyonlarda limite iki farklı yoldan yaklaştığımızda sonuç her ikisinde de aynı çıkıyorsa, fonksiyonun limiti için ne dersiniz?

A.S.: Limit bulunan değer olmayabilir ama emin değilim.

Araştırmacı: Çok değişkenli fonksiyonlarda limiti bulmak için en garantili yol sizce hangisidir?

A.S.: Kutupsal koordinatları kullanmak daha iyi oluyor, çünkü sadeleştirmeler yapılarak tek değişkenli hale getiriyoruz ve tek değişkenli fonksiyonlar için limiti bulmak daha kolay oluyor.

Araştırmacı: Okulda çok değişkenli fonksiyonlarda limit ve süreklilik konusu işlenirken, tek değişkenli fonksiyonlardaki limit ve süreklilik konusunu nasıl kullandınız? Tek değişkenli fonksiyonlar için edindiğiniz bilgiler burada işinize yaradı mı?

A.S.: Zaten çok değişkenli fonksiyonlarda limit ve süreklilik konusu anlatılırken, eğitmen önce tek değişkenli fonksiyonlarda limit ve süreklilik konusu anlatıp, bunlar üzerine çok değişkenli fonksiyonlardaki limit ve süreklilik konusunu inşa ediyor.

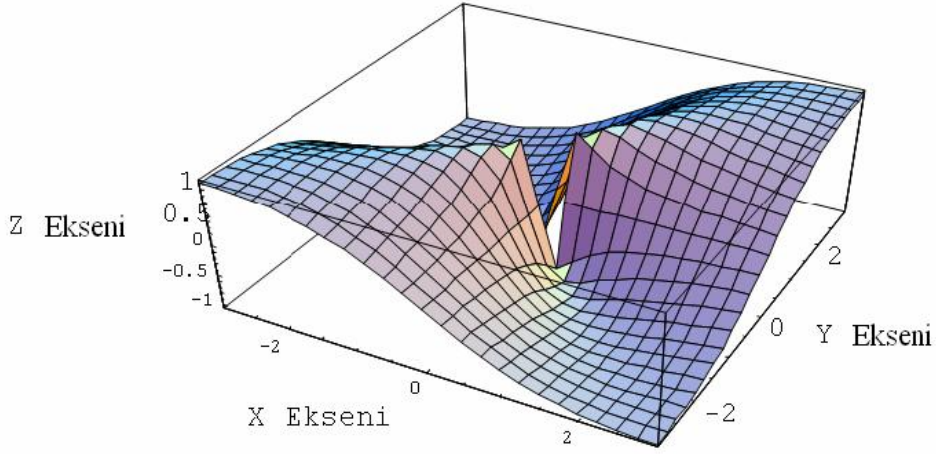
En çok iki değişkenli fonksiyonlarda epsilon-delta tekniğini anlatırken, tek değişkenli fonksiyonlardaki epsilon-delta tekniğinden yola çıkarak konuyu kavramaya çalıştık.

Aday E.D. İle Yapılan Görüşme Sonuçları

Araştırmacı: Bir fonksiyonun bir noktada sürekli olmasının sizce önemi nedir?

E.D.: Bir fonksiyon sürekli değilse, fonksiyonun grafiğinde atlamalar olur. Eğer fonksiyonun grafiği üzerinde bir takım işlemler yapılacaksa, biz fonksiyonun grafiğinin her noktasının sürekli olup olmadığını bilmek zorundayız.

Araştırmacı: $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir.

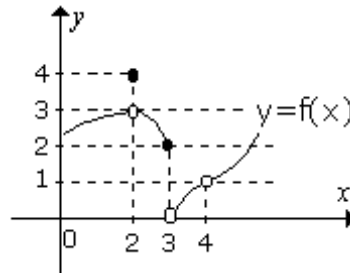


Yukarıda verilen fonksiyonun grafiği hakkında neler düşünüyorsunuz?

Sizce sürekli bir fonksiyon mudur?

E.D.: Sürekli bir fonksiyon değil, çünkü o noktada tanımlı değil. Orada bir boşluk var.

Araştırmacı:



Üstte grafiği verilen f fonksiyonunun $x=2$ noktasındaki limiti nedir? Ayrıca bu noktadaki fonksiyonun sürekliliği hakkında neler düşünüyorsunuz?

E.D.: 2 noktasında limiti var ama sürekli değil.

Araştırmacı: $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasındaki limitini bulunuz.

E.D.: Payda çember denklemine benzediği için burada kutupsal koordinatları kullanmak daha kolay olur.

Araştırmacı: Bir doğru boyunca, bir eğri boyunca vb. gibi ifadelerden neler anlıyorsunuz?

Örneğin $y=mx$ doğruları ile yaklaşmak ne demektir?

E.D.: Burada m bu doğru ailesinin eğimini ifade ediyor. Eğer limit varsa, yani $(0,0)$ noktasından geçen ve eğimleri m olan bütün doğrularla yaklaştığımızda hep aynı limit değerini vermelidir.

Araştırmacı: Şimdi aşağıdaki soruyu birlikte ele alalım. Öncelikle çözmeye a şıkından başlayalım.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

fonksiyonu veriliyor.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x,y) \right)$ ve $\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x,y) \right)$ limitlerini hesaplayınız.

b) $y=2x$ doğrusu boyunca $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ limitini hesaplayınız.

c) f fonksiyonunun $(0,0)$ noktasında limiti var mıdır?

E.D.: $\frac{0}{x^2} = 0$ olduğu için sonuç sıfırdır. Öbür limit için de aynı sonucu elde ederiz.

Araştırmacı: *Limiti için ne dersiniz?*

E.D.: *O halde limit 0 demektir, çünkü sağdan ve soldan limit değerleri aynıdır.*

Araştırmacı: *Çok değişkenli fonksiyonlarda limiti bulmak için en garantili yol sizce hangisidir?*

E.D.: *Aslında limiti bulmak için en garantili yöntem epsilon-delta yöntemi ancak çok değişkenlilerde bu yöntemi kullanmak çok zor, epsilon-delta yöntemini tek değişkenlilerde kullanmak kolay oluyordu.*

Aday E.C. İle Yapılan Görüşme Sonuçları

Araştırmacı: *Sizce tek değişkenli fonksiyonlar için mi, yoksa çok değişkenli fonksiyonlar için mi limiti bulmak daha kolay?*

E. C.: *Tek değişkenli fonksiyonlarda limiti bulmak daha kolay.*

Araştırmacı: *Neden öyle?*

E. C.: *Bu zamana kadar, lisede olsun, dershanede olsun hep tek değişkenli fonksiyonlarla uğraştık. Örneğin bir $y=f(x)$ tek değişkenli fonksiyonu için, fonksiyonun grafiğini çizmek ve bu grafik üzerinden yorum yapmak kolay. Ama iki değişkenli fonksiyonların grafiğini üç boyutlu uzayda zihinde canlandırması daha zor. Belki bazı kalıplaşmış işlemlerle limitleri bulunabiliyor ama fonksiyonun grafiğini zihinde canlandıramıyoruz.*

Araştırmacı: *“Uzayda tanımlı bir fonksiyonun bir noktadaki limiti” ifadesinden ne anlıyorsunuz?*

E. C.: *Derste anlatılanlarla da bağdaştırırsak, tek değişkenli fonksiyonlarda türev almak için belirli bir noktada teğetler çiziyoruz. Limiti varsa ve sürekli ise türevlenebilir diyoruz. Çok değişkenli fonksiyonlarda ise o noktadan geçen bir sürü doğru bulabilirim ve her biri için limitinin olması gerekir ve her biri için sürekli olmak*

zorunda. Dolayısıyla bu doğrularla bir düzlem tanımlıyor. Dolayısıyla verilen fonksiyonun istenen notadan geçen teğet bir düzlemin varlığını gösterir.

Araştırmacı: Eğri boyunca ya da doğru boyunca yaklaşmak ne demektir?

E. C.: Limiti aradığımız noktadan geçen eğriler boyunca limit aramaktır.

Araştırmacı: $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasındaki limitini bulunuz.

E. C.: Burada fonksiyon $(0,0)$ noktasında tanımsız olduğu için, fonksiyonu bu durumdan kurtarmak için dönüşümler yapmak gerekir. Örneğin kutupsal koordinatları kullanabilirim.

Araştırmacı: $y = x^2$ ile yaklaşmak ne anlama geliyor?

E. C.: $(0,0)$ noktasından geçen $y = x^2$ eğrisini ifade ediyor.

Araştırmacı: $g(x,y) = \frac{x - y + 1}{x + y + 1}$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasındaki limitini bulunuz.

E. C.: $(0,0)$ noktasındaki limiti yerine koyma yöntemiyle bulabiliriz.

Araştırmacı: Tek değişkenli fonksiyonlarda limit ve süreklilik konusu işlenmeden, çok değişkenli fonksiyonlarda limit ve süreklilik konusu anlatılsa sizce nasıl olur?

E. C.: Anlaşılmaz, çünkü tek değişkenli fonksiyonlarda bile birçok konu havada kalıyor. Bir de işin temelini bilmeden çok değişkenli fonksiyonları öğrenmek çok zor olur.

Araştırmacı: En çok sevdiğiniz ders hangisi?

E. C.: *Analiz, ancak teorik dersleri anlamakta güçlük çekiyorum. Konuyu hep uygulama derslerinde yaptıklarımızla anlayabiliyorum. Ayrıca bu derste ezber olmadığından benim için çalışması kolay bir ders oluyor.*

Ek-7 Excel’de Özet Tablo Fonksiyonu ve Kullanımı

Özet Tablo Excel’de çok az bilinen, ancak çok kullanışlı bir özelliktir. Verilerin özet tabloda analiz edilebilmesi için çok düzenli hazırlanmış bir veri tablosuna ihtiyaç vardır. Veritabanı tablosunda satırlarda veriler, sütunlarda alan adları vardır. Yeni bir uygulama yapabilmek ve bu uygulamada özet tablo kullanabilmek için verileri bu düzende girmek gerekir.

Özet Tablo fonksiyonunun kullanımı için yapılacak anlatımda Microsoft Excel 2003 programı baz alınmıştır. Diğer sürümlerde farklılıklar olabilir. Ancak mantık değişmez. Analizi yapılan tablonun bir örneği aşağıdaki gibidir.

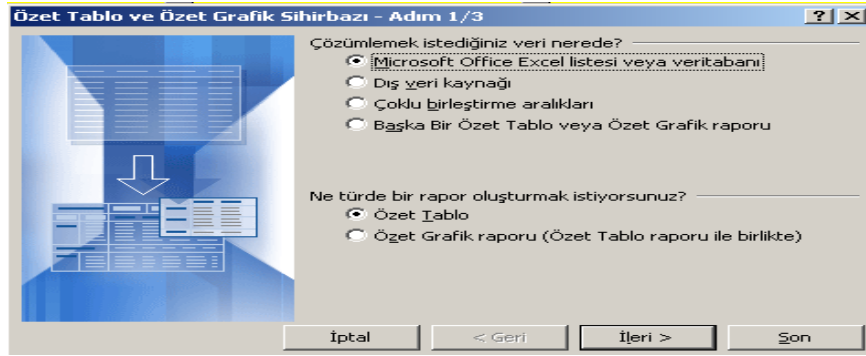
	A	B	C	D	E
	SIRA NO	KATILIMCILAR	1.SORUYA VERİLEN CEVAPLAR	2.SORUYA VERİLEN CEVAPLAR	3.SORUYA VERİLEN CEVAPLAR
1					
2	1	UFUK	Komşuluk	Fonksiyonun süreksiz olduğu bölgeleri ortadan kaldırmak için.	Daha kolay çözümler elde edilebilir.
3	2	BETÜL	Yaklaşma	Yaklaşık sonuç elde etmek için.	İleri matematiksel işlemler yapılabilir.
4	3	MURAT	Yaklaşma	Yaklaşık sonuç elde etmek için.	Fonksiyonun o noktada sürekli olduğunu gösterir.
5	4	CENNET	Yaklaşma	Yaklaşık sonuç elde etmek için.	Daha kolay çözümler elde edilebilir.
6	5	ENES	Yaklaşma	Yaklaşık sonuç elde etmek için.	Fonksiyonun nasıl hareket ettiğini verir.
7	6	ÇİĞDEM	Sınır	Sonsuza uzayan sayı değerlerine bir sınır getirmek için.	Fonksiyonun o noktada tanımlı olduğunu gösterir.

Resim 1: Veri Tablosu Örneği

Yukarıdaki tablodan da görüldüğü gibi verilerin alan adları ilk satırda olmalıdır. Aktif hücre tablo için de iken veri alanına girerek “Özet Tablo ve Özet Grafik Raporu” seçilir.

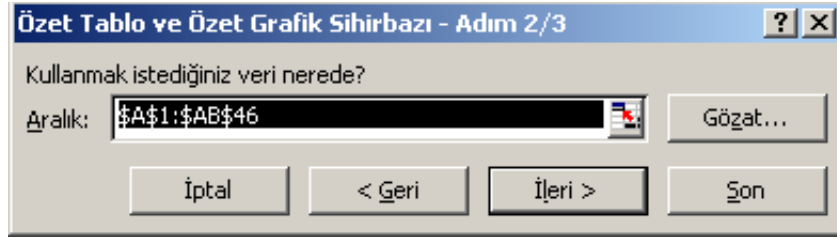
Seçim sonucunda gelen “Adım 1” penceresinde verilerin nerede olduğu sorulmaktadır. Veriler başka formatta da olabilir, buradaki diğer seçenekler de

denenebilir. Ancak örneğimizde gelen penceredeki ayarlar geçerli olacaktır. Burada doğrudan “Son” düğmesine basılarak özet tabloyu oluşturmaya geçilir.



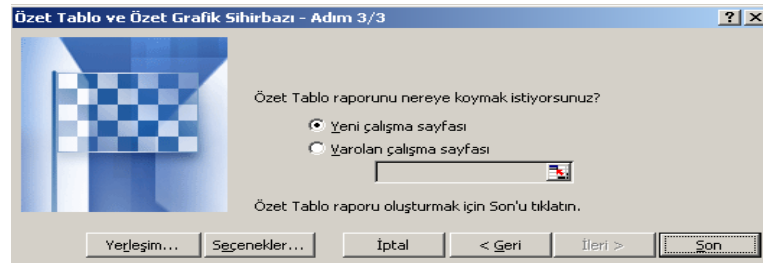
Resim 2: Özet Tablo Oluşturma 1. Adım

“Adım 1” de “M.S.Excel listesi veya veritabanı”nı seçtiğimizden aşağıdaki pencere gelecektir.



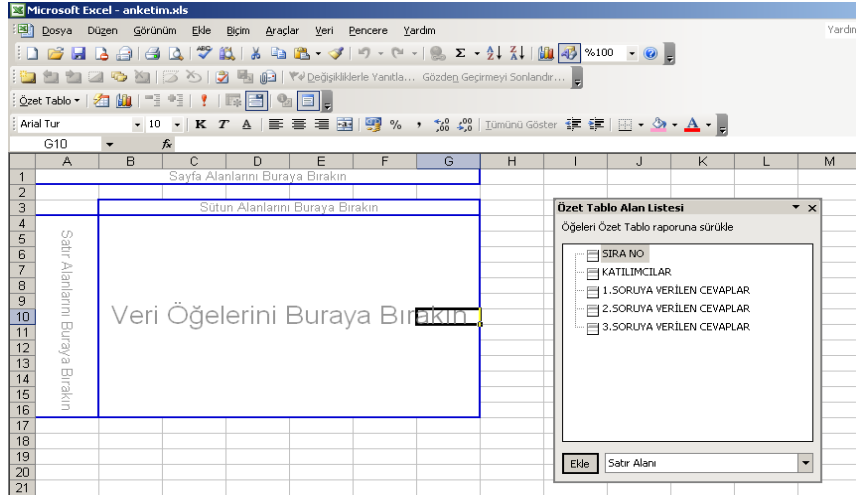
Resim 3: Özet Tablo Oluşturma 2. Adım

Bu pencerede veritabanının koordinatlarının neler olduğu sorulur. Bu veri alanını başka bir Excel dosyasından da seçmek mümkündür, ancak en başta bu alan zaten başta seçildiği için, seçilen koordinatlar otomatik olarak gelir. O halde 3. pencere için ileri tuşuna basılır.



Resim 4: Özet Tablo Oluşturma 3. Adım

Bu pencerede Özet Tablonun nerede çalışacağı belirlenir. Burada yürütülen çalışma yeni bir sayfada olacaktır. Böyle bir sayfanın görünümü aşağıdaki gibidir.



Resim 5: Özet Tablo Oluşturma Alanı

Burada sağda veri alan adları (sütunlar) ve solda özet tablo yerleşimi mevcuttur. Bu şablonla özet tablonun şekli kurgulanabilir, gösterilecek verilerin formatı belirlenebilir.

Örnekte “satır alanını buraya bırakın” uyarısı bulunan alana “1. soruya verilen cevaplar” başlığı, “veri öğelerini buraya bırakın” ile isimlendirilen alana da “katılımcılar” başlığı sürükleyerek bırakıldığında aşağıdaki tablo ile karşılaşılır. Buradan da görüleceği gibi solda 1. soruya verilen cevapların gruplandırılmış halleri, bunların karşısında da cevapları veren katılımcı sayıları gözükmemektedir.

Sıra No	Katılımcılar	1. Soruya Verilen Cevaplar	2. Soruya Verilen Cevaplar	3. Soruya Verilen Cevaplar
1	Belirli	1		
2	epsilon-Delta	3		
3	Komşuluk	1		
4	Matematiğin en zor konusu	1		
5	ÖSS	1		
6	Sınır	8		
7	Yaklaşma	30		
8	Genel Toplam	45		

Resim 6: Özet Tablo Oluşturma Örneği

Katılımcı sayılarını veren alanda herhangi bir hücreye giriş yapılarak, cevap verenler arasında katılımcı sayısına göre azalan ya da artan bir sıralama yapmak da mümkündür.

Böylece tablo hazır hale gelmiş olur. Ancak hazırlanan tablo üzerinde her zaman değişiklikler, eklentiler ya da çıkartmalar yapmak mümkündür. Örnek olarak 2. soruya verilen cevapları da tabloda göstermek mümkündür. Bunun için “2. soruya verilen cevaplar” başlığını alıp tabloda 1.soruya verilen cevapların hemen yanına bırakmak yeterlidir. Böylelikle ortaya çıkan tabloda 1. soruya cevap veren katılımcıların aynı zamanda 2. soruya ne cevap verdiklerini görmek mümkün olmaktadır. Yine burada katılımcı sayısına göre sıralama yapılabilir.

	A	B	C
1		Sayfa Alanlarını Buraya Bırakın	
2			
3	SAY KATILIMCILAR		
4	1.SORUYA VERİLEN CEVAPLAR	2.SORUYA VERİLEN CEVAPLAR	Toplam
5	Yaklaşma	Yaklaşık sonuç elde etmek için.	15
6		Matematiksel analiz yapabilmek için.	2
7		Fonksiyonun süreksiz olduğu bölgeleri ortadan kaldırmak için.	1
8		Bilmiyorum. Daha önce hiç düşünmemiştim.	5
9		Fonksiyonların bir sonucu olarak ortaya çıkmıştır.	2
10		Dairenin alanını bulmak için.	1
11		Karmaşık matematiksel ifadeleri kolaylaştırmak için.	1
12		Limit, bir sayının en yakın komşuluğundaki noktaların değerlerin bulmak için ortaya atılmıştır.	1
13		Mühendislik hesaplarında işe yaradığı için.	1
14		Sonsuz kavramını somutlaştırmak için.	1
15	Toplam Yaklaşma		30
16	Sınır	Sonsuza uzayan sayı değerlerine bir sınır getirmek için.	3
17		Yaklaşık sonuç elde etmek için.	2
18		Matematiksel analiz yapabilmek için.	1
19		Fonksiyonun süreksiz olduğu bölgeleri ortadan k	1
20		Hayatı daha iyi anlayabilmek için.	1
21	Toplam Sınır		8
22	epsilon-Delta	Yaklaşık sonuç elde etmek için.	1
23		Bilmiyorum. Daha önce hiç düşünmemiştim.	1
24		Sonsuz kavramını somutlaştırmak için.	1
25	Toplam epsilon-Delta		3
26	Belirlilik	Fonksiyonun süreksiz olduğu bölgeleri ortadan k	1
27	Toplam Belirlilik		1
28	Komşuluk	Fonksiyonun süreksiz olduğu bölgeleri ortadan k	1

Resim 7: Özet Tabloda Eklenti Yapma

Ayrıca ortaya çıkan tabloda bazı cevapların görülmesi istenmiyorsa, örnek olarak 1. soruya verilen cevaplar arasından sadece “yaklaşma” cevabını verenlerin tablosu alınmak isteniyorsa, “1.Soruya verilen cevaplar” başlığının hemen yanındaki ok tuşuna basıldığında açılan listede 1. soruya verilen gruplandırılmış cevaplar görülür.

ÖZGEÇMİŞ

1977 yılında Ankara’da doğdu. İlkokulu Kalecik’te, orta öğrenimini Almanya’da ve lise öğrenimini Ankara’da tamamladı. 1996 yılında girdiği Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünden 2000 yılında Matematikçi unvanıyla mezun oldu. Akabinde başladığı Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrenimine Ziraat Bankası Bankacılık Okulu eğitimi için ara verdi. 2001 yılında tekrar devam ettiği Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrenimini, 2004 yılında tamamladı. 2005 yılında Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Matematik Eğitimi Anabilim dalında doktora programına başladı.

Çok iyi derecede Almanca ve orta derecede İngilizce bilen Abdullah Çağrı BİBER, halen T.C. Ziraat Bankası A.Ş. Eğitim Daire Başkanlığı’nda Yönetmen unvanıyla görev yapmaktadır. Evli ve bir çocuk babasıdır.