



**ÖZ ALTGRUPLARI ÇÖZÜLEBİLİR OLAN SONSUZ ÜRETEÇLİ
GRUPLAR**

Oğuz ALKIŞ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

TEMMUZ 2016

Oğuz ALKIŞ tarafından hazırlanan “ÖZ ALTGRUPLARI ÇÖZÜLEBİLİR OLAN SONSUZ ÜRETEÇLİ GRUPLAR” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Aynur ARIKAN

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Başkan : Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU

Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye : Doç. Dr. Naim TUĞLU

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Tez Savunma Tarihi: 11/07/2016

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....
Prof. Dr. Hadi GÖKÇEN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Oğuz ALKIŞ

11/07/2016

ÖZ ALTGRUPLARI ÇÖZÜLEBİLİR OLAN SONSUZ ÜRETEÇLİ GRUPLAR
(Yüksek Lisans Tezi)

Oğuz ALKIŞ

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Temmuz 2016

ÖZET

Bu çalışmada A. O. Asar'ın "On infinitely generated groups whose proper subgroups are solvable" başlıklı makalesi çalışılmıştır. Bu makalede öz altgrupları çözülebilir ve homomorfik görüntülerinde sonlu üreteçli altgrupların normal kapanışları residually nilpotent olan sonsuz üreteçli gruplar incelenmiştir. Bu özelliğe sahip bir periyodik grubun lokal sonlu ve ya çözülebilir ya da lokal nilpotent p -grubu olduğu ve ek özelliklerle birlikte mükemmel Fitting grup olan bir homomorfik görüntüye sahip olduğu gösterilmiştir. Ancak "residually nilpotent" "residually (sonlu ve nilpotent)" ile değiştirilirse grup çözülebilirdir. Ayrıca eğer G periyodik olmayan lokal nilpotent grup ise normal kapanış hipotezi olmadan grup çözülebilirdir.

Bilim Kodu : 20401
Anahtar Kelimeler : Minimal non-Solvable, Minimal non-Hypercentral, Minimal non-FC, Residually Nilpotent, Isolator
Sayfa Adedi : 77
Danışman : Doç. Dr. Aynur ARIKAN

INFINITELY GENERATED GROUPS WHOSE PROPER SUBGROUPS ARE
SOLVABLE

(M. Sc. Thesis)

Oğuz ALKIŞ

GAZİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

July 2016

ABSTRACT

In this thesis, the article written by A. O. Asar titled “On infinitely generated groups whose proper subgroups are solvable” is studied. In this work, infinitely generated groups whose proper subgroups are solvable and whose homomorphic images finitely generated subgroups having residually nilpotent normal closures have been studied. It is shown that a periodic group with this property is locally finite and either solvable or a locally nilpotent p -group having a homomorphic image which is a perfect Fitting group with additional properties. However, if “residually nilpotent” is replaced by “residually (finite and nilpotent)”, then the group is solvable. Furthermore, if G is non-periodic and locally nilpotent, then the group is solvable without the hypothesis on normal closures.

Science Code : 20401

Key Words : Minimal non-Solvable, Minimal non-Hypercentral, Minimal non-FC, Residually Nilpotent, Isolator

Page Number : 77

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Aynur ARIKAN

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca yardım ve desteğini esirgemeyen, ilminden faydalandığım sayın hocam Doç. Dr. Aynur ARIKAN' a ve bana destek olan aileme ve arkadaşlarıma teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. BAZI HAZIRLIK TANIM VE SONUÇLARI.....	9
3. BAZI YARDIMCI ÖNERMELER.....	37
4. TEOREM 1.1 VE TEOREM 1.2 NİN İSPATI.....	45
5. TEOREM 1.3 VE TEOREM 1.4 ÜN İSPATI.....	57
6. SONUÇ.....	73
KAYNAKLAR.....	75
ÖZGEÇMİŞ.....	77

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur. Aksi belirtilmediği sürece grubun birim elemanını ve aşık altgrubunu 1 sembolü temsil edecektir. G ile K birer grup, $x, y \in G$ olsun. Ayrıca H , G nin bir altgrubu ve X ile Y , G nin boştan farklı altkümeleri ve ϕ bir grup homomorfizması olsun.

Simgeler	Açıklamalar
$H \leq G, H < G, H \triangleleft G$	H, G nin altgrubu, öz altgrubu, normal altgrubu
$\langle X \rangle$	X in elemanları tarafından üretilen grup
$\langle X, Y \rangle$	$\langle X \cup Y \rangle$
x^y	$y^{-1}xy$, x in y ile eşleniği
H^x	$x^{-1}Hx$
$[x, y]$	$x^{-1}x^y$, x ile y nin komütatör çarpımı
$[X, Y]$	$\langle [x, y] \mid x \in X, y \in Y \rangle$, X ile Y nin komütatör altgrubu
G'	$[G, G]$, G nin komütatör altgrubu
$ X $	X in kardinalitesi
$ G : H $	H nın G içindeki indeksi
$Z(G)$	G grubunun merkezi
$C_G(X)$	X in G içindeki merkezleyeni
$N_G(H)$	H nın G içindeki normalleyeni
X^G	X in G içindeki normal kapanışı
$X_G, Core_G(X)$	X in G içindeki koru
$Ker(\phi), Im(\phi)$	ϕ nin çekirdeği, görüntü kümesi
$G \cong K$	G grubu K grubuna izomorf
$Fit(G)$	G nin Fitting altgrubu
$Frat(G)$	G nin Frattini altgrubu

1. GİRİŞ

(Bu çalışmada p daima bir asal sayıyı temsil edecektir.) Aşağıda verilen iki sonuç [6] da incelenmiştir. G bir lokal sonlu p -grup olsun.

- (a) Eğer G , öz altgrupları hipermerkez ve çözülebilir olan bir Fitting grup, özel olarak eğer G barely geçişli ve bir nokta dengeleyeni hipermerkez ve çözülebilir ise o zaman G mükemmel grup olamaz.
- (b) Eğer G nin her öz altgrubu nilpotent-by-Chernikov grup ise o zaman G nilpotent-by-Chernikov gruptur.

Bu sonuçlar bazı çalışmalarda genelleştirilmiş ve kullanılmıştır. Bakınız [2-4, 7, 9, 10]. (a) ve (b) de verilen sonuçlar aşağıdaki genel problemin özel durumlarıdır.

G öz altgrupları çözülebilir olan bir sonsuz üreteçli grup olsun. G çözülebilir midir?

Bu genel problemin çözümü bilinmiyor ve muhtemelen çözümü zor olabilir. Ancak öz altgrupları çözülebilir olan sonsuz basit grupların varlığı biliniyor. Ol'shanskii [20] de yeterince büyük p asalları için her öz altgrubu devirli ve mertebesi p olan sonsuz basit p -gruplarını inşa etmiştir. Fakat bu gruplar sonlu üreteçlidir. Bu çalışmanın amacı yukarıda verilen genel problemin özel hali olan aşağıdaki problemin incelenmesidir.

G öz altgrupları çözülebilir ve homomorfik görüntülerinin sonlu üreteçli altgruplarının normal kapanışları residually nilpotent olan bir sonsuz üreteçli grup olsun. O zaman G çözülebilir midir?

Bu problemin hipotezine ek olarak G nin periyodik olduğu durumda G nin lokal sonlu ve ya çözülebilir ya da mükemmel lokal nilpotent p -grubu olduğu ve ek özelliklerle Fitting grup olan bir homomorfik görüntüye sahip olduğu gösterilmiştir (Teorem 1.4). Ancak Teorem 1.4 te eğer “residually nilpotent” “residually (sonlu ve nilpotent)” ile değiştirilirse o zaman grup çözülebilirdir (Sonuç 1.5). Ayrıca G periyodik olmayan bir lokal nilpotent grup ise normal kapanış hipotezi olmadan G nin çözülebilir olduğu gösterilmiştir (Sonuç 1.7). Teorem 1.1(a) ve Sonuç 1.6 sırasıyla yukarıda verilen (a) ve [2] deki Teorem 1.1 de verilen sonuçların genellemesidir. Son olarak dikkat edilecek olursa Teorem 1.4 ve Sonuç 1.6 Kourovka' nın Notdefterindeki (Unsolved Problems in Group Theory by Khukhro and

Mazurov) Problem 16.5 (b) ve (c) için kısmi cevaplardır.

G bir grup ve P bir grup-teorik özellik olsun. Eğer G grubunun her öz altgrubu P özelliğini sağlar ancak G sağlamazsa G ye *minimal P olmayan grup* (*minimal non- P -grup*) (kısaca *MNP-grup*) denir. Örneğin P “çözülebilir”, “hipermerkez”, “sonlu eşlenik sınıfı” ise o zaman grup sırasıyla MNS-grup, MNHC-grup, MNFC-grup olarak adlandırılır.

Bu çalışmada yukarıda belirtilen probleme ana yaklaşım [5, 6] da çok kullanışlı olan bir özellikten faydalanmaya çalışılmıştır. Bundan dolayı bu özelliğin burada belirtilerek başlanması uygun olacaktır. G bir grup ve Y , G nin bir altkümesi olsun.

(*) G grubunun her $1 \neq w$ elemanı ve $w \notin U$ olacak şekilde her sonlu üreteçli U altgrubu için G nin U yu kapsayan bir sonlu üreteçli V altgrubu ve bir L öz altgrubu vardır öyle ki

$$w \notin V \text{ fakat her } y \in Y \setminus L \text{ için } w \in \langle V, y \rangle$$

dir.

Bu durumda G ye Y ye göre (*) özelliğini sağlar denir. Önerme 3.1 den bir mükemmel lokal sonlu minimal hipermerkez olmayan grup (*) özelliğini sağlar (ayrıca bakınız [5] te Lemma 2.2 veya [6] da Lemma 2.3). Daha genel olarak [6] daki Lemma 2.3 ten eğer Y , G nin bir üreteç kümesi öyle ki Y nin altkümeleri tarafından üretilen G nin her öz altgrubu hipermerkez ise o zaman G , Y ye göre (*) özelliğini sağlar. Dikkat edilecek olursa Teorem 2.65 ve Teorem 2.66 dan (ayrıca bakınız [23] te Lemma 8.15) mükemmel lokal sonlu minimal FC olmayan grup p -gruptur ve bu durumda Lemma 2.40 tan grubun hipermerkezi merkezine eşittir. Böylece Lemma 2.56 dan bu grup MNHC-grup olduğundan (*) özelliğini sağlar. Ayrıca bir mükemmel lokal sonlu barely geçişli grup Lemma 2.61 ve Lemma 4.8 den (*) özelliğini sağlar.

Şimdi (*) özelliğini genelleştirelim. $1 \neq w \in G$ ve V , $w \notin V$ olacak şekilde G nin bir sonlu üreteçli altgrubu olsun. Eğer (w, V) ikilisi Y ye göre (*) özelliğini sağlıyorsa yani her $y \in Y \setminus L$ için $w \in \langle V, y \rangle$ olacak şekilde G nin bir L öz altgrubu varsa (w, V) ikilisine Y ye göre veya Y için bir (*)-ikilisi denir. Bu durumda (w, V, L) üçlüsüne bir (*)-üçlüsü denir. Eğer yukarıdaki tanımlar içerisinde Y belirtilmemişse o zaman $Y = G$ kabul edilecektir. (*)-üçlülerinin varlığı için [2] ve [4] te aşık olmamak durumları incelenmiştir.

Tekrar $1 \neq w \in G$ ve V , $w \notin V$ olacak şekilde G nin bir sonlu üreteçli altgrubu olsun. Eğer G nin bir E altgrubu $w \notin E$ ve $V \leq E$ şartlarına göre G nin maksimal altgrubu ise E ye G nin bir (w, V) -maksimal altgrubu denir. Ayrıca (w, V) ikilisi için eğer G nin $V \leq U$ olmak üzere (w, U) $(*)$ -ikilisi yok ve

$$d(\langle V, y \rangle) > d(V) \text{ olacak şekildeki her } y \in G \text{ için } w \in \langle V, y \rangle$$

şartları sağlanıyorsa o zaman (w, V) ikilisine G ye göre bir *seçkin* (*distinguished*) ikili denir. Burada $d(V)$, V nin çözülebilirlik uzunluğudur.

$$E(w, V) = \{y \in G \mid w \notin \langle V, y \rangle\}$$

$$E^*(w, V) = \{E \mid E, G \text{ nin bir } (w, V)\text{-maksimal altgrubu}\}$$

$$W^*(w, V) = \{Core_G(E) \mid E \in E^*(w, V)\}$$

olsun. O zaman Lemma 3.5 ten $E(w, V) = \bigcup_{E \in E^*(w, V)} E$ dir.

(w, V) ikilisi G ye göre bir seçkin ikili ve $E \in E^*(w, V)$ olsun. O zaman her $y \in E$ için $d(\langle V, y \rangle) = d(V)$ dir. Çünkü eğer $d(\langle V, y \rangle) > d(V)$ ise o zaman seçkin ikili tanımından $w \in \langle V, y \rangle$ dir. Fakat E nin tanımından ve hipotezden $V \leq E$ ve $y \in E$ olduğundan $w \in \langle V, y \rangle \leq E$ olur ki bu bir çelişkidir. Eğer G bir MNS-grup ise Lemma 5.1 den G nin her $1 \neq w$ elemanı için G ye göre her zaman ya bir $(*)$ -üçlü ya da bir seçkin ikili vardır. Kullanışlılık bakımından eğer G nin bir (w, V) seçkin ikilisi her $E \in E^*(w, V)$ için $d(E) = d(V)$ özelliğini sağlıyorsa (w, V) ikilisine G ye göre *dominant ikili* denir. (Seçkin ikililerin ve dominant ikililerin varlığı Lemma 5.1 ve 5.6 da gösterilmiştir.) Son olarak Lemma 3.6 dan eğer (w, V, L) bir $(*)$ -üçlüsü veya (w, V) bir seçkin ikili ise her $v \in V$ için (wv, V, L) bir $(*)$ -üçlüsü veya (wv, V) bir seçkin ikilidir ve $E^*(w, V) = E^*(wv, V)$ dir.

$(*)$ -üçlülerine sahip gruplar 4. Bölümde, seçkin ikililere ve dominant ikililere sahip gruplar ise 5. Bölümde incelenmiştir.

G bir grup ve H , G nin bir altgrubu olsun.

$$I_G(H) = \{g \in G \mid \text{bir } n \geq 1 \text{ doğal sayısı için } g^n \in H\}$$

kümesine H nin G içindeki *izolatörü* (*isolator*) denir. Bir grubun her altgrubunun izolatörü bir altgrupsa gruba *izolatör özelliğini sağlar* denir. O halde Lemma 2.59 dan lokal nilpotent G grubu izolatör özelliğini sağlar ve ek olarak eğer G grubu torsiyonsuz ise o zaman G nin bir H altgrubu hipermerkez veya çözülebilir olduğunda Lemma 2.60 tan $I_G(H)$ hipermerkez veya çözülebilirdir.

Bu çalışmanın ana sonuçları aşağıda belirtilmiştir. (Bu çalışmada bir grubun “sonsuz üreteçli” olması o grubun sonlu elemanla üretilmeyeceği anlamına gelmektedir.)

Teorem 1.1

G her öz altgrubu çözülebilir olan bir sonsuz üreteçli periyodik grup olsun. Kabul edelim ki aşağıdaki şartlardan biri sağlansın.

- (a) G nin her H homomorfik görüntüsünün sonlu üreteçli altgruplarının normal kapanışları residually nilpotent ve H nin $w_H \notin Z(H)$ olacak şekilde bir (w_H, V_H, L_H) $(*)$ -üçlüsü vardır.
- (b) G her sonlu üreteçli F altgrubu için $\langle F^G \rangle$ FC-grup olan bir p -gruptur.

O zaman G çözülebilirdir.

Özel olarak eğer Teorem 1.1 (a) da “ $(*)$ -üçlüsü” “her öz altgrubu hipermerkez” ile değiştirilirse Önerme 3.1 den dolayı G grubu çözülebilirdir. Böylece [6] daki Teorem 1.1 in bir genellemesi elde edilir. Ayrıca [9] daki Teorem 2 de tanımlanan grup Teorem 2.64 ten bir p -gruptur, Lemma 2.49 dan öz altgrupları çözülebilir ve Teorem 2.63 ile [9] daki Lemma 3 ten sonlu altgruplarının normal kapanışları nilpotenttir. Ayrıca Lemma 2.61 ve Lemma 4.8 den bu grup bir $(*)$ -üçlüsüne sahip olduğundan [9] daki Teorem 2 nin bir genellemesi elde edilir.

B. Hartley [11] de bir sonsuz Ω kümesi üzerindeki bir sadık geçişli G permutasyon grubunun eğer her öz altgrubunun her yörüngesi sonlu ise G yi *barely geçişli* olarak adlandırmıştır. Kabul edelim ki G lokal sonlu olsun. O zaman Teorem 2.64 ten G bir p -gruptur. Ayrıca Lemma 2.62 den her öz altgrubu residually sonlu ve Lemma 2.61 den herhangi iki öz altgrubu bir öz altgrubunu üretir ve Teorem 2.63 ten her öz normal altgrubu sonlu exponentli nilpotenttir. Ayrıca G geçişli olduğundan Ω sonlu yörüngelerin artan

birleşimidir. Dolayısıyla Ω ve böylece G de sayılabilir sonsuzdur [14]. Lemma 2.49 dan H , G nin bir nokta dengeleyeni ise G nin her K öz altgrubu için $|K : K \cap H| < \infty$ ve $\bigcap_{x \in G} H^x = 1$ dir ve tersine G yukarıdaki özellikleri sağlayan bir H öz altgrubuna sahip bir sonsuz grup ise H nin sol kosetleri üzerinde G nin sol regüler temsili bir barely geçişli gruptur. Aşağıdaki teorem bir mükemmel lokal sonlu barely geçişli grubun yeni bir karakterizasyonudur.

Teorem 1.2

G her öz altgrubu residually (sonlu exponentli nilpotent) ve herhangi iki öz altgrubu bir öz altgrubunu üreten bir mükemmel lokal sonlu grup olsun. Kabul edelim ki G bir $(*)$ -üçlüsüne sahip olsun. O zaman G nin bir mükemmel barely geçişli permütasyon grubuna izomorf olan bir epimorfik görüntüsü vardır.

“(*)-üçlüsü” “her öz altgrubu hipermerkez” ile değiştirilirse Önerme 3.1 den Teorem 1.2 tekrar doğru olur. Gerçekten G bir mükemmel grup olduğundan Lemma 2.40 tan $Z(G/Z(G)) = 1$ dir. Böylece G nin hipermerkezi merkezine eşittir. G bir mükemmel grup olduğundan $G \neq Z(G)$ dir. Aksi halde $G' = 1 = G$ olduğundan G çözülebilir olur ki bu bir çelişkidir. Alternatif olarak G nin herhangi iki öz altgrubu bir öz altgrubunu ürettiğinden G bir sonlu grup olamaz. Böylece G grubu hipermerkez olmayıp MNHC-gruptur.

Bir MNS- p -grup üzerine ilk kısıtlama aşağıdaki Teorem 1.3 tür. Böylece Teorem 1.3 deki grup Teorem 1.1 i sağlamayan MNS- p -gruptur.

Teorem 1.3

G her homomorfik görüntüsünün sonlu altgruplarının normal kapanışları residually nilpotent olan bir lokal sonlu MNS- p -grup olsun. O zaman G nin bir H homomorfik görüntüsü vardır öyle ki her $w_H \in H \setminus Z(H)$ için H nin $(*)$ -üçlülere yoktur ancak $w_H \notin U_H$ olacak şekilde H nin her sonlu U_H altgrubu için $U_H \leq V_H$ olacak şekilde H nin bir sonlu V_H altgrubu vardır öyle ki (w_H, V_H) ikilisi H için bir seçkin ikilidir. Ayrıca $\langle E(w_H, V_H) \rangle = H$ ve $W^*(w_H, V_H)$ nin maksimal elemanları vardır öyle ki $W^*(w_H, V_H)$ nin her M maksimal elemanı için $Z(H/M)$ lokal devirlidir ve eğer $Z(H/M) \neq 1$ ise $(wu)M \in Z(H/M)$ olacak şekilde bir $u \in V_H$ vardır. Son olarak $M = 1$ ise $Z(H) \neq 1$ dir.

Periyodik durumda bu çalışmanın en genel sonucu aşağıdaki teoremdir.

Teorem 1.4

G her öz altgrubu çözülebilir olan bir sonsuz üreteçli periyodik grup olsun. Kabul edelim ki G nin her homomorfik görüntüsünün sonlu üreteçli altgruplarının normal kapanışları residually nilpotent olsun. O zaman G lokal sonludur ve aşağıdakilerden biri sağlanır.

- (a) G çözülebilirdir.
- (b) G bir p -gruptur ve her sonlu altgrubun normal kapanışı nilpotent olacak şekilde G nin bir mükemmel H homomorfik görüntüsü vardır ve böylece H bir Fitting gruptur. Ayrıca $Z(H)$ aşıkâr olmayan lokal devirlidir ve H nin her K homomorfik görüntüsünün $K \setminus Z(K)$ nin elemanlarına göre $(*)$ -üçlüsü yoktur.

Teorem 1.4 ün hipotezini sağlayan bir grubun çözülebilir olup olmadığı henüz bilinmiyor. Ancak eğer hipotezde “residually nilpotent” “residually (sonlu ve nilpotent)” ile değiştirilirse aşağıdaki sonuçtan grup çözülebilirdir.

Sonuç 1.5

G her öz altgrubu çözülebilir olan bir sonsuz üreteçli periyodik grup olsun. Kabul edelim ki G nin her homomorfik görüntüsünün sonlu üreteçli altgruplarının normal kapanışları residually (sonlu ve nilpotent) olsun. O zaman G çözülebilirdir.

Sonuç 1.6

G her öz altgrubu çözülebilir olan bir sonsuz üreteçli periyodik grup olsun. Kabul edelim ki G nin her H homomorfik görüntüsü için şu şart sağlansın: H nin sonlu üreteçli altgruplarının normal kapanışı residually nilpotent ve eğer (w_H, V_H) ikilisi H için bir seçkin ikili ise her $L \triangleleft H$ ve her $E \in E^*(w_H, V_H)$ için $C_{H/L}(EL/L) \neq 1$ olsun. O zaman G çözülebilirdir.

Giriş bölümündeki (a) da grubun her öz altgrubu hipermerkez olduğundan Sonuç 1.6 (a) nın bir genellemesidir ki burada sadece G nin her H homomorfik görüntüsü için $E^*(w_H, V_H)$ nin elemanlarının merkezleyenleri birimden farklıdır. Lemma 5.11(b) den eğer

G çözülebilir değilse $E^*(w_H, V_H)$ nin sonsuz çoklukta hipermerkez olmayan altgrubu vardır ve bunlar G yi üretir. Ayrıca [2] deki Teorem 1.1 de G nin homomorfik görüntülerinin öz altgruplarının merkezleyenleri aşikar olmadığından Sonuç 1.6 [2] deki Teorem 1.1 i genelleştirir.

Teorem 1.7 nin orjinal ispatından şu ilginç özellik çıkarılmıştır. Bir lokal nilpotent MNS-grubu periyodik gruptur (Önerme 3.3). Bu durum Teorem 1.7 yi aşağıdaki Sonuç 1.7 ile değiştirme imkanı verir.

Sonuç 1.7

G her öz altgrubu çözülebilir olan bir sonsuz üreteçli lokal nilpotent grup olsun. Kabul edelim ki G nin her homomorfik görüntüsünün sonlu üreteçli altgruplarının normal kapanışları residually nilpotent olsun. O zaman aşağıdakilerden biri sağlanır.

- (a) G çözülebilirdir.
- (b) G bir p -gruptur ve her sonlu altgrubun normal kapanışı nilpotent olacak şekilde G nin bir H homomorfik görüntüsü vardır ve böylece H bir Fitting p -gruptur. Ayrıca $Z(H)$ aşikar olmayan lokal devirlidir ve H nin her K homomorfik görüntüsünün $K \setminus Z(K)$ nin elemanlarına göre $(*)$ -üçlüsü yoktur.

Her homomorfik görüntüsünün sonlu üreteçli altgruplarının normal kapanışları residually nilpotent olan bir sonsuz üreteçli G MNS-grubu şu ilginç özelliği sağlar; G bir periyodik gruptur ancak ve ancak G lokal nilpotenttir. (Yorum bilirkşi tarafından yapıldı.) Gerçekten G periyodikse Önerme 3.2 den lokal nilpotenttir. Tersine G lokal nilpotent ise Önerme 3.3 ten G periyodik olmalıdır. Aksi halde G çözülebilir olur ki bu bir çelişkidir. Sonuç 1.7 den yukarıda belirtilen genel problemin burada incelenen özel durumunu ispatlamak için aşağıdaki problemin bir çözüme ihtiyacı vardır.

G öz altgrupları çözülebilir ve homomorfik görüntülerinin sonlu üreteçli altgruplarının normal kapanışları residually nilpotent olan bir torsiyonsuz grup olsun. G çözülebilir midir?

2. BAZI HAZIRLIK TANIM VE SONUÇLARI

2.1. Tanım

$\mathfrak{X}$ elemanları gruplar olan bir sınıf olsun. Eğer

- i. $\mathfrak{X}$ mertebesi bir olan grubu içerir,
- ii. $G_1 \cong G \in \mathfrak{X}$ ise $G_1 \in \mathfrak{X}$ tir;

özellikleri sağlanıyorsa $\mathfrak{X}$ sınıfına bir *grup-teorik sınıf* (veya *grupların sınıfı*) denir. Örneğin bütün sonlu gruplar ve bütün abelyan gruplar bir grup-teorik sınıf oluştururlar. Daha genel olarak $\mathcal{P}$ bir grup özelliği olmak üzere eğer mertebesi 1 olan grup $\mathcal{P}$ özelliğine sahip ve $\mathcal{P}$ özelliğine sahip her G grubu için $G_1 \cong G$ iken G_1 grubu $\mathcal{P}$ özelliğine sahipse $\mathcal{P}$ ye *grup-teorik özellik* denir. Her grup-teorik sınıfa bir grup-teorik özelliği ve her grup-teorik özelliğine bir grup-teorik sınıfı karşılık geldiğinden ikisi birbirlerinin yerine kullanılabilir [22]. $\mathfrak{X}$ grup sınıfına ait bir gruba $\mathfrak{X}$ -grup denir. Eğer bir grubun altgrubu $\mathfrak{X}$ -grup ise o altgruba $\mathfrak{X}$ -altgrup denir.

2.2. Tanım

X , bir G grubunun boş kümeden farklı bir altkümesi olsun. G nin X i kapsayan altgrupların arakesitine X tarafından üretilen altgrup denir. X tarafından üretilen altgrup $\langle X \rangle$ şeklinde gösterilir. Eğer n bir pozitif tamsayı olmak üzere G grubu $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ kümesi tarafından üretiliyorsa G ye n -üreteçli grup denir. Eğer G grubu n -üreteçli ise G ye *sonlu üreteçli* denir. 1-üreteçli $\langle x \rangle = \langle \{x\} \rangle$ grubuna *devirli grup* denir. G nin altgruplarından oluşan küme $\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ olmak üzere X_λ lar tarafından üretilen grup $\langle \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \rangle$ şeklinde tanımlanır. Bu altgrup

$$\langle X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \rangle$$

veya $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ olacak şekilde Λ bir sonlu küme ise

$$\langle X_{\lambda_1}, X_{\lambda_2}, \dots, X_{\lambda_n} \rangle$$

şeklinde yazılır.

Eğer $\langle g, X \rangle = G$ iken her zaman $\langle X \rangle = G$ oluyorsa g elemanına G nin *üreteç olmayan elemanı* denir.

2.3. Tanım

G bir grup ve $x, y \in G$ olsun.

$$x^y = y^{-1}xy$$

elemanına x in y ile *eşleniği* (*konjugesi*) denir.

X ve Y , G nin boştan farklı altkümeleri olsun. G nin X in Y ile *eşleniği* olan altgrubu

$$X^Y = \langle x^y \mid x \in X, y \in Y \rangle$$

olarak tanımlanır.

$$X^G = \langle g^{-1}Xg \mid g \in G \rangle$$

altgrubuna ise X in G içindeki *normal kapanışı* denir.

2.4. Tanım

G bir grup ve $x_1, x_2, \dots, x_n \in G$ olsun.

$$[x_1, x_2] = x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2$$

elemanına x_1 ile x_2 nin *komütatörü* denir. $[x_1] = x_1$ ve genel olarak $n \geq 2$ olmak üzere n ağırlıklı basit bir komütatör

$$[x_1, x_2, \dots, x_n] = [[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}], x_n]$$

şeklinde tanımlanır. X_1 ve X_2 , G nin boştan farklı altkümeleri olsun. X_1 ve X_2 nin *komütatör altgrubu*

$$[X_1, X_2] = \langle [x_1, x_2] \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2 \rangle$$

olarak tanımlanır. Özel olarak $X_1 = X_2 = G$ ise $[G, G] = G'$ komütatör grubuna G nin komütatör (derived) altgrubu denir. Daha genel olarak $[X_1] = \langle X_1 \rangle$ ve $n \geq 2$ olmak üzere

$$[X_1, X_2, \dots, X_n] = [[X_1, X_2, \dots, X_{n-1}], X_n]$$

olarak tanımlanır.

2.5. Tanım

G bir grup ve $H \leq G$ olsun. H nın G içindeki sol (veya sağ) kosetlerinin kümesinin kardinalitesine H nın G içindeki *indeksi* denir ve $|G : H|$ ile gösterilir.

2.6. Tanım

Ω boştan farklı bir küme olsun. Ω üzerinde tanımlı birebir ve örten fonksiyona Ω nın bir *permütasyonu* denir. Ω üzerindeki bütün permütasyonların kümesi fonksiyonların bileşke işlemine göre bir grup oluşturur [25]. Bu gruba Ω üzerinde *simetrik grup* denir ve $Sym(\Omega)$ ile gösterilir. Bir simetrik grubun altgrubuna *permütasyon grubu* denir.

2.7. Tanım

G bir grup, $\Omega \neq \emptyset$ bir küme ve kabul edelim ki her $\alpha \in \Omega$ ve her $x \in G$ için $\Omega \times G$ den Ω üzerine $(\alpha, x) \rightarrow \alpha^x$ olacak şekilde fonksiyon tanımlansın öyle ki α^x , α ve x in fonksiyon altındaki görüntüsünü temsil etmektedir. Eğer

- i. her $\alpha \in \Omega$ için $\alpha^1 = \alpha$,
- ii. her $\alpha \in \Omega$ ve her $x, y \in G$ için $(\alpha^x)^y = \alpha^{xy}$,

şartları sağlanıyorsa bu fonksiyona G nin Ω üzerine bir *etkisi* (veya G , Ω üzerine *etki eder*) denir. G nin $Sym(\Omega)$ grubu içine her homomorfizmasına G nin Ω üzerine bir (*permütasyon*) *temsili* denir. Her etkiye bir temsil ve her temsile bir etki karşılık geldiğinden birbirlerinin yerine kullanılabilirler [22]. Bir etkinin (veya temsilin) *derecesi* Ω

nın kardinalitesidir. Etkinin çekirdeği yani etkiye karşılık gelen ρ temsiline çekirdeği $\text{Ker}(\rho)$ için $\text{Ker}(\rho) = 1$ ise etkiye (veya temsile) *sadık* (*faithful*) denir.

2.8. Tanım

Bir G grubu boştan farklı bir Ω kümesi üzerine etki ettiğinde Ω nın tipik bir α noktası (elemanı) G nin elemanları tarafından farklı noktalara hareket ettirilir ya da sabit bırakılır. α nın bu görüntülerinin kümesine G altında α nın yörüngesi denir ve $\alpha^G = \{\alpha^x \mid x \in G\}$ ile gösterilir. α yı sabit bırakan G nin elemanları kümesine de α nın G içindeki dengeleyeni denir ve $G_\alpha = \{x \in G \mid \alpha^x = \alpha\}$ ile gösterilir. Eğer G altında Ω nın bir tek yörüngesi varsa veya her $\alpha, \beta \in \Omega$ için $\alpha^x = \beta$ olacak şekilde bir $x \in G$ varsa G ye Ω üzerinde *geçişli* (*transitive*) denir. G kendi üzerine $(x, g) \rightarrow x^g = g^{-1}xg$ olacak şekilde eşlenikleme şeklinde etki etsin. x in G içindeki $\{g^{-1}xg \mid g \in G\}$ yörüngesine x in *eşlenik sınıfı* denir. G nin bir H altgrubu G üzerine eşlenikleme şeklinde etki etsin. x in $H_x = \{h \in H \mid h^{-1}xh = x\}$ dengeleyenine x in H içindeki *merkezleyeni* denir ve $C_H(x)$ ile gösterilir. $H = G$ ise $C_G(x)$ e x in *merkezleyeni* denir. Ω kümesi üzerinde geçişli bir G grubu için eğer her $\alpha \in \Omega$ için $G_\alpha = 1$ ise ,yani sadece birim eleman Ω nın her noktasını sabit bırakıyorsa, temsile (etkiye) *regüler temsil* (*etki*) denir. H altgrubu G nin bütün altgruplarından oluşan S kümesine eşlenikleme şeklinde etki etsin. $K \in S$ nin H içindeki $\{h \in H \mid h^{-1}Kh = K\}$ dengeleyenine K nın H içindeki *normalleyeni* denir ve $N_H(K)$ ile gösterilir. $H = G$ ise $N_G(K)$ ya K nın *normalleyeni* denir.

2.9. Tanım

G bir grup, $x \in G$ ve x in G içindeki eşlenik sınıfı $Cl_G(x) = \{g^{-1}xg \mid g \in G\}$ olsun. Eğer her $x \in G$ için $Cl_G(x)$ sonluysa veya buna denk olarak her $x \in G$ için $|G : C_G(x)|$ sonluysa G ye *FC-grup* denir [24].

2.10. Tanım

G bir grup olsun. G den G ye tanımlı bir homomorfizmaya G nin bir *endomorfizması*, G den G ye tanımlı bir izomorfizmaya G nin bir *otomorfizması* denir. G nin bütün endomorfizmalarının kümesi $\text{End}(G)$ ve bütün otomorfizmalarının kümesi $\text{Aut}(G)$ ile gösterilir. $\text{Aut}(G)$, fonksiyonların bileşke işlemine göre bir gruptur.

2.11. Tanım

G bir grup olsun. Eğer p bir asal sayı olmak üzere her $g \in G$ için $|\langle g \rangle| = p^k$ olacak şekilde bir $k \geq 0$ tamsayısı varsa G ye p -grup denir. Eğer $H \leq G$ olmak üzere H altgrubu bir p -grupsa H ya G nin p -altgrubu denir. Eğer $P \leq G$ olmak üzere P altgrubu G nin bir maksimal p -altgrubu (yani $P \leq H \leq G$ olacak şekildeki her H p -altgrubu için $P = H$) ise P ye G nin Sylow p -altgrubu denir.

2.12. Tanım

π , asalların boştan farklı bir kümesi olsun. Her asal çarpanı π ye ait olan pozitif tamsayıya π -sayısı denir. Bir grubun bir elemanının mertebesi π -sayısı ise o elemana π -eleman denir. Her elemanı π -eleman olan gruba π -grup denir. $\pi = \{p\}$ ise o zaman mertebesi π -sayısı olan elemana p -eleman ve her elemanı p -eleman olan gruba p -grup denir. G grubu için $\pi(G)$ kümesi G nin elemanlarının mertebelerini bölen asallar kümesi olarak gösterilir.

2.13. Tanım

G bir grup olmak üzere G nin her elemanının mertebesi sonlu yani her $g \in G$ için $|\langle g \rangle|$ sonlu ise G ye periyodik (torsiyon) grup denir. Eğer G nin elemanlarının mertebeleri sonlu ve sınırlı ise G ye sonlu exponentli denir. Böylece G nin exponenti G nin bütün elemanlarının mertebelerinin en küçük ortak katıdır. G nin birim eleman dışındaki her elemanının mertebesi sonsuz ise G ye aperiodyk (torsiyonsuz) grup denir.

2.14. Tanım

G bir grup ve $H \leq G$ olsun. Eğer her $h \in H$ ve her $g \in G$ için $g^{-1}hg \in H$ yani $g^{-1}Hg \leq H$ ise H ya G nin normal altgrubu denir. $H \triangleleft G$ ile gösterilir.

$K \triangleleft G$ olsun. L/K G/K nin bir minimal normal altgrubu ise L/K ya esas faktör denir.

2.15. Tanım

G grubunun 1 ve kendisinden başka normal altgrubu yoksa G ye basit grup denir.

2.16. Tanım

$\mathfrak{X}$ ve $\mathfrak{Y}$ iki grup sınıfı olsun.

$\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$

genişlemesi veya *sınıf çarpımı* şu şekilde tanımlanır: Bir G grubu $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ sınıfına aittir ancak ve ancak G nin bir N normal altgrubu vardır öyle ki $N \in \mathfrak{X}$ ve $G/N \in \mathfrak{Y}$ dir. $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ sınıfındaki gruplara $\mathfrak{X}$ -by- $\mathfrak{Y}$ gruplar denir.

2.17. Tanım

G , N ve Q birer grup olmak üzere eğer $M \cong N$ ve $G/M \cong Q$ olacak şekilde bir $M \triangleleft G$ varsa G grubuna N grubunun Q grubu ile bir *genişlemesi* denir.

2.18. Tanım

Bir $\mathfrak{X}$ -grubunun bir $\mathfrak{X}$ -grubu tarafından her genişlemesi bir $\mathfrak{X}$ -grubu ise $\mathfrak{X}$ grup sınıfına *P-kapalıdır* denir.

2.19. Tanım

$\mathfrak{X}$ bir grup sınıfı ve G bir grup olsun. Her $1 \neq x \in G$ için $x \notin N_x$ olacak şekilde G nin bir N_x normal altgrubu var ve $G/N_x \in \mathfrak{X}$ ise G ye *residually $\mathfrak{X}$ -grup* denir. Bu şartlar altında yani G residually $\mathfrak{X}$ -grup ise $\bigcap_{1 \neq x \in G} N_x = 1$ dir.

2.20. Tanım

$\mathfrak{X}$ bir grup sınıfı ve G bir grup olsun. G nin her sonlu altkümesi G nin bir $\mathfrak{X}$ -altgrubu tarafından içeriliyorsa G ye *lokal $\mathfrak{X}$ -grup* denir. Eğer $\mathfrak{X}$ -grubunun her altgrubu $\mathfrak{X}$ -grupsa G nin lokal $\mathfrak{X}$ -grup olması için G nin sonlu üreteçli her altgrubunun bir $\mathfrak{X}$ -grup olması yeterlidir.

Eğer kardinalitesi en fazla $\aleph_0$ olan her altkümesi veya sayılabilir her altkümesi bir $\aleph$ -altgrubu tarafından içerilen grupların sınıfı $\aleph$ -grup sınıfına eşitse bu şartı sağlayan $\aleph$ grup sınıfına *sayılabilir tanımlanabilir* (*countably recognizable*) denir.

2.21. Tanım

G bir grup ve $\emptyset \neq X \subseteq G$ olsun. X tarafından kapsanan G nin normal altgruplarının birleşimi tarafından üretilen altgruba X in G içinde ki *koru* denir ve X_G veya $Core_G(X)$ ile gösterilir. Eğer böyle bir altgrup yoksa $X_G = 1$ olarak tanımlanır.

2.22. Tanım

G bir grup olsun. $S = \{1 = G_0, G_1, \dots, G_n = G\}$ G nin altgruplarının bir dizisi olmak üzere

$$1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_n = G$$

ise S ye G nin bir *sonlu serisi* denir. G_{i+1}/G_i bölüm gruplarına *serinin faktörleri* ve G_i gruplarına *serinin terimleri* denir. Eğer bütün G_i ler farklı ise n negatif olmayan tamsayısına *serinin uzunluğu* denir.

$T = \{H_\alpha \mid \alpha \leq \beta\}$ bir β ordinaline eşit veya küçük ordinallerle indekslenen G nin altgruplarının bir kümesi olsun. Eğer T kümesi;

- (a) $\alpha_1 \leq \alpha_2$ ise $H_{\alpha_1} \leq H_{\alpha_2}$
- (b) $H_0 = 1$ ve $H_\beta = G$
- (c) $H_\alpha \triangleleft H_{\alpha+1}$
- (d) eğer λ limit ordinali ise $H_\lambda = \bigcup_{\alpha < \lambda} H_\alpha$ dır,

şartlarını sağlıyorsa T ye bir *artan seri* denir. Artan bir seriyi $1 = H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft \dots \triangleleft H_\beta = G$ şeklinde yazmak uygundur.

Eğer T kümesi;

- (a') $\alpha_1 \leq \alpha_2$ ise $H_{\alpha_1} \geq H_{\alpha_2}$
- (b') $H_0 = G$ ve $H_\beta = 1$

(c') $H_{\alpha+1} \triangleleft H_\alpha$

(d') eğer λ limit ordinali ise $H_\lambda = \bigcap_{\alpha < \lambda} H_\alpha$ dır,

şartlarını sağlıyorsa T ye bir *azalan seri* denir. Azalan bir seriyi $1 = H_\beta \dots \triangleleft H_1 \triangleleft H_0 = G$ şeklinde yazmak uygundur.

2.23. Tanım

G bir grup olsun. G nin bir sonlu serisi

$$1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_n = G$$

olmak üzere eğer her $0 \leq i < n$ için G_{i+1}/G_i abelyan ise G ye *çözülebilir grup* denir. G nin bu şekildeki serilerinin en küçük uzunluğuna G nin *çözülebilirlik uzunluğu* (*derived uzunluğu*) denir ve $d(G)$ ile gösterilir.

2.24. Tanım

G bir grup ve $G^{(0)} = G$ olsun. $i \geq 0$ olmak üzere

$$G^{(i+1)} = [G^{(i)}, G^{(i)}]$$

şeklinde tanımlansın. O zaman

$$G = G^{(0)} \geq G^{(1)} \geq G^{(2)} \geq \dots$$

dir. Bu seriye G nin *komütatör serisi* ve her $k \geq 0$ için $G^{(k)}$ ya G nin k yıncı komütatörü denir. $G^{(1)} = G'$ ile gösterilir ve eğer $G = G'$ ise G ye *mükemmel grup* denir.

Eğer bir $n \geq 0$ için $G^{(n)} = 1$ olursa n doğal sayılarının en küçüğüne G nin *komütatör uzunluğu* denir.

Çözülebilir grup sınıflarının genelleştirilmesiyle oluşan *SI-gruplar*, faktörleri abelyan olan normal seriye (serinin terimleri grupta normal) sahip grupların sınıfıdır.

2.25. Tanım

G bir grup olsun. G nin artan bir

$$1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots G_\beta = G$$

serisi için $G_\lambda \triangleleft G$ ($\lambda \leq \beta$) ve her $\alpha < \beta$ için

$$G_{\alpha+1}/G_\alpha \leq Z(G/G_\alpha)$$

oluyorsa bu seriye *artan merkez seri* denir. Bir artan merkez seriye sahip olan gruba *hipermerkez grup* denir. Eğer n bir doğal sayı olmak üzere G nin $G_j \triangleleft G$ ($j \leq n$) ve her $0 \leq i < n$ için $G_{i+1}/G_i \leq Z(G/G_i)$ şartlarını sağlayan

$$1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_n = G$$

serisi varsa G ye *nilpotent grup* denir. G nin bu şekildeki serilerinin en küçük uzunluğuna G nin *nilpotentlik sınıfı* denir.

Nilpotent gruplar aşağıda tanımlanan artan ve azalan merkez serileri ile de karakterize edilebilirler.

$Z_0(G) = 1$, $Z_1(G) = Z(G)$ olarak tanımlansın. $\alpha > 1$ bir ordinal sayı olmak üzere her $\beta < \alpha$ için $Z_\beta(G)$ tanımlanmış olsun. Eğer α limit ordinal ise

$$Z_\alpha(G) = \bigcup_{\beta < \alpha} Z_\beta(G)$$

α limit ordinal değilse

$$Z_\alpha(G)/Z_{\alpha-1}(G) = Z(G/Z_{\alpha-1}(G))$$

şeklinde tanımlansın. G nin kardinalitesi aşlamayacağından $Z_\lambda(G) = Z_{\lambda+1}(G) = \dots$ olacak şekilde bir en küçük λ ordinali vardır. Bu terminal gruba G nin *hipermerkezi* denir ve $Z_\infty(G)$ ile gösterilir. Böylece

$$Z_0(G) \leq Z_1(G) \leq \dots$$

serisine G nin *genelleştirilmiş yukarı merkez serisi* denir.

Eğer $Z_\infty(G) = G$ ise G bir hipermerkez gruptur. Eğer bir n doğal sayısı için $Z_n(G) = G$ ise G nilpotent gruptur. Bu şekilde n tamsayılarının en küçüğü G nin nilpotentlik sınıfıdır.

$\gamma_1(G) = G$ olsun. Eğer n limit ordinal ise

$$\gamma_n(G) = \bigcap_{m < n} \gamma_m(G)$$

n limit ordinal değilse

$$\gamma_{n+1}(G) = [\gamma_n(G), G]$$

şeklinde tanımlansın.

$$\dots \leq \gamma_2(G) \leq \gamma_1(G) = G$$

serisine G nin *genelleştirilmiş aşağı merkez serisi* denir. Eğer bir i tamsayısı için $\gamma_{i+1}(G) = 1$ ise G nilpotenttir. Bu şekildeki doğal sayıların en küçüğü $i + 1$ ise G nin nilpotentlik sınıfı i dir.

2.26. Tanım

G bir grup ve $H \leq G$ olsun. Eğer her $\alpha \in \text{End}(G)$ için H^α , H nin α altında görüntüsü olmak üzere $H^\alpha \leq H$ ise H ya G içinde *fully-invariant* denir. Eğer her $\alpha \in \text{Aut}(G)$ için $H^\alpha \leq H$ ise H ya G içinde *karakteristik* denir.

2.27. Tanım

G bir grup olmak üzere G nin bütün normal nilpotent altgrupları tarafından üretilen altgruba G nin *Fitting altgrubu* denir ve $\text{Fit}(G)$ ile gösterilir. Eğer $G = \text{Fit}(G)$ ise G ye *Fitting grup* denir.

2.28. Tanım

G bir grup olsun. G nin hiçbir öz altgrubu tarafından içerilmeyen öz altgrubuna G nin *maksimal altgrubu* denir. G nin bütün maksimal altgruplarının kesişimine de G nin *Frattini altgrubu* denir ve $Frat(G)$ ile gösterilir. Eğer G nin maksimal altgrubu yoksa $Frat(G) = G$ olarak tanımlanır. $Frat(G)$, G nin karakteristik alt grubudur.

2.29. Tanım

G bir grup ve P bir grup-teorik özellik olsun. Eğer G grubunun her öz altgrubu P özelliğini sağlarsa ancak G sağlamazsa G ye *minimal P olmayan (minimal non- P)* grup (kısaca *MNP-grup*) denir. Örneğin P “çözülebilir”, “hipermerkez”, “sonlu eşlenik sınıfı” ise grup sırasıyla MNS-grup, MNHC-grup, MNFC-grup olarak adlandırılır.

2.30. Tanım

$G = \langle a_i \mid a_1^p = 1, a_{i+1}^p = a_i, i \in N \rangle$ şeklinde tanımlanan G grubuna *Prüfer p -grup* veya *quasidevirli p -grup* veya C_{p^∞} tipinden bir grup denir.

2.31. Tanım

Sonsuz bir Ω kümesi üzerine geçişli etki eden G permütasyon grubunun her öz alt grubunun her yörüngesi sonlu ise G ye *barely geçişli grup* denir.

Bir grup barely geçişli permütasyon grubuna izomorf ise bu gruba *barely geçişli* denir.

2.32. Tanım

G bir grup ve $i = 1, 2, \dots$ için $H_i \leq G$ olsun.

$$\dots \leq H_2 \leq H_1$$

olacak şekildeki G nin altgruplarının her azalan zinciri sonlu veya buna denk olarak G nin altgruplarının boştan farklı her kümesi, kapsamaya göre kısmi sıralı, en az bir minimal elemana sahipse G altgrupları üzerinde *minimal şartını* sağlar denir.

G grubu minimal şartını sağlayan bir abelyan grubun sonlu genişlemesi ise G ye *Chernikov grup* denir. Minimal şartını sağlayan bir abelyan grup sonlu devirli grupların ve quasidevirli grupların sonlu direkt çarpımına izomorf olduğundan Chernikov G grubu C_{p^∞} gruplarının sonlu sayıdaki direkt çarpımının sonlu genişlemesidir. Böylece Chernikov G grubu sonlu sayıda quasidevirli grupların direkt çarpımı olan bir sonlu indeksli N altgrubu içerir.

2.33. Tanım

p exponentli abelyan gruba *elemanter abelyan grup* denir. Ayrıca bu gruplar p -mertebeli devirli grupların direkt çarpımı şeklinde yazılabilir.

2.34. Teorem

G ile H birer grup olsun. Aşağıdakiler sağlanır [24].

- i. $\phi : G \rightarrow H$ bir homomorfizma olsun. O zaman $G/\text{Ker}(\phi) \cong \phi(G)$ dir.
- ii. $K \leq G$ ve $L \triangleleft G$ olsun. O zaman $KL/L \cong K/K \cap L$ dir.
- iii. M ile N , G nin normal altgrupları ve $N \leq M$ olsun. O zaman $(G/N)/(M/N) \cong G/M$ dir.

2.35. Lemma

G bir grup ve $H \leq G$ olsun. Eğer $G' \leq H$ ise $H \triangleleft G$ dir.

İspat

Her $g \in G$ ve her $h \in H$ için $g^{-1}hg = h(h^{-1}g^{-1}hg) \in H$ dir. □

2.36. Lemma

G bir grup olsun. $H \triangleleft G$, $N \triangleleft G$ ve $H \cap N = 1$ olsun. O zaman $(NH)' = N'H'$ dir.

İspat

Her $n \in N$ ve $h \in H$ için $h^{-1}n^{-1}hn \in H \cap N = 1$ olduğundan $hn = nh$ dir. O halde

$$\begin{aligned}
(NH)' &= \langle (n_1 h_1)^{-1} (n_2 h_2)^{-1} n_1 h_1 n_2 h_2 \mid n_i \in N, h_i \in H, i = 1, 2 \rangle \\
&= \langle h_1^{-1} n_1^{-1} h_2^{-1} n_2^{-1} n_1 h_1 n_2 h_2 \mid n_i \in N, h_i \in H, i = 1, 2 \rangle \\
&= \langle h_1^{-1} h_2^{-1} h_1 h_2 n_1^{-1} n_2^{-1} n_1 n_2 \mid n_i \in N, h_i \in H, i = 1, 2 \rangle \\
&= \langle [h_1, h_2][n_1, n_2] \mid n_i \in N, h_i \in H, i = 1, 2 \rangle \\
&= \langle [h_1, h_2] \mid h_1, h_2 \in H \rangle \langle [n_1, n_2] \mid n_1, n_2 \in N \rangle \\
&= H'N' = N'H'
\end{aligned}$$

olduğundan iddia sağlanır. $\square$

2.37. Lemma

G bir grup ve $N \triangleleft G$ olsun. G/N bölüm grubunun abelyan olması için gerek ve yeter şart $G' \leq N$ olmasıdır.

İspat

Eğer G/N abelyan ise her $x, y \in G$ için $xyN = yxN$ olduğundan $[x, y] \in N$ dir. O halde $\langle [x, y] \mid x, y \in G \rangle = G' \leq N$ dir. Karşıt olarak $G' \leq N$ ise her $x, y \in G$ için $[x, y] \in N$ dir. Böylece her $x, y \in G$ için $[x, y]N = N$ olduğundan $xyN = yxN$ dir. $\square$

2.38. Teorem

G bir grup ve $N \triangleleft G$ olsun. Eğer N ve G/N çözülebilir ise G çözülebilirdir [24].

2.39. Sonuç

G bir grup olsun.

- i. $k \geq 0$ olmak üzere $G^{(k)} \triangleleft G$ ve $G^{(k)}/G^{(k+1)}$ abelyandır.
- ii. G nin çözülebilir olması için gerek ve yeter şart bir $n \geq 0$ için $G^{(n)} = 1$ olmasıdır.
- iii. Eğer $H \leq G$ ve $N \triangleleft G$ olmak üzere H ve N çözülebilir ise HN çözülebilirdir.

İspat

(i) Her $k \geq 0$ için $G^{(k+1)} = [G^{(k)}, G^{(k)}] = (G^{(k)})'$ olduğundan Lemma 2.37 dan $G^{(k)}/G^{(k+1)}$ abelyandır. $G^{(k)} \triangleleft G$ olduğunu tümevarım ile gösterelim. $G^{(0)} = G \triangleleft G$ dir. Kabul edelim ki $k \geq 0$ için $G^{(k)} \triangleleft G$ olsun. $G^{(k+1)} = [G^{(k)}, G^{(k)}] = \langle [x, y] \mid x, y \in G^{(k)} \rangle$ dir. Her $x, y \in G^{(k)}$ ve her $g \in G$ için

$$\begin{aligned} g^{-1}[x, y]g &= g^{-1}x^{-1}y^{-1}xyg \\ &= g^{-1}x^{-1}gg^{-1}y^{-1}gg^{-1}xgg^{-1}yg \\ &= (g^{-1}xg)^{-1}(g^{-1}yg)^{-1}g^{-1}xgg^{-1}yg \\ &= (x^g)^{-1}(y^g)^{-1}x^gy^g \\ &= [x^g, y^g] \end{aligned}$$

ve $G^{(k)} \triangleleft G$ olduğundan $x^g, y^g \in G^{(k)}$ dir. Dolayısıyla $[x^g, y^g] \in G^{(k+1)}$ dir. O halde her $g \in G$ için $x_i, y_i \in G^{(k)}$ ve $\varepsilon_i = \pm 1$ ($0 \leq i \leq t$) olmak üzere

$$\begin{aligned} g^{-1}[x_1, y_1]^{\varepsilon_1}[x_2, y_2]^{\varepsilon_2} \dots [x_t, y_t]^{\varepsilon_t}g &= (g^{-1}[x_1, y_1]g)^{\varepsilon_1}(g^{-1}[x_2, y_2]g)^{\varepsilon_2} \dots (g^{-1}[x_t, y_t]g)^{\varepsilon_t} \\ &= [x_1^g, y_1^g]^{\varepsilon_1}[x_2^g, y_2^g]^{\varepsilon_2} \dots [x_t^g, y_t^g]^{\varepsilon_t} \end{aligned}$$

olduğundan $G^{(k+1)} \triangleleft G$ dir.

(ii) G çözülebilir ise $1 = H_0 \triangleleft \dots \triangleleft H_n = G$ olacak şekilde G nin bir abelyan serisi vardır. $k \geq 0$ için $G^{(k)} \leq H_{n-k}$ olduğunu tümevarım ile gösterelim. $k = 0$ için iddia doğrudur. Kabul edelim ki $k \geq 1$ olmak üzere $G^{(k-1)} \leq H_{n-k+1}$ olsun. Ayrıca H_{n-k+1}/H_{n-k} abelyan olduğundan Lemma 2.37 dan $H'_{n-k+1} \leq H_{n-k}$ dir. O zaman

$$G^{(k)} = [G^{(k-1)}, G^{(k-1)}] \leq [H_{n-k+1}, H_{n-k+1}] = H'_{n-k+1} \leq H_{n-k}$$

dır. Böylece $k = n$ için $G^{(n)} \leq H_0 = 1$ olup iddia sağlanır. Karşıt olarak $n \geq 0$ için $G^{(n)} = 1$ olsun. (i) den $k \geq 0$ için $G^{(k)}/G^{(k+1)}$ abelyan olduğundan G çözülebilirdir.

(iii) H çözülebilir olduğundan (ii) den bir $n \geq 0$ tamsayısı için $H^{(n)} = 1$ dir. $0 \leq k < n$ olmak üzere $H^{(k)}N/N$ terimleri için Teorem 2.34 ten

$$\begin{aligned}
(H^{(k)}N/N)/(H^{(k+1)}N/N) &\cong H^{(k)}N/H^{(k+1)}N \\
&= H^{(k)}(H^{(k+1)}N)/H^{(k+1)}N \\
&\cong H^{(k)}/H^{(k)} \cap H^{(k+1)}N
\end{aligned}$$

dir. $H^{(k+1)} \leq H^{(k)} \cap H^{(k+1)}N$ olduğundan Lemma 2.37 den $(H^{(k)}N/N)/(H^{(k+1)}N/N)$ abelyandır. Böylece HN/N çözülebilirdir. N ve HN/N çözülebilir olduğundan Teorem 2.38 den HN çözülebilirdir. $\square$

2.40. Lemma (Grün's Lemma)

G bir grup olsun. $Z(G/Z(G)) \neq 1$ ise $G \neq G'$ dir.

İspat

$Z_1(G) = Z(G)$ olmak üzere $Z_2(G)/Z_1(G) = Z(G/Z_1(G))$ olsun. Hipotezden $Z_1(G) \neq Z_2(G)$ olduğundan bir $z \in Z_2(G) \setminus Z_1(G)$ vardır. G den $Z_1(G)$ ye $g \rightarrow \phi(g) = [g, z]$ bağıntısının bir homomorfizma olduğunu gösterelim.

$z \in Z_2(G) \setminus Z_1(G)$ olduğundan $zZ_1(G) \in Z(G/Z_1(G))$ dir. Böylece her $g \in G$ için $gzZ_1(G) = zgZ_1(G)$ olduğundan $[g, z] \in Z_1(G)$ dir. O halde her $g \in G$ için $\phi(g) \in Z_1(G)$ dir. Böylece ϕ anlamlıdır. Her $g_1, g_2 \in G$ için $g_1 = g_2$ ise $\phi(g_1) = \phi(g_2)$ açık olduğundan ϕ iyi tanımlıdır. Her $g_1, g_2 \in G$ için

$$\begin{aligned}
\phi(g_1g_2) &= [g_1g_2, z] \\
&= (g_1g_2)^{-1}z^{-1}g_1g_2z \\
&= g_2^{-1}g_1^{-1}z^{-1}g_1g_2z \\
&= g_2^{-1}g_1^{-1}z^{-1}g_1zg_2g_2^{-1}z^{-1}g_2z \\
&= g_2^{-1}[g_1, z]g_2[g_2, z] \quad ([g_1, z] \in Z_1(G)) \\
&= [g_1, z][g_2, z] \\
&= \phi(g_1)\phi(g_2)
\end{aligned}$$

olduğundan ϕ bir grup homomorfizmasıdır. Homomorfizmanın çekirdeği

$$\begin{aligned}
\text{Ker}(\alpha) &= \{g \in G \mid [g, z] = 1\} \\
&= \{g \in G \mid gz = zg\} \\
&= C_G(z)
\end{aligned}$$

ve $z \notin Z_1(G)$ olduğundan $\text{Ker}(\alpha) = C_G(z) < G$ dir. Teorem 2.34 ten

$$G/C_G(z) \cong \text{Im}(\alpha) \leq Z_1(G)$$

dir. Böylece $G/C_G(z)$ abelyandır. Lemma 2.37 dan $G' \leq C_G(z)$ olduğundan $G' < G$ dir. $\square$

2.41. Lemma

G bir grup olsun.

- i. Fully-invariant altgruplar karakteristik ve karakteristik altgruplar normaldir.
- ii. Eğer H, K da karakteristik ve $K \triangleleft G$ ise $H \triangleleft G$ dir.

İspat

(i) H, G nin fully-invariant altgrubu olsun. Her $\alpha \in \text{Aut}(G)$ için $\alpha \in \text{End}(G)$ olduğundan $H^\alpha \leq H$ dir. Böylece H, G de karakteristik.

H altgrubu G de karakteristik olsun. O zaman her $\alpha \in \text{Aut}(G)$ için $H^\alpha \leq H$ dir. Özel olarak her $g \in G$ için $\alpha = \tau_g : G \rightarrow G$ olacak şekilde $x \rightarrow \tau_g(x) = x^g = g^{-1}xg$ eşlenikleme şeklinde tanımlı fonksiyon G üzerinde bir otomorfizmadır. Dolayısıyla her $g \in G$ için $H^{\tau_g} = g^{-1}Hg \leq H$ olduğundan $H \triangleleft G$ dir.

(ii) $K \triangleleft G$ olduğundan $\phi : K \times G \rightarrow K$, $\phi(k, g) = k^g = g^{-1}kg$ fonksiyonu G nin K üzerine bir etkisidir. Aynı zamanda her $g \in G$ için $\phi_g : K \rightarrow K$, $\phi_g(k) = k^g$ fonksiyonu K üzerinde bir otomorfizmadır. H, K da karakteristik olduğundan özel olarak her $g \in G$ için $H^{\phi_g} \leq H$ dir. Böylece her $g \in G$ için $g^{-1}Hg \leq H$ olduğundan $H \triangleleft G$ dir. $\square$

2.42. Lemma

Sonlu p -grup nilpotenttir ve nilpotent grup çözülebilirdir [24].

2.43. Lemma

G bir grup ve $H \leq G$ olsun. O zaman $C_G(H) \triangleleft N_G(H)$ ve $N_G(H)/C_G(H)$, $Aut(H)$ nın bir altgrubuna izomorftur.

İspat

$C_G(H) = \{g \in G \mid \text{her } h \in H \text{ için } gh = hg\}$ ve $N_G(H) = \{g \in G \mid g^{-1}Hg = H\}$ olmak üzere her $x \in C_G(H)$, her $y \in N_G(H)$ ve her $h \in H$ için

$$\begin{aligned} y^{-1}xyh &= y^{-1}xyhy^{-1}y \\ &= y^{-1}yhy^{-1}xy \quad (yhy^{-1} \in H) \\ &= hy^{-1}xy \end{aligned}$$

olduğundan $y^{-1}xy \in C_G(H)$ dir. Böylece $C_G(H) \triangleleft N_G(H)$ dir.

$g \in N_G(H)$ olmak üzere $\phi_g : H \rightarrow H$, $\phi_g(h) = hgh^{-1}$ olsun. $\phi_g \in Aut(H)$ olduğu zorlanmadan gösterilebilir. $\psi : N_G(H) \rightarrow Aut(H)$, $\psi(g) = \phi_g$ bağıntısının iyi tanımlı olduğu açık ve $\phi_g \in Aut(G)$ olduğundan ψ anlamlıdır. Her $g_1, g_2 \in N_G(H)$ için $\psi(g_1g_2) = \phi_{g_1g_2}$ ve $\psi(g_1)\psi(g_2) = \phi_{g_1}\phi_{g_2}$ olmak üzere her $h \in H$ için

$$\begin{aligned} \phi_{g_1g_2}(h) &= g_1g_2h(g_1g_2)^{-1} \\ &= g_1g_2hg_2^{-1}g_1^{-1} \\ &= \phi_{g_1}(\phi_{g_2}(h)) \\ &= \phi_{g_1}\phi_{g_2}(h) \end{aligned}$$

olduğundan $\psi(g_1g_2) = \phi_{g_1g_2} = \phi_{g_1}\phi_{g_2} = \psi(g_1)\psi(g_2)$ dir. Dolayısıyla ψ bir grup homomorfizmasıdır. Ayrıca

$$\begin{aligned} Ker(\psi) &= \{g \in N_G(H) \mid \psi(g) = 1\} \\ &= \{g \in N_G(H) \mid \text{her } h \in H \text{ için } \phi_g(h) = 1(h)\} \\ &= \{g \in N_G(H) \mid \text{her } h \in H \text{ için } hgh^{-1} = h\} \\ &= C_G(H) \end{aligned}$$

olduğundan Teorem 2.34 ten $N_G(H)/C_G(H) \cong \psi(N_G(H)) \leq \text{Aut}(H)$ dir. $\square$

2.44. Lemma

G her öz altgrubu çözülebilir olan bir mükemmel p -grup olsun. Eğer M , G nin bir sonlu normal altgrubu ise M abelyandır.

İspat

$M \triangleleft G$ olduğundan $N_G(M) = G$ dir. Böylece Lemma 2.43 ten $G/C_G(M)$, $\text{Aut}(M)$ nin bir alt grubuna izomorftur. M sonlu olduğundan $\text{Aut}(M)$ sonludur. Dolayısıyla $G/C_G(M)$ sonludur. Eğer $C_G(M) \neq G$ ise hipotezden $C_G(M)$ çözülebilir ve $G/C_G(M)$ sonlu p -grup olduğundan Lemma 2.42 den $G/C_G(M)$ çözülebilirdir. Böylece Teorem 2.38 den G çözülebilirdir. Ama bu G nin bir mükemmel grup olmasıyla çelişir. Dolayısıyla $C_G(M) = G$ olmalıdır ve böylece M abelyandır. $\square$

2.45. Lemma

Abelyan G grubunun basit grup olması için gerek ve yeter şart bir p asal sayısı için $|G| = p$ olmasıdır [24].

2.46. Lemma

G bir grup olsun. $\text{Frat}(G)$ altgrubu G nin üreteç olmayan elemanlarının kümesine eşittir [22].

2.47. Lemma

G bir abelyan p -grup olsun. O zaman $G/\text{Frat}(G)$ bir elemanter abelyan p -gruptur.

İspat

G bir abelyan grup olduğundan her altgrubu normaldir. Kabul edelim ki M , G nin bir maksimal altgrubu olsun. O zaman G/M basittir. Lemma 2.45 ten G bir p -grup olduğundan

$|G/M| = p$ dir. Böylece G/M devirlidir. Her $i \in I$ için M_i G nin bir maksimal altgrubu olmak üzere

$$\phi : G \rightarrow \prod_{i \in I} G/M_i$$

$\phi(g) = (gM_i)_{i \in I}$ şeklinde tanımlı ϕ fonksiyonu bir homomorfizmadır.

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\phi) &= \{g \in G \mid \phi(g) = 1\} \\ &= \{g \in G \mid \forall i \in I \text{ için } g \in M_i\} \\ &= \{g \in G \mid g \in \bigcap_{i \in I} M_i\} \\ &= \text{Frat}(G) \end{aligned}$$

dir. Böylece Teorem 2.34 ten

$$G/\text{Frat}(G) \cong \phi(G) \leq \prod_{i \in I} G/M_i$$

dir. Dolayısıyla $\phi(G)$ p exponentli abelyan bir grup olduğundan $G/\text{Frat}(G)$ elemanter abelyandır. Ek olarak böylece $G/\text{Frat}(G)$ p mertebeli devirli grupların direkt çarpımı şeklinde yazılabilir. $\square$

2.48. Sonuç

Çözülebilir ve nilpotent grup sınıfları sayılabilir tanımlanabilir [26].

2.49. Lemma

Bir sonsuz G grubunun sadık bely geçişli grup olması için gerek ve yeter şart $\bigcap_{x \in G} H^x = 1$ ve her $K < G$ için $|K : K \cap H| < \infty$ olacak şekilde G nin bir H altgrubunun olmasıdır [11].

2.50. Sonuç

G bir grup, $\emptyset \neq X \subseteq G$ ve H ile K , G nin birer altgrubu olsun. Aşağıdakiler sağlanır.

- i. $X^H = \langle x^h \mid x \in X, h \in H \rangle$ altgrubu $\langle X, H \rangle$ nin X i içeren normal altgruplarının arakesitidir veya buna denk olarak X^H , $\langle X, H \rangle$ nin X i içeren en küçük normal altgrubudur.
- ii. $H^K = H[H, K]$ dır.
- iii. $H_G = \bigcap_{g \in G} g^{-1}Hg$ ve $H_G \triangleleft G$ dir.

İspat

(i) Her $x^h \in X^H$ ve her $g \in X \cup H$ için $g^{-1}x^hg = g^{-1}h^{-1}xhg = x^{hg}$ dır. Eğer $g \in X$ ise $\langle X \rangle \leq X^H$ ve $g, g^{-1} \in X^H$ olduğundan $g^{-1}x^hg \in X^H$ dır. Eğer $g \in H$ ise $hg \in H$ olduğundan $g^{-1}x^hg = x^{hg} \in X^H$ dır. Ayrıca $k \geq 0$ ve $\varepsilon = \pm 1$ olacak şekilde $1 \leq i \leq k$ için $x_i \in X$, $h_i \in H$ ve $g \in X \cup H$ olmak üzere her $y \in X^H$ için

$$\begin{aligned} g^{-1}yg &= g^{-1}(x_1^{h_1})^{\varepsilon_1}(x_2^{h_2})^{\varepsilon_2} \dots (x_k^{h_k})^{\varepsilon_k}g \\ &= (x_1^{h_1g})^{\varepsilon_1}(x_2^{h_2g})^{\varepsilon_2} \dots (x_k^{h_kg})^{\varepsilon_k} \end{aligned}$$

olduğundan $X^H \triangleleft \langle X, H \rangle$ dir [22].

$X \subseteq N$ olacak şekildeki her $N \triangleleft \langle X, H \rangle$ için $X \subseteq X^H \leq N^H = N$ olduğundan X^H , X i içeren $\langle X, H \rangle$ nin normal altgrupların arakesitidir veya buna denk olarak X^H , $\langle X, H \rangle$ nin X i içeren en küçük normal altgrubudur.

(ii) Her $x \in H[H, K]$ için $h, h_i \in H$, $k_i \in K$ ve $\varepsilon_i = \pm 1$ ($1 \leq i \leq l$) olmak üzere

$$\begin{aligned} x &= h[h_1, k_1]^{\varepsilon_1}[h_2, k_2]^{\varepsilon_2} \dots [h_l, k_l]^{\varepsilon_l} \\ &= h(h_1^{-1}h_1^{k_1})^{\varepsilon_1}(h_2^{-1}h_2^{k_2})^{\varepsilon_2} \dots (h_l^{-1}h_l^{k_l})^{\varepsilon_l} \end{aligned}$$

olduğundan $H[H, K] = \langle h^k \mid h \in H, k \in K \rangle = H^K$ dır.

(iii) $N \leq H$ olacak şekilde her $N \triangleleft G$ ve her $g \in G$ için $g^{-1}Ng = N \leq g^{-1}Hg$ olduğundan $N \subseteq \bigcap_{g \in G} g^{-1}Hg$ dir. Böylece $H_G \subseteq \bigcap_{g \in G} g^{-1}Hg$ dir. Karşıt olarak $x \in \bigcap_{g \in G} g^{-1}Hg$ olsun. O zaman her $g \in G$ için $x \in g^{-1}Hg$ dir. Böylece her $g \in G$ için $gxg^{-1} \in H$ dir. $x \in \langle x^g \mid g \in G \rangle \triangleleft G$ olduğundan $x \in H_G$ dir. O halde $H_G = \bigcap_{g \in G} g^{-1}Hg$ dir.

$A = \{gH \mid g \in G\}$ olsun. $\phi(x) = xgH$ şeklinde tanımlı $\phi : G \times A \rightarrow A$ fonksiyonu G nin A üzerine bir etkisidir. Ayrıca $\phi_x(gH) = xgH$ olacak şekilde $\phi_x : A \rightarrow A$ fonksiyonu bir permütasyondur. ϕ ye karşılık gelen temsil $\psi(x) = \phi_x$ olacak şekilde $\psi : G \rightarrow \text{Sym}(A)$ homomorfizmasıdır.

$$\begin{aligned}
\text{Ker}(\psi) &= \{x \in G \mid \psi(x) = 1\} \\
&= \{x \in G \mid \phi_x = 1\} \\
&= \{x \in G \mid \forall g \in G \text{ için } \phi_x(g) = 1(g)\} \\
&= \{x \in G \mid \forall g \in G \text{ için } xgH = gH\} \\
&= \{x \in G \mid \forall g \in G \text{ için } g^{-1}xgH = H\} \\
&= \{x \in G \mid \forall g \in G \text{ için } g^{-1}xg \in H\} \\
&= \{x \in G \mid \forall g \in G \text{ için } x \in gHg^{-1}\} \\
&= \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}
\end{aligned}$$

dir (her $g \in G$ için $k = g^{-1}$ olmak üzere $gHg^{-1} = k^{-1}Hk$). $\text{Ker}(\psi) \triangleleft G$ olduğundan iddia doğrudur. $\square$

2.51. Lemma

Eğer G grubu sonlu indeksli çözülebilirlik uzunluğu en fazla n olan bir altgrup içeriyorsa G sonlu indeksli çözülebilirlik uzunluğu en fazla n^2 olan bir karakteristik altgrup içerir [9].

2.52. Lemma

Sonlu üreteçli çözülebilir torsiyon grup sonludur [16].

2.53. Lemma

G grubu nilpotent, $\mathfrak{X}$ herhangi iki abelyan $\mathfrak{X}$ -grubunun tensör çarpımının her homomorfik görüntüsünü içerecek şekilde $\mathbf{P}$ -kapalı bir grup sınıfı ve $G/G' \in \mathfrak{X}$ ise $G \in \mathfrak{X}$ dir [21].

2.54. Lemma

G bir grup olsun. α bir ordinal ve λ bir limit ordinal olmak üzere $\gamma_1(G) = G$, $\gamma_{\alpha+1}(G) = [\gamma_\alpha(G), G]$ ve $\gamma_\lambda(G) = \bigcap_{\beta < \lambda} \gamma_\beta(G)$ olsun. O zaman G nin residually nilpotent grup olması için gerek ve yeter şart $\gamma_\omega(G) = 1$ olmasıdır. Ayrıca $\gamma_\alpha(G)$, G de fully-invarianttir.

İspat

İlk önce $N \triangleleft G$ olmak üzere tümevarım uygulayarak $i \geq 1$ için $\gamma_{i+1}(G/N) = \gamma_{i+1}(G)N/N$ olduğunu gösterelim. $\gamma_1(G/N) = G/N = GN/N = \gamma_1(G)N/N$ dir. Kabul edelim ki $\gamma_i(G/N) = \gamma_i(G)N/N$ olsun.

$$\begin{aligned} \gamma_{i+1}(G/N) &= [\gamma_i(G/N), G/N] \\ &= [\gamma_i(G)N/N, G/N] \\ &= [\gamma_i(G), G]N/N \\ &= \gamma_{i+1}(G)N/N \end{aligned}$$

Kabul edelim ki $\gamma_\omega(G) = 1$ olacak şekilde hipotezde belirtildiği gibi G nin bir sonsuz genelleştirilmiş azalan merkez serisi olsun. Her $x \in G$ için $x \in \gamma_i(G)$ ve $x \notin \gamma_{i+1}(G)$ olacak şekilde bir $i \geq 1$ tamsayısı vardır. Ayrıca ω en küçük limit ordinali ve $i + 1 < \omega$ olduğundan $i + 1$ ordinaldir ve sonludur. Merkez serisindeki her terimi $\gamma_{i+1}(G)$ ile çarpıp bölerek bölüm grubu oluşturulursa yukarıda gösterildiği gibi $i + 1 \geq j \geq 1$ olmak üzere $\gamma_j(G)\gamma_{i+1}(G)/\gamma_{i+1}(G) = \gamma_j(G/\gamma_{i+1}(G))$ ve $\gamma_{i+1}(G/\gamma_{i+1}(G)) = 1$ olduğundan $G/\gamma_{i+1}(G)$ nilpotenttir. O halde G grubu residually nilpotenttir.

Kabul edelim ki G residually nilpotent olsun. O zaman birimden farklı her $g \in G$ için $g \notin N_g$ ve G/N_g nilpotent olacak şekilde bir $N_g \triangleleft G$ vardır. Kabul edelim ki $\gamma_\omega(G) \neq 1$ olsun. O halde $1 \neq x \in \gamma_\omega(G)$ vardır. G residually nilpotent grup olduğundan $x \notin N_x$ ve G/N_x nilpotent olacak şekilde G nin bir N_x normal altgrubu vardır. Böylece bir $k \geq 1$ için $\gamma_k(G/N_x) = 1$ dir. $\gamma_k(G/N_x) = \gamma_k(G)N_x/N_x$ olduğundan $\gamma_k(G) \leq N_x$ dir. Böylece $x \in \gamma_\omega(G) \leq N_x$ olur ki bu bir çelişkidir. O halde kabul yanlış olup $\gamma_\omega(G) = 1$ dir. Ayrıca ispatın ilk kısmında gösterildiği gibi her λ ordinali için G nin bir genelleştirilmiş azalan merkez serisini $\gamma_\lambda(G)$ ile çarpıp bölerek bölüm grubu oluşturulursa $G/\gamma_\lambda(G)$ nin azalan merkez serisi sonlu adımda birim gruba ulaştığından $G/\gamma_\lambda(G)$ nilpotenttir.

Her $\rho \in \text{End}(G)$ için $\gamma_1(G)^\rho = G^\rho \leq G = \gamma_1(G)$ dir. Kabul edelim ki her $\rho \in \text{End}(G)$ için $\gamma_\alpha(G)^\rho \leq \gamma_\alpha(G)$ olsun. $\gamma_{\alpha+1}(G) = \langle [x, g] \mid x \in \gamma_\alpha(G), g \in G \rangle$ dir. Her $x \in \gamma_\alpha(G)$ ve her $g \in G$ için $[x, g]^\rho = [x^\rho, g^\rho]$ ve $\gamma_\alpha(G)^\rho \leq \gamma_\alpha(G)$ olduğundan $x^\rho \in \gamma_\alpha(G)$ dir. Böylece $[x^\rho, g^\rho] \in \gamma_{\alpha+1}(G)$ dir. $\square$

2.55. Lemma

G bir lokal nilpotent grup ve T (G nin torsiyon altgrubu), G nin mertebeleri sonlu elemanlarından oluşan bir altkümesi olsun. O zaman T , G/T torsiyonsuz olacak şekilde G nin fully-invariant altgrubudur ve T p -grupların direkt çarpımına eşittir [22].

2.56. Lemma

Lokal nilpotent FC-grup hipermerkezdir [23].

2.57. Lemma

G bir hipermerkez grupsa normalleyen şartını sağlar ve böylece G lokal nilpotenttir [22].

2.58. Lemma

G bir lokal nilpotent grup ve $N \triangleleft G$ olsun. N hipermerkez ve G/N sonlu üreteçli ise G hipermerkezdir [17].

2.59. Lemma

G bir lokal nilpotent grup olsun. O zaman G grubu izolator özelliğini sağlar [16].

2.60. Lemma

H torsiyonsuz lokal nilpotent bir G grubunun altgrubu olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır [16].

- i. Eğer H hipermerkez ise $I_G(H)$ da aynı yukarı merkez serisi uzunluğuna sahip hipermerkez gruptur.

ii. $n = 1, 2, \dots$ için $(I_G(H))^n = I_G(H^n)$ dir.

2.61. Lemma

G bir lokal sonlu barely geçişli permütasyon grubu ve H , G nin bir nokta dengeleyeni olsun. O zaman $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i$ olacak şekilde G nin $H < H_1 < H_2 \dots$ altgruplarının artan zinciri vardır ve G nin her K öz altgrubu için $K \leq H_n$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. Ayrıca G nin herhangi iki öz altgrubu bir öz altgrubunu üretir [14].

2.62. Lemma

G bir lokal sonlu barely geçişli grup olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır [14].

- i. G nin her öz altgrubu residually sonludur.
- ii. $Z(G)$ sonludur ve $Z_2(G) = Z(G)$ dir yani G nin hipermerkezi merkezine eşittir.

2.63. Teorem

G lokal sonlu barely geçişli bir grup olsun. O zaman G nin her öz normal altgrubu sonlu exponentli nilpotenttir [11].

2.64. Teorem

Lokal sonlu barely geçişli grup bir p -gruptur [9].

2.65. Teorem

Mükemmel lokal sonlu minimal FC olmayan bir grup ya basit bir gruptur ya da bir p -gruptur [8].

2.66. Teorem

Basit lokal sonlu minimal FC olmayan grup yoktur [15].

2.67. Teorem

Bir G grubunun hipermerkez olması için gerek ve yeter şart $x_{i+1} = [x_i, y_i]$ olacak şekilde verilen G nin elemanlarının iki $x_1, x_2, \dots$ ve $y_1, y_2, \dots$ dizisi için $x_m = 1$ olacak şekilde bir $m > 0$ tamsayısının olmasıdır [21].

2.68. Lemma

G bir nilpotent p -grup olsun. H , G/H sonsuz elemanter abelyan p -grup olacak şekilde G nin bir normal altgrubu olsun. U , G nin bir sonlu altgrubu ve $a \in G \setminus U$ olsun. O zaman G nin bir V altgrubu vardır öyle ki $U \leq V$, $a \notin V$ ve $V/V \cap H$ sonsuzdur [18].

2.69. Lemma

$(C_i)_N$ bir A grubunun azalan bir zinciri ve U , A nın sonlu bir altgrubu olsun. O zaman $\bigcap_{i=1}^{\infty} UC_i = U(\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i)$ dir [18].

2.70. Lemma

G bir lokal nilpotent sayılabilir grup, U , G nin sonlu üreteçli bir altgrubu ve M , G nin $U \cap M = \emptyset$ olacak şekilde bir sonlu altkümesi olsun. O zaman $I_G(K) = G$, $U \leq K$ ve $K \cap M = \emptyset$ olacak şekilde G nin bir K altgrubu vardır [19].

2.71. Lemma

Eğer lokal sonlu p -grup olan bir G grubunun sonlu maksimal elemanter abelyan bir altgrubu varsa G bir Chernikov gruptur [12].

2.72. Lemma

Bir G grubu Fitting gruptur ancak ve ancak G nin her elemanı G nin bir normal nilpotent altgrubunun elemanıdır [22].

2.73. Lemma

H Chernikov olmayan bir sonsuz lokal nilpotent p -grup olsun. Ayrıca F , H nin sonlu bir altgrubu ve $C = C_G(F)$ olsun. O zaman C bir sonsuz elemanter abelyan altgrup içerir [6].

2.74. Lemma

Her lokal çözülebilir G grubu bir SI-gruptur. Böylece basit lokal çözülebilir bir grubun mertebesi asaldir [22].

2.75. Lemma

Bir lokal nilpotent G grubunun esas faktörü merkez tarafından kapsanır [22].

2.76. Lemma

H bir grup ve H nin A , K , U altgrupları için A sonlu, K , H da normal ve A^H , U tarafından içerilsin. $M = AK$ olmak üzere eğer $K/(K \cap U)K'$ sonsuzsa $M/(M \cap U)M'$ sonsuzdur [6].

2.77. Lemma

Bir abelyan G grubunun sınırlı olması için gerek ve yeter şart sınırlı sonlu mertebeli devirli grupların direkt toplamı olmasıdır [22].

2.78. Teorem

G bir sonlu abelyan p -grubu olsun. O zaman G devirli altgruplarının bir iç direkt çarpımıdır [24].

2.79. Teorem

$\mathfrak{X}$ altgrup ve sonlu kartezyen çarpım formuna göre kapalı olan bir grup teorik sınıf ve G bir sayılabilir grup olsun. Eğer G residually $\mathfrak{X}$ -grup ise G nin $G = N_0 \geq N_1 \geq \dots$ olacak şekilde normal altgruplarının azalan bir zinciri vardır öyle ki her $i \geq 1$ için $N_i \triangleleft G$ öyle ki

$G/N_i \in \mathfrak{X}$ ve $\bigcap_{i=1}^{\infty} N_i = 1$ dir.

İspat

G residually $\mathfrak{X}$ -grup olduğundan $i \geq 1$ olmak üzere her $1 \neq x_i \in G$ için $x_i \notin N_{x_i} \triangleleft G$ vardır öyle ki $G/N_{x_i} \in \mathfrak{X}$ dir. $N_1 = N_{x_1}$, $N_i = \bigcap_{k=1}^i N_{x_k}$ ve $C_i = \prod_{k=1}^i G/N_{x_k}$ olsun. $\phi_i : G \rightarrow C_i$ öyle ki $(gN_i) \rightarrow (gN_{x_1}, \dots, gN_{x_i})$ fonksiyonu bir homorfizmadır. Ayrıca

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\phi_i) &= \{g \in G \mid \phi_i(g) = 1\} \\ &= \{g \in G \mid (gN_{x_1}, gN_{x_2}, \dots, gN_{x_i}) = (N_{x_1}, N_{x_2}, \dots, N_{x_i})\} \\ &= \{g \in G \mid g \in \bigcap_{k=1}^i N_{x_k}\} \\ &= N_i \end{aligned}$$

dir. Teorem 2.34 ten $G/N_i \cong \phi_i(G)$ ve hipotezden $\phi_i(G) \in \mathfrak{X}$ olduğundan $G/N_i \in \mathfrak{X}$ dir. Dolayısıyla $G = N_0 \geq N_1 \geq \dots$, G nin normal altgruplarının azalan bir zinciridir. Ayrıca $\bigcap_{i=1}^{\infty} N_i = 1$ dir. $\square$

2.80. Lemma

H ve U bir G grubunun altgrupları ve H, G de normal olsun. O zaman

$$|HU : U| = |H : H \cap U|$$

dir.

İspat

$X \subseteq H$, U nun HU içindeki sol koset temsilcilerinin bir tam kümesi olsun. O zaman

$$HU = \bigcup_{x \in X} xU$$

ve her $x \neq y \in X$ için $xU \cap yU = \emptyset$ dir. Aynı zamanda $|HU : U| = |X|$ dir. O zaman X in $H \cap U$ nun H içindeki sol koset temsilcilerinin bir tam kümesi olduğunu göstermek yeterlidir. Kabul edelim ki $x, y \in X$ ve $x \neq y$ için $d \in x(H \cap U) \cap y(H \cap U)$ olsun. O

zaman $d = xu = yv$ olacak şekilde $u, v \in U$ vardır. Fakat bu durumda

$$xU = (xu)U = (yv)U = yU$$

olur ki bu ise bir çelişkidir. Bundan dolayı $x(H \cap U) \cap y(H \cap U) = \emptyset$ dır. Böylece $H = \bigcup_{x \in X} x(H \cap U)$ olduğunu gösterebilirsek o zaman X in H içinde $H \cap U$ nun sol koset temsilcilerinin bir tam kümesi olduğunu göstermiş oluruz. Böylece $h \in H$ olsun. O zaman $HU = \bigcup_{x \in X} xU$ olduğundan her $u \in U$ için $h = xu$ dur. Böylece $h, x \in H$ olduğundan $u = x^{-1}h \in H$ ve böylece $u \in H \cap U$ dir. Buradan $h = xu \in x(H \cap U)$ elde edilir. Böylece X , $H \cap U$ nun H içindeki sol koset temsilcilerinin bir tam kümesi olduğundan $|H : H \cap U| = |X|$ ve böylece $|HU : U| = |H : H \cap U|$ elde edilir. $\square$

3. BAZI YARDIMCI ÖNERMELER

3.1. Önerme

G bir sonsuz üreteçli MNHC-grup ise $G, (*)$ özelliğini sağlar.

İspat

G sonlu üreteçli olmadığından G nin sonlu üreteçli her altgrubu G nin öz hipermerkez alt grubudur. Böylece Lemma 2.57 den G nin sonlu üreteçli her altgrubu lokal nilpotent ve dolayısıyla nilpotenttir. Böylece G MNHC-grup olduğundan lokal nilpotenttir. H, G nin hipermerkezi olsun. Lemma 2.58 den G/H sonsuz üreteçlidir. Aksi halde G hipermerkez olur ki bu hipotez ile çelişir. Kabul edelim ki iddia yanlış olsun. O zaman bir $1 \neq w \in G$ ve G nin $w \notin U$ olacak şekilde sonlu üreteçli bir U altgrubu için bir $y_1 \in G \setminus H$ vardır öyle ki $w \notin \langle U, y_1 \rangle$ dir. $C_1/H = C_{G/H}(y_1H)$ olsun. H, G nin hipermerkezi olduğundan hipermerkez tanımından $Z(G/H) = 1$ dir. Böylece $C_1 \neq G$ dir. Aksi halde $y_1H \in Z(G/H) = 1$ ve dolayısıyla $y_1 \in H$ olur ki bu $y_1 \in G \setminus H$ olmasıyla çelişir. O halde $C_1 < G$ olduğundan ve kabulden $G, (*)$ özelliğini sağlamadığından bir $y_2 \in G \setminus C_1$ vardır öyle ki $w \notin \langle U, y_1, y_2 \rangle$ dir. Ayrıca $y_2 \in G \setminus C_1$ olduğundan $y_2H \notin C_1/H$ dir. Böylece $y_1y_2H \neq y_2y_1H$ olduğundan $y_1^{-1}y_2^{-1}y_1y_2 = [y_1, y_2] \notin H$ dir. $C_2/H = C_{G/H}([y_1, y_2]H)$ olsun. $Z(G/H) = 1$ olduğundan $C_2 < G$ dir. Benzer şekilde kabulden $w \notin \langle U, y_1, y_2, y_3 \rangle$ olacak şekilde bir $y_3 \in G \setminus C_2$ vardır ve $[y_1, y_2, y_3] \notin H$ dir. Bu şekilde devam edilirse bir $n \geq 1$ doğal sayısı için $w \notin \langle U, y_1, y_2, \dots, y_n \rangle$ ve $[y_1, y_2, \dots, y_n] \notin H$ olacak şekilde $y_1, y_2, \dots, y_n \in G \setminus H$ elemanları vardır. Şimdi $t = [y_1, y_2, \dots, y_n]$ ve $C_n/H = C_{G/H}(tH)$ olsun. Benzer şekilde $t \notin H$ olduğundan $C_n \neq G$ dir. Böylece kabulden dolayı bir $y_{n+1} \in G \setminus C_n$ vardır öyle ki $w \notin \langle U, y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1} \rangle$. Ayrıca $[t, y_{n+1}] \notin H$ dir. Bu şekilde devam edilirse her $n \geq 1$ doğal sayısı için $w \notin \langle U, y_1, y_2, \dots, y_n \rangle$ ve $[y_1, y_2, \dots, y_n] \notin H$ olacak şekilde G nin sonsuz çoklukta elemanlarının bir dizisini elde ederiz. Böylece Teorem 2.67 den $T = \langle y_i \mid i \geq 1 \rangle$ altgrubu hipermerkez değildir. Dolayısıyla $T \leq G$ ve G MNHC-grup olduğundan $T = G$ dir. Ancak $w \notin T$ olduğundan bu bir çelişkidir. Böylece G nin bir sonlu üreteçli V altgrubu ve G nin bir L öz altgrubu vardır öyle ki

$w \notin V$ fakat her $y \in G \setminus L$ için $w \in \langle V, y \rangle$

dir. □

Teorem 2.65 ve Teorem 2.66 dan mükemmel lokal sonlu MNFC G grubu bir p -grup olduğundan Lemma 2.42 den lokal nilpotenttir. Böylece her öz altgrubu lokal nilpotent FC-grup olduğundan Lemma 2.56 dan hipermerkezdır. Ayrıca G mükemmel olduğundan Lemma 2.40 tan $Z(G/Z(G)) = 1$ dir. Dolayısıyla hipermerkez tanımından G nin hipermerkezi $Z(G)$ ye eşittir. O halde eğer $Z(G) = G$ ise $1 = G' = G$ olur ki bu bir çelişkidir. Çünkü G lokal nilpotent MNHC-grup olduğundan sonlu olamaz. Böylece G sonsuz üreteçli MNHC-grup olup Önerme 3.1 den (*) özeliğini sağlar.

3.2. Önerme

G her öz altgrubu çözülebilir olan bir sonsuz üreteçli periyodik mükemmel grup olsun. Ayrıca G nin her sonlu F altgrubu için F^G residually nilpotent olsun. Böylece birleşimleri G yi verecek şekilde G nin sonlu altgruplarının artan bir $F_1 \leq F_2 \leq \dots$ zinciri vardır. Her $i \geq 1$ için $N_i = F_i^G$ olsun. O zaman G bir mükemmel lokal sonlu sayılabilir sonsuz lokal nilpotent p -gruptur ve

$$G = \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$$

dir. Ayrıca N_i/N_i' sonlu exponentlidir ve böylece N_i residually (sonlu exponentli nilpotent) tir. Eğer her $i \geq 1$ için N_i nilpotent ise N_i sonlu exponentlidir.

İspat

G periyodik olduğundan her altgrubu da periyodiktir. Ayrıca G sonsuz üreteçli olduğundan G nin sonlu üreteçli her altgrubu öz altgrup olup hipotezden çözülebilirdir. Dolayısıyla G nin sonlu üreteçli her altgrubu çözülebilir periyodik bir grup olduğundan Lemma 2.52 den sonludur. Böylece G lokal sonludur.

Sonuç 2.48 den çözülebilirlik sayılabilir tanımlanabilir bir özellik olduğundan ve G çözülebilir olmadığından G nin sayılabilir bir H altkümesi vardır öyle ki H , G nin hiçbir çözülebilir altgrubu tarafından kapsanmaz. G nin her öz altgrubu çözülebilir olduğundan $H = G$ olmalıdır. Yani G sayılabilir sonsuzdur.

Kabul edelim ki F , G nin bir sonlu üreteçli altgrubu olsun. O halde F sonludur. Ancak F^G residually nilpotent olduğundan F de residually nilpotenttir. O halde F sonlu olduğundan $\gamma_1(F) = F$ ve $\gamma_{\alpha+1}(F) = [\gamma_\alpha(F), F]$ olmak üzere

$$\gamma_1(F) = F \geq \gamma_2(F) \geq \dots \geq \gamma_k(F)$$

öyle ki $\gamma_k(F) = \gamma_{k+1}(F) = \dots$ olacak şekilde F nin sonlu azalan merkez serisi vardır. Böylece bir $k \geq 1$ tamsayısı için Lemma 2.54 ten $\gamma_k(F) = 1$ dir. O halde F nin azalan merkez serisi sonlu adımda birime ulaştığından F nilpotenttir. Böylece G lokal nilpotenttir. G periyodik olduğundan torsiyon altgrubu kendisine eşit ve lokal nilpotent olduğundan Lemma 2.55 ten her $p \in \pi(G)$ için S_p , G nin tek Sylow- p altgrubu olmak üzere

$$G = \prod_{p \in \pi(G)} S_p$$

dir. Böylece her $p, q \in \pi(G)$ için $S_p \triangleleft G$ ve $p \neq q$ ise $S_p \cap S_q = 1$ dir. Dolayısıyla her $x \in S_p$ ve her $y \in S_q$ için $x^{-1}y^{-1}xy \in S_p \cap S_q$ olduğundan $xy = yx$ tir. G bir mükemmel grup olduğundan her $p \in \pi(G)$ için S_p de bir mükemmel gruptur. Eğer bir $q \in \pi(G)$ için $S'_q < S_q$ ise $Q = \prod_{p \in \pi(G) \setminus \{q\}} S_p$ şeklinde tanımlanırsa $G = S_q Q$ dir. Her $p \in \pi(G)$ için $S_p \triangleleft G$ olduğundan Lemma 2.36 dan $(S_q Q)' \leq S'_q Q$ sağlanır. O halde $G = G' \leq S'_q Q < S_q Q = G$ olur ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla S_q mükemmeldir. Yani diğer bir deyişle her $p \in \pi(G)$ için S_p G nin öz altgrubu olamaz. Böylece bir p asalı için $G = S_p$ olduğundan G bir p -gruptur. Sonuç olarak G bir mükemmel lokal sonlu sayılabilir sonsuz lokal nilpotent p -gruptur.

G sayılabilir olduğundan her $i \geq 1$ için $F_i \leq F_{i+1}$ olmak üzere $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ olacak şekilde G nin sonlu altgruplarının artan bir $F_1 \leq F_2 \leq \dots$ zinciri vardır. O zaman $N_i = F_i^G$ olmak üzere $F_i \leq N_i$ olduğundan $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$ dir. Her $i \geq 1$ için $F_i^G = \langle g^{-1}xg \mid g \in G, x \in F_i \rangle$ dir. F_i^G nin her y elemanı $\varepsilon_j = \pm 1$, $k \geq 0$ ($k = 0$ ise $y = 1$), $x_j \in F_i$ ve $g_j \in G$ ($1 \leq j \leq k$) olmak üzere

$$y = (g_1^{-1}x_1g_1)^{\varepsilon_1}(g_2^{-1}x_2g_2)^{\varepsilon_2} \dots (g_k^{-1}x_kg_k)^{\varepsilon_k}$$

şeklindedir [22]. Düzenlenirse

$$y = (g_1^{-1}x_1^{\varepsilon_1}g_1)(g_2^{-1}x_2^{\varepsilon_2}g_2) \dots (g_k^{-1}x_k^{\varepsilon_k}g_k)$$

dır. Ayrıca G periyodik olduğundan N_i/N'_i periyodiktir. Dolayısıyla her $yN'_i \in N_i/N'_i$ için $n = |\langle yN'_i \rangle|$ olacak şekilde bir $n \geq 0$ tamsayısı vardır ve Lemma 2.37 dan N_i/N'_i abelyan olduğundan

$$\begin{aligned} y^n N'_i &= (g_1^{-1}x_1^{\varepsilon_1}g_1)^n (g_2^{-1}x_2^{\varepsilon_2}g_2)^n \dots (g_k^{-1}x_k^{\varepsilon_k}g_k)^n N'_i \\ &= (g_1^{-1}(x_1^{\varepsilon_1})^n g_1)(g_2^{-1}(x_2^{\varepsilon_2})^n g_2) \dots (g_k^{-1}(x_k^{\varepsilon_k})^n g_k) N'_i \end{aligned}$$

dir. Ayrıca $x_1, x_2, \dots, x_n \in F_i$ ve F_i sonlu olduğundan $n \leq |F_i|$ dir. O halde N_i/N'_i sonlu exponentlidir.

Hipotezden N_i residually nilpotent olduğundan her $1 \neq x \in N_i$ için $x \notin N_x$ olacak şekilde bir $N_x \triangleleft N_i$ vardır öyle ki N_i/N_x nilpotenttir. Teorem 2.34 ten

$$(N_i/N_x)/(N_i/N_x)' = (N_i/N_x)/(N'_i N_x/N_x) \cong N_i/(N'_i N_x)$$

dir. $N_i/N'_i N_x$ periyodik ve $N'_i \leq N'_i N_x$ olduğundan Lemma 2.37 dan $N_i/(N'_i N_x)$ abelyandır. Dolayısıyla yukarıda N_i/N'_i bölüm grubunun sonlu exponentli olduğunu göstermek için yapılan işlemler benzer şekilde $N_i/(N'_i N_x)$ için tekrarlanabilir. Böylelikle $(N_i/N_x)/(N_i/N_x)'$ sonlu exponentlidir. Ayrıca sonlu exponentli grupların sınıfı $\mathbf{P}$ -kapalıdır. O halde N_i/N_x nilpotent, sonlu exponentli grup sınıfı $\mathbf{P}$ -kapalı ve $(N_i/N_x)/(N_i/N_x)'$ sonlu exponentli olduğundan Lemma 2.53 ten N_i/N_x sonlu exponentlidir. Dolayısıyla N_i residually (sonlu exponentli nilpotent) gruptur. Eğer N_i nilpotent ise N_i/N'_i sonlu exponentli olduğundan Lemma 2.53 ten N_i sonlu exponentlidir. $\square$

3.3. Önerme

G öz altgrupları çözülebilir olan bir sonsuz üreteçli lokal nilpotent grup olsun. Kabul edelim ki G periyodik olmasın. O zaman G çözülebilirdir.

İspat

Kabul edelim ki G çözülebilir olmasın. O zaman G bir sonsuz lokal nilpotent MNS-gruptur

ve Sonuç 2.48 den sayılabilir sonsuzdur. İlk olarak kabul edelim ki G bir torsiyonsuz grup ve $1 \neq w \in G$ olsun. Lemma 2.70 ten $U = 1$ ve $M = \{w\}$ alınırsa $w \notin K$ ve $I_G(K) = G$ olacak şekilde G nin bir K öz altgrubu vardır. K çözülebilir olduğundan Lemma 2.60 tan dolayı G çözülebilirdir. Ancak G , MNS-grup olduğundan bu bir çelişkidir. Dolayısıyla G torsiyonsuz grup değildir.

İkinci olarak kabul edelim ki G torsiyonsuz olmasın ve $T(G)$ G nin torsiyon altgrubu olsun. Hipotezden $G \neq T(G)$ olduğundan $G/T(G)$, Lemma 2.55 ten dolayı bir lokal nilpotent torsiyonsuz gruptur. G MNS-grup olduğundan $G/T(G)$ de MNS-gruptur. Eğer $G/T(G)$ sonlu üreteçli ise nilpotent olduğundan Lemma 2.42 den çözülebilir olur ki bu $G/T(G)$ nin MNS-grup olması ile çelişir. Dolayısıyla $G/T(G)$ sonsuz üreteçlidir. O halde $G/T(G)$ Önerme 3.3 ün hipotezini sağlar. Ancak ilk paragrafta olduğu gibi bu bir çelişkidir. O halde kabul yanlış olup G çözülebilirdir. $\square$

3.4. Lemma

G bir grup ve Y , G nin bir altkümesi olsun. O zaman G nin Y ye göre bir $(*)$ -üçlüsü olması için gerek ve yeter şart G nin bir sonlu üreteçli V altgrubu ve bir L öz altgrubu için

$$\bigcap_{y \in Y \setminus L} \langle V, y \rangle \neq V$$

olmasıdır.

İspat

Kabul edelim ki G nin Y ye göre bir $(*)$ -üçlüsü olsun. O zaman $(*)$ -üçlüsü tanımından $1 \neq w \in G$ için G nin sonlu üreteçli bir V altgrubu ve bir L öz altgrubu vardır öyle ki $w \notin V$ fakat her $y \in Y \setminus L$ için $w \in \langle V, y \rangle$ dir. Böylece $w \notin V$ fakat $w \in \bigcap_{y \in Y \setminus L} \langle V, y \rangle$ olduğundan

$$V \neq \bigcap_{y \in Y \setminus L} \langle V, y \rangle$$

dir.

Karşıt olarak kabul edelim ki $L < G$ olmak üzere $\bigcap_{y \in Y \setminus L} \langle V, y \rangle \neq V$ olsun. O zaman bir $1 \neq w \in \bigcap_{y \in Y \setminus L} \langle V, y \rangle \setminus V$ vardır. Böylece $w \notin V$ fakat her $y \in Y \setminus L$ için $w \in \langle V, y \rangle$

olduğundan (w, V, L) üçlüsü G için Y ye göre bir $(*)$ -üçlüsüdür. $\square$

3.5. Lemma

G bir grup, $1 \neq w \in G$ ve V , $w \notin V$ olacak şekilde G nin bir sonlu üreteçli altgrubu olsun. O zaman

$$E(w, V) = \bigcup_{E \in E^*(w, V)} E$$

dir.

İspat

Her $E \in E^*(w, V)$ için tanımdan dolayı E altgrubu $w \notin E$ ve $V \leq E$ olacak şekildeki G nin bir maksimal altgrubudur. Her $y \in E$ için $\langle V, y \rangle \leq E$ ve $w \notin E$ olduğundan her $y \in E$ için $w \notin \langle V, y \rangle$ dir. O zaman her $E \in E^*(w, V)$ için $E \subseteq E(w, V)$ olduğundan $\bigcup_{E \in E^*(w, V)} E \subseteq E(w, V)$ dir. Karşıt olarak her $y \in E(w, V)$ için $w \notin \langle V, y \rangle$ ve dolayısıyla $\langle V, y \rangle \leq E$ olacak şekilde bir $E \in E^*(w, V)$ vardır. Bundan dolayı $E(w, V) \subseteq \bigcup_{E \in E^*(w, V)} E$ dir. $\square$

3.6. Lemma

G bir grup olsun. Eğer (w, V, L) üçlüsü G ye göre bir $(*)$ -üçlüsü veya (w, V) bir seçkin ikili ise her $v \in V$ için (wv, V, L) G ye göre bir $(*)$ -üçlüsü veya (wv, V) bir seçkin ikilidir ve $E^*(w, V) = E^*(wv, V)$ dir.

İspat

Kabul edelim ki (w, V, L) üçlüsü G ye göre bir $(*)$ -üçlüsü olsun. O zaman $w \notin V$ ancak her $y \in G \setminus L$ için $w \in \langle V, y \rangle$ dir. O zaman her $v \in V$ için $w \notin V$ olduğundan $wv \notin V$ dir. Aksi halde $wv v^{-1} = w \in V$ olur ki bu bir çelişkidir. Ayrıca her $y \in G \setminus L$ için $w, v \in \langle V, y \rangle$ olduğundan $wv \in \langle V, y \rangle$ dir. Böylece her $v \in V$ için (wv, V, L) üçlüsü G ye göre bir $(*)$ -üçlüsüdür.

Kabul edelim ki (w, V) ikilisi G için bir seçkin ikili olsun. O zaman $V \leq U$ olacak şekilde

G nin her U altgrubu için (w, U) ikilisi G için $(*)$ -ikilisi değildir. Yani her $L < G$ için bir $y \in G \setminus L$ vardır öyle ki $w \notin \langle U, y \rangle$ dir. O zaman her $v \in V$ için $v \in \langle U, y \rangle$ olduğundan $wv \notin \langle U, y \rangle$ dir. Böylece her $v \in V$ için (wv, U) ikilisi G için $(*)$ -ikilisi değildir. Eğer $d(\langle V, y \rangle) > d(V)$ olacak şekildeki her $y \in G$ için $w \in \langle V, y \rangle$ ise her $v \in V$ için $wv \in \langle V, y \rangle$ dir. Böylece seçkin ikili tanımından her $v \in V$ için (wv, V) ikilisi G için bir seçkin ikilidir.

$E \in E^*(w, V)$ için E altgrubu G nin $w \notin E$ ve $V \leq E$ olacak şekildeki bir maksimal altgrubudur. Her $v \in V$ için $V \leq E$ olduğundan $wv \notin E$ dir. O zaman her $v \in V$ için $E \leq R$ olacak şekilde $R \in E^*(wv, V)$ vardır. Ancak $w \notin R$, $V \leq R$ ve $E \in E^*(w, V)$ olduğundan maksimallikten $E = R$ olmalıdır. Böylece her $v \in V$ için $E \in E^*(wv, V)$ dir. Şimdi de her $v \in V$ için $K \in E^*(wv, V)$ olsun. Tanımdan $wv \notin K$ ve $v \in V \leq K$ olduğundan $w \notin K$ dir. Dolayısıyla $K \leq T$ olacak şekilde bir $T \in E^*(w, V)$ vardır. Maksimal altgrup tanımından $w \notin T$ ve $V \leq T$ olduğundan her $v \in V$ için $wv \notin T$ dir. Ancak $K \leq T$ ve $K \in E^*(wv, V)$ olduğundan maksimallikten $K = T$ olmalıdır. Böylece $K \in E^*(w, V)$ dir. Bundan dolayı $E^*(w, V) = E^*(wv, V)$ elde edilmiş olur. $\square$

3.7. Lemma

G bir sonsuz lokal sonlu MNS- p -grup olsun. $w \in G$ ve V , $w \notin V$ olacak şekilde G nin bir sonlu altgrubu olsun. E , G nin bir (w, V) -maksimal normal altgrubu olmak üzere $\overline{G} = G/E$ olsun. O zaman $|\overline{w}| = p$ dir.

İspat

G p -grup olduğundan bir $k \geq 0$ tamsayısı için $|\langle \overline{w} \rangle| = p^k$ dir. O zaman Cauchy Teoreminden $|\langle \overline{a} \rangle| = p$ olacak şekilde $\overline{a} \in \langle \overline{w} \rangle$ vardır [24]. $\overline{a} = aE$ ve $\overline{w} = wE$ olmak üzere $\langle a, E \rangle \leq \langle w, E \rangle$ dir. Ayrıca $E < \langle a, E \rangle$ ve E altgrubu da w elemanını içermeyen V yi kapsayan G nin maksimal altgrubu olduğundan $w \in \langle a, E \rangle$ dir. Böylece $\langle w, E \rangle \leq \langle a, E \rangle$ olduğundan $\langle w, E \rangle = \langle a, E \rangle$ dir. O halde $|\langle \overline{a} \rangle| = |\langle \overline{w} \rangle| = p$ dir. $\square$

4. TEOREM 1.1 VE TEOREM 1.2 NİN İSPATI

Bu bölümde öncelikle $(*)$ -üçlüsüne sahip olan gruplar incelendi. [5] ve [6] daki sonuçlar genelleştirildi.

4.1. Lemma

G bir sonsuz üreteçli grup ve (w, V, L) üçlüsü G için bir $(*)$ -üçlüsü olsun. M , $w \notin M$ ve her $X < G$ için $MX \neq G$ olacak şekilde G nin bir normal altgrubu ve $\overline{G} = G/M$ olsun. O zaman $\overline{G}$ nin $V \leq U$ olacak şekilde $(\overline{w}, \overline{U})$ şeklinde seçkin ikilisi yoktur. Bu formdaki $(\overline{w}, \overline{U})$ ikilisi $\overline{G}$ için bir $(*)$ -ikilisidir.

İspat

Hipotezden $w \notin M$ olduğundan $\overline{w} \neq 1$ ve her $y \in G \setminus L$ için $w \in \langle V, y \rangle$ dir. Kabul edelim ki G nin $V \leq U$ olacak şekildeki bir sonlu üreteçli U altgrubu için $(\overline{w}, \overline{U})$ ikilisi $\overline{G}$ için bir seçkin ikili olsun. O zaman hipotezden $L < G$ olduğundan $ML < G$ dir. Böylece seçkin ikili tanımından $(\overline{w}, \overline{U})$ ikilisi $\overline{G}$ için $(*)$ -ikilisi olmadığından bir $\overline{y} \in \overline{G} \setminus \overline{L}$ vardır öyle ki $\overline{w} \notin \langle \overline{U}, \overline{y} \rangle$ dir. Böylece bir $y \in G \setminus ML$ ($L \leq ML$) için $w \notin \langle U, y \rangle$ dir. Ancak (w, V, L) üçlüsü G için bir $(*)$ -üçlüsü olduğundan $w \in \langle V, y \rangle \leq \langle U, y \rangle$ olur ki bu bir çelişkidir. Böylece $V \leq U$ ise $(\overline{w}, \overline{U})$ seçkin ikili olamaz. $\square$

4.2. Lemma

G , $Z(G) = 1$ olacak şekilde bir sonsuz lokal sonlu grup ve (w, V, L) üçlüsü G için bir $(*)$ -üçlüsü olsun. Ayrıca kabul edelim ki G nin herhangi iki öz normal altgrubu bir öz normal altgrubunu üretsin. O zaman

$$P = \{A < G \mid A, G \text{ nin bir normal abelyan altgrubu}\}$$

ise $\langle P \rangle \neq G$ dir.

İspat

$Y = G \setminus L$ ve $y \in Y$ olsun. $V \leq \langle V, y \rangle$ olduğundan ve Sonuç 2.50 den dolayı $V\langle y \rangle^V \leq \langle V, y \rangle$ dir. Ayrıca $y \in V\langle y \rangle^V$ ve $V \leq V\langle y \rangle^V$ olduğundan $\langle V, y \rangle \leq V\langle y \rangle^V$ dir. Böylece her $y \in Y$ için $\langle V, y \rangle = V\langle y \rangle^V$ dir. O halde $y \in Y$ için $w \in \langle V, y \rangle = V\langle y \rangle^V$ olduğundan $w = vt$ olacak şekilde bir $v \in V$ ve bir $t \in \langle y \rangle^V$ vardır. Böylece $v^{-1}w \in \langle y \rangle^V$ dir. Her $v \in V$ için

$$Y_v = \{y \in Y \mid v^{-1}w \in \langle y \rangle^V\}$$

ve

$$D_v = \bigcap_{y \in Y_v} \langle y \rangle^V$$

olsun. O zaman $Y = \bigcup_{v \in V} Y_v$ ve $v^{-1}w \in D_v$ olduğundan $D_v \neq 1$ dir. Gerçekten her $y \in Y_v$ için $v^{-1}w \in \langle y \rangle^V$ olduğundan $v^{-1}w \in D_v$ dir. Ayrıca $w \notin V$ ve $v \in V$ olduğundan $v^{-1}w \neq 1$ dir. Böylece $D_v \neq 1$ dir.

$A \in P$ olsun. O halde ya $A \leq L$ ya da $A \cap Y \neq \emptyset$ dir. Eğer her $A \in P$ için $A \leq L$ ise $\langle P \rangle \leq L < G$ olduğundan $\langle P \rangle < G$ olur. İkinci durumda $Y = \bigcup_{v \in V} Y_v$ olduğundan bir $v \in V$ için $A \cap Y_v \neq \emptyset$ dir. Böylece en azından bir $1 \neq x \in A \cap Y_v$ için $x \in Y_v$ olduğundan $D_v = \bigcap_{y \in Y_v} \langle y \rangle^V \leq \langle x \rangle^V$ dir. Ayrıca $x \in A$ ve $A \triangleleft G$ olduğundan $\langle x \rangle^V \leq A^V = A$ dir. Böylece $D_v \leq A$ dir. A abelyan olduğundan $A \leq C_G(D_v)$ dir. Hipotezden $Z(G) = 1$ olduğundan her $C_G(D_v) < G$ dir. Aksi halde $D_v \leq Z(G) = 1$ olduğundan $D_v = 1$ olur ki bu $D_v \neq 1$ olmasıyla çelişir. G lokal sonlu olduğundan V sonludur. Böylece bir $s \geq 1$ için $\{L, C_G(D_v) \mid v \in V\} = \{K_j \mid j = 1, 2, \dots, s\}$ şeklinde yazılabilir. Buradan her K_j altgrubu G nin öz altgrubu ve her $A \in P$ için ya $A \leq L$ ya da $A \cap Y \neq \emptyset$ olduğundan A bir $1 \leq j \leq s$ için K_j nin içindedir. $K_j^* = \langle A \in P \mid A \leq K_j \rangle$ olsun. Böylece $K_j^* \leq K_j$ ve $A \triangleleft G$ olduğundan K_j^* altgrubu G grubunun öz normal altgrubudur. Hipotezden G nin herhangi iki öz normal altgrubu bir öz normal altgrubunu üreteceğinden $\langle K_1^*, K_2^*, \dots, K_s^* \rangle = K_1^* K_2^* \dots K_s^*$ altgrubu G nin öz normal altgrubudur. Her $A \in P$ için $A \leq K_j^*$ olacak şekilde bir $1 \leq j \leq s$ olduğundan $\langle P \rangle \leq K_1^* K_2^* \dots K_s^*$ dir. Böylece $\langle P \rangle$, G nin öz normal altgrubudur. $\square$

4.3. Lemma

G herhangi iki öz normal altgrubu bir öz normal altgrubunu üreten bir sonsuz lokal sonlu mükemmel grup olsun. Ayrıca kabul edelim ki G nin her homomorfik görüntüsünün $w_H \notin Z(H)$ olmak üzere (w_H, V_H, L_H) $(*)$ -üçlüsüne sahip bir H homomorfik görüntüsü olsun. O zaman

$$P_t(G) = \{K < G \mid d(K) \leq t \text{ olmak üzere } K, G \text{ nin bir normal çözülebilir altgrubu}\}$$

ise $\langle P_t(G) \rangle \neq G$ dir.

İspat

$t \geq 0$ için tümevarım uygulanırsa $t = 0$ için $P_0(G) = \{1\}$ olduğundan iddia sağlanır. Kabul edelim ki $t \geq 1$ olmak üzere iddia $t - 1$ için sağlansın. $M = \langle P_{t-1}(G) \rangle$ ve $\overline{G} = G/M$ olsun. Hipotezden $\overline{G}$ nin $w_H \notin Z(H)$ olmak üzere (w_H, V_H, L_H) $(*)$ -üçlüsüne sahip bir H homomorfik görüntüsü vardır. Genelliği bozmadan ispat sadeliği için $H = \overline{G}$ ve $\overline{w} \notin Z(\overline{G})$ olmak üzere $(\overline{w}, \overline{V}, \overline{L})$ üçlüsünün $\overline{G}$ için bir $(*)$ -üçlüsü olduğu kabul edilebilir. Kabul edelim ki $Z(\overline{G}) = 1$ olsun. Her $K \in P_t(G)$ için $d(K) \leq t$ olduğundan

$$1 = K^{(d(K))} \triangleleft \dots \triangleleft K^{(0)} = K$$

olacak şekilde $d(K)$ adımda birime ulaşan K nin bir komütatör serisi vardır. $0 < i \leq d(K)$ olmak üzere Sonuç 2.39 dan $K^{(i)} \in P_{t-1}(G)$ dir. Dolayısıyla $K^{(i)}M = M$ olduğundan $\overline{K'} = 1$ dir. O zaman $\overline{K}$ altgrubu $\overline{G}$ nin bir normal abelyan altgrubudur. Böylece $\overline{K} \in P_1(\overline{G})$ dir. O halde Lemma 4.2 den $\langle \overline{K} \mid K \in P_t(G) \rangle \neq \overline{G}$ dir. Ters görüntüleri alınırsa $\langle K \mid K \in P_t(G) \rangle \neq G$ olur. Kabul edelim ki $Z(\overline{G}) \neq 1$ olsun. $Z/M = Z(\overline{G})$ olsun. Teorem 2.34 ten

$$\overline{G}/Z(\overline{G}) = (G/M)/(Z/M) \cong G/Z$$

dir. G mükemmel grup olduğundan $\overline{G}$ de mükemmel gruptur. Lemma 2.40 tan $Z(G/Z) = 1$ ve ayrıca hipotezden $\overline{w} \notin Z(\overline{G}) = Z/M$ olduğundan $wZ \neq 1$ dir. Lemma 4.1 den wZ elemanına göre G/Z için bir $(*)$ -üçlüsü vardır. Böylece Lemma 4.2 den $\langle P_1(G/Z) \rangle \neq G/Z$ dir. Her $K \in P_t(G)$ için $M \leq Z$ olduğundan yukarıda gösterildiği gibi $KZ/Z \in P_1(G/Z)$ dir.

O halde $\langle KZ/Z \mid K \in P_t(G) \rangle \neq G/Z$ olduğundan $\langle K \mid K \in P_t(G) \rangle \neq G$ olur. Böylece tümevarım hipotezi tamamdır. $\square$

4.4. Lemma

G bir sonsuz lokal sonlu grup ve (w, V, L) üçlüsü G için bir $(*)$ -üçlüsü olsun. $X, \langle w, V \rangle$ altgrubunu içeren G nin bir öz altgrubu olsun. Kabul edelim ki $\{N_i \mid i \geq 1\}$, $\bigcap_{i=1}^{\infty} N_i = 1$ olacak şekilde X in normal altgruplarının bir azalan zinciri olsun. O zaman bir $k \geq 1$ tamsayısı için $N_k \leq X \cap L$ dir. Özel olarak eğer her bir N_i nin X içindeki indeksi sonlu ise $X \cap L$ nin de X içindeki indeksi sonludur.

İspat

Genelliği bozmadan ispat sadeliği için $L \leq X$ olduğu kabul edilebilir. $Y = G \setminus L$ olsun. Her $v \in V$ için

$$Y_v = \{y \in Y \mid v^{-1}w \in \langle y \rangle^V\}$$

$$D_v = \bigcap_{y \in Y_v} \langle y \rangle^V$$

şeklinde tanımlanırsa Lemma 4.2 de gösterildiği gibi $Y = \bigcup_{v \in V} Y_v$ ve bir $v \in V$ için $v^{-1}w \in D_v$ olduğundan $D_v \neq 1$ dir.

Kabul edelim ki eğer mümkünse her $i \geq 1$ için $N_i \not\leq L$ olsun. O zaman her $i \geq 1$ için $x_i \in N_i \setminus L$ vardır. $x_i \in Y$ ve $Y = \bigcup_{v \in V} Y_v$ olduğundan $x_i \in Y_v$ olacak şekilde bir $v \in V$ vardır. Böylece $\langle w, V \rangle \leq X$ ve $N_i \triangleleft X$ olduğundan $D_v \leq \langle x_i \rangle^V \leq N_i^V = N_i$ dir. V sonlu olduğundan D_v lerin sayısı sonludur. Bundan dolayı her $i \geq 1$ için N_i ler azalan zincir tanımladığından sonsuz çoklukta $i \geq 1$ için $D_v \leq N_i$ olacak şekilde bir $v \in V$ vardır. O halde $D_v \leq \bigcap_{i=1}^{\infty} N_i = 1$ ve böylece $D_v = 1$ olur ki bu bir çelişkidir. Sonuç olarak bir $k \geq 1$ tamsayısı için $N_k \leq L$ olmalıdır. $L \leq X$ aldığımızdan $N_k \leq X \cap L$ dir. Özel olarak eğer her $i \geq 1$ için $|X : N_i| < \infty$ ise $N_k \leq X \cap L$ ve $X \cap L \leq X$ olduğundan $|X : N_k| = |X : X \cap L| |X \cap L : N_k| < \infty$ olur [24]. $\square$

4.5. Lemma

H bir çözülebilir grup ve $H^{(i)}$, H nin i yinci komütatör altgrubu olmak üzere U , her $i \geq 1$ için $|H^{(i)} : (H^{(i)} \cap U)H^{(i+1)}|$ sonlu olacak şekilde H nin bir altgrubu olsun. O zaman $|H : U|$ sonludur.

İspat

$d = d(H)$ ve her $i \geq 1$ için $U_i = H^{(i)} \cap U$ olsun. O zaman $U_0 = U$ dur. Her $0 \leq i \leq d$ için

$$|H^{(d-i)} : U_{(d-i)}|$$

nin sonlu olduğunu göstermek için i üzerinden tümevarım uygulayalım. $i = 0$ için Sonuç 2.39 dan $H^{(d)} = 1$ olduğundan $|H^{(d)} : U_{(d)}|$ sonludur. Kabul edelim ki $0 \leq i < d$ için iddia sağlansın. Böylece

$$|H^{(d-i)} : U_{(d-i)}|$$

sonludur. İndeks özelliğinden

$$|H^{(d-i-1)} : U_{(d-i-1)}| = |H^{(d-i-1)} : U_{(d-i-1)}H^{(d-i)}| |U_{(d-i-1)}H^{(d-i)} : U_{(d-i-1)}|$$

eşitliği sağlanır. Ayrıca $H^{(d-i)} \cap U_{(d-i-1)} = U_{(d-i)}$ olmak üzere Lemma 2.80 den

$$|U_{(d-i-1)}H^{(d-i)} : U_{(d-i-1)}| = |H^{(d-i)} : U_{(d-i)}|$$

olduğundan kabulden $|H^{(d-i)} : U_{(d-i)}|$ ve hipotezden $|H^{(d-i-1)} : U_{(d-i-1)}H^{(d-i)}|$ sonlu olduğundan

$$|H^{(d-i-1)} : U_{(d-i-1)}|$$

sonludur. O halde tümevarımdan iddia sağlanır. $\square$

4.6. Lemma

K nilpotent ve sonlu exponentli olan bir sonsuz lokal sonlu p -grup olsun. $w \in K$ ve V , $w \notin V$ olacak şekilde K nin bir altgrubu olsun. K nin bir U altgrubu için $|K : U|$ sonsuz ve $\langle w, V \rangle^K \leq U$ olsun. O zaman $w \notin T$, $V \leq T$ ve $T/(T \cap U)T'$ sonsuz olacak şekilde K nin bir T altgrubu vardır.

İspat

Hipotezden K nilpotent olduğundan Lemma 2.42 den çözülebilir ve $|K : U|$ sonsuzdur. Böylece Lemma 4.5 ten bir $j \geq 1$ için $K^{(j)}/(K^{(j)} \cap U)K^{(j+1)}$ sonsuzdur. $S = \langle w, V \rangle K^{(j)}$ olsun. O zaman $\langle w, V \rangle^K \leq U$ olduğundan Lemma 2.76 dan $S/(S \cap U)S'$ sonsuzdur.

$\bar{S} = S/(S \cap U)S'$ olsun. O zaman $\bar{S}$ sonsuz ve hipotezden sonlu exponentlidir. $\bar{B} = \text{Frat}(\bar{S})$ olsun. $S' \leq (S \cap U)S'$ olduğundan Lemma 2.37 dan $\bar{S}$ abelyandır. Dolayısıyla Lemma 2.77 den $\bar{S}$ nin maksimal altgrupları olduğundan $\bar{B} \neq \bar{S}$ dir. Böylece Lemma 2.47 den ve hipotezden $\bar{S}/\bar{B}$ bir elemanter abelyan p -gruptur. Ayrıca $\bar{S}$ sonsuz olduğundan $\bar{S}/\bar{B}$ sonsuzdur. Kabul edelim ki $\bar{S}/\bar{B}$ sonlu olsun. O zaman $\bar{S} = \bar{F}\bar{B}$ olacak şekilde $\bar{S}$ nin sonlu üreteçli bir $\bar{F}$ altgrubu vardır. O zaman Lemma 2.46 dan $\bar{S} = \bar{F}$ dir. Ancak hipotezden S lokal sonlu grup olduğundan $\bar{S}$ sonlu olur ki bu bir çelişkidir. Teorem 2.34 ten $\bar{S}/\bar{B} \cong S/B$ dir. Ayrıca hipotezden K nilpotent p -grup olduğundan S de nilpotent p -gruptur. O halde Lemma 2.68 den S nin $w \notin T$, $V \leq T$ ve $T/T \cap B$ sonsuz olacak şekilde bir T altgrubu vardır. Ayrıca $T \leq S$ ve $\bar{B} = B/(S \cap U)S'$ olduğundan $(T \cap U)T' \leq (S \cap U)S' \leq B$ dir. Ayrıca $(T \cap U)T' \leq T$ olduğundan $T \cap (T \cap U)T' = (T \cap U)T'$ dir. Dolayısıyla $T/T \cap B$ sonsuz olduğundan indeks özelliğinden

$$|T : T \cap B| |T \cap B : T \cap (T \cap U)T'| = |T : (T \cap U)T'|$$

olup $T/(T \cap (T \cap U)T') = T/(T \cap U)T'$ sonsuzdur. O halde lemmanın iddiası sağlanır. $\square$

4.7. Lemma

G bir mükemmel sonsuz lokal sonlu p -grup, $w \in G$ ve V , $w \notin V$ olacak şekilde G nin bir altgrubu olsun. L , G nin her öz normal M altgrubu için $ML \neq G$ olacak şekilde G nin bir öz

altgrubu olsun. Kabul edelim ki X_i residually (sonlu exponentli nilpotent) grup ve her $i \geq 1$ için $\langle w, V \rangle^G \leq X_1 < X_{i+1} < G$ olmak üzere

$$G = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$$

olsun. O zaman her $i \geq 1$ için $|X_i : X_i \cap L\langle w, V \rangle^G|$ sonludur.

İspat

$U = L\langle w, V \rangle^G$ olsun. İlk olarak $U \neq G$ olduğunu gösterelim. G lokal nilpotent olduğundan Lemma 2.74 ten bir SI-gruptur. Dolayısıyla G mükemmel olduğundan G nin sonlu olmayan ve faktörleri abelyan olan öz normal altgruplarından oluşan bir serisi vardır ve G bu altgrupların birleşimi şeklinde yazılabilir. Yani bir β limit ordinali için her $\alpha < \beta$ için N_α , G nin öz normal altgrubu olmak üzere $G = \bigcup_{\alpha < \beta} N_\alpha$ dir. $\langle w, V \rangle$ sonlu olduğundan bir $\alpha < \beta$ için $\langle w, V \rangle \leq N_\alpha$ dir. Böylece $\langle w, V \rangle^G \leq N_\alpha^G = N_\alpha$ dir. O halde $\langle w, V \rangle^G < G$ olup hipotezden $L\langle w, V \rangle^G \neq G$ dir. Böylece Lemma 3.4 ten $\langle w, V, U \rangle$ üçlüsü G için bir $(*)$ -üçlüsüdür. Hipotezden her $i \geq 1$ için X_i , G nin öz residually (sonlu exponentli nilpotent) altgrubu olmak üzere $\langle w, V \rangle^G \leq X_1 < X_{i+1} < G$ ve $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ ve $U < G$ olduğundan $U \leq X_1$ olacak şekilde X_i ler düzenlenebilir. Kabul edelim ki bir $j \geq 1$ için $|X_j : X_j \cap U| = |X_j : U|$ sonsuz olsun. $X = X_j$ olsun. İlk olarak kabul edelim ki X sonlu exponentli nilpotent altgrup olsun. O zaman Lemma 4.6 dan $w \notin T$, $V \leq T$ ve $T/(T \cap U)T'$ sonsuz olacak şekilde X in bir T altgrubu vardır. Ayrıca $T' \leq T$ olduğundan Dedekind's Modüler Kuralından $(T \cap U)T' = T \cap UT'$ eşitliği sağlanır [21]. Böylece bir $y \in T \setminus (T \cap UT')$ vardır. Böylece $y \notin U$ ve (w, V, U) üçlüsü G için bir $(*)$ -üçlüsü olduğundan $w \in \langle V, y \rangle \leq T$ olur ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $|X : U|$ sonludur.

İkinci olarak kabul edelim ki X sonlu exponentli nilpotent bir altgrup olmasın. Hipotezden X residually (sonlu exponentli nilpotent) olduğundan her $i \geq 1$ için X in bir N_i normal altgrubu vardır öyle ki X/N_i bir sonlu exponentli nilpotent grup ve

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} N_i = 1$$

dir. Ayrıca Teorem 2.79 dan N_i lerin X in normal altgruplarının azalan bir zinciri olduğu kabul edilebilir. Böylece Lemma 4.4 ten bir $k \geq 1$ tamsayısı vardır öyle ki $N_k \leq U$ dur. Ayrıca $\langle V, y \rangle$ sonlu olduğundan bir $s \geq k$ vardır öyle ki $\langle V, y \rangle \cap N_s = 1$ dir. Aksi halde $\bigcap_{i=1}^{\infty} N_i = 1$ ile çelişilir. Ek olarak $w \notin VN_s$ olduğu kabul edilebilir. Eğer her $i \geq s$ için $w \in VN_s$ ise Lemma 2.69 dan V sonlu olduğundan

$$w \in \bigcap_{i \geq s} VN_i = V \bigcap_{i \geq s} N_i = V$$

dir. Ancak bu (w, V, U) üçlüsünün G için bir $(*)$ -üçlüsü olması ile çelişir. Şimdi kabul edelim ki $\bar{X} = X/N_s$ olsun. $\bar{X}$ bir sonlu exponentli nilpotent grup, $\bar{w} \notin \bar{V}$ ve her $\bar{y} \in \bar{X} \setminus \bar{U}$ için $\bar{w} \in \langle \bar{V}, \bar{y} \rangle$ dir. Kabulden $|X : U|$ sonsuz ve $N_s \leq U$ olduğundan $\{xU \mid x \in X\}$ kosetler kümesinden $\{\bar{x}\bar{U} \mid \bar{x} \in \bar{X}\}$ kosetler kümesine $xU \rightarrow \bar{x}\bar{U}$ şeklinde birebir fonksiyon tanımlanarak $|X : U| \leq |\bar{X} : \bar{U}|$ olduğu gösterilebilir ve böylece $|\bar{X} : \bar{U}|$ de sonsuzdur. O zaman $\bar{X}$ bir sonlu exponentli nilpotent grup olduğundan ilk durumdaki gibi çelişki elde edilir. O halde kabul yanlış olup her $i \geq 1$ için $|X_i : U| = |X_i : X_i \cap U|$ sonludur. $\square$

Teorem 1.1 in İspatı

(a) Kabul edelim ki G her öz altgrubu çözülebilir ve her homomorfik görüntüsünde sonlu üreteçli altgrupların normal kapanışları residually nilpotent olan bir sonsuz üreteçli periyodik grup olsun. Eğer G bir mükemmel grup değilse $G' < G$ olduğundan hipotezden G' çözülebilirdir ve böylece Sonuç 2.39 dan G çözülebilirdir. Kabul edelim ki G bir mükemmel grup olsun. O zaman Önerme 3.2 den G bir sayılabilir sonsuz lokal sonlu p -gruptur. Kabul edelim ki G grubunun her H homomorfik görüntüsü $H \setminus Z(H)$ nın elemanlarına göre bir $(*)$ -üçlüsüne sahip olsun. Genelliği bozmadan $H = G$ olduğu kabul edilebilir.

N_i ler Önerme 3.2 nin hipotezinde tanımlandığı şekilde olmak üzere

$$G = \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$$

olsun. O halde Önerme 3.2 den her $i \geq 1$ için N_i bir residually (sonlu exponentli nilpotent) gruptur. Kabul edelim ki $w \notin Z(G)$ olacak şekilde (w, V, L) üçlüsü G için bir $(*)$ -üçlüsü olsun. Yani

$$w \notin V \text{ fakat her } y \in G \setminus L \text{ için } w \in \langle V, y \rangle$$

dir. N_i ler birleşimleri G yi veren artan bir zincir oluşturduğundan her $x_i \in \langle w, V \rangle$ için $x_i \in N_i$ olacak şekilde bir N_i vardır ve bunlardan en büyük indise sahip olan $N_k \langle w, V \rangle$ yi kapsar. N_i ler N_1 yerine N_k dan başlatılarak tekrar düzenlenebilir. Dolayısıyla genelliği bozmadan her $i \geq 1$ için $\langle w, V \rangle \leq N_i$ ve dolayısıyla $\langle w, V \rangle^G \leq N_i^G = N_i$ olduğu kabul edilebilir. (w, V, L) üçlüsü G için bir $(*)$ -üçlüsü ise her $y \in G \setminus L$ için $w \in \langle V, y \rangle$ dir. O halde $N_i \neq L$ olmak üzere her $y \in N_i \setminus L \cap N_i$ için $w \in \langle V, y \rangle$ olduğundan $(w, V, N_i \cap L)$ üçlüsü N_i ye göre bir $(*)$ -üçlüsüdür. G lokal sonlu p -grup olduğundan N_i de lokal sonlu p -gruptur. Ayrıca N_i residually (sonlu exponentli nilpotent) olduğundan Lemma 4.7 den $[N_i : N_i \cap L]$ sonludur. Ayrıca $L < G$ olduğundan hipotezden L çözülebilirdir. Böylece bir $t \geq 0$ tamsayısı için $d(L) = t$ olmak üzere $N_i \cap L \leq L$ olduğundan her $i \geq 1$ için $d(N_i \cap L) \leq t$ dir. Bu durumda Lemma 2.51 her bir N_i ye uygulanabilir ve böylece her $i \geq 1$ için $d(E_i) \leq t^2$ olacak şekilde N_i nin bir sonlu indeksli E_i karakteristik altgrubu vardır.

E_i altgrubu N_i nin karakteristik altgrubu ve $N_i \triangleleft G$ olduğundan Lemma 2.41 den $E_i \triangleleft G$ ve $[N_i : E_i]$ sonludur. $N_i \triangleleft G$ olduğundan $N_i/E_i \triangleleft G/E_i$ ve N_i/E_i sonlu olduğundan Lemma 2.44 den $G/E_i = C_{G/E_i}(N_i/E_i)$ dir. Böylece $[G/E_i, N_i/E_i] = 1$ olduğundan $[G, N_i] \leq E_i$ dir. Ayrıca $[N_i, N_i] \leq [G, N_i] \leq E_i$ olduğundan $N'_i \leq E_i$ dir. Dolayısıyla $d(N'_i) \leq d(E_i) \leq t^2$ olup $d(N_i) \leq t^2 + 1$ dir. O halde $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$ olduğundan $d(G) \leq t^2 + 1$ dir. Böylelikle G çözülebilir olur ki bu G nin mükemmel grup olması ile çelişir. Dolayısıyla G mükemmel grup değildir ve ispatın başında açıklandığı gibi G çözülebilirdir.

(b) Kabul edelim ki eğer mümkünse G bir mükemmel grup olsun. O zaman hipotezden ve Önerme 3.2 den bir p asalı için G bir sayılabilir sonsuz lokal sonlu p -gruptur. Kabul edelim ki her sonlu F altgrubu için F^G bir FC-grup olsun. Ayrıca Önerme 3.2 nin hipotezindeki gibi $N_i = F_i^G$ olmak üzere $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$ olsun. G bir mükemmel grup olduğundan abelyan olamaz aksi halde $G = G' = 1$ olur ki bu bir çelişkidir. Bir $g \in G \setminus Z(G)$ için $C = C_G(g)$ olsun. (a) nın ispatındaki gibi N_i ler g ye göre tekrar düzenlenebileceğinden $g \in N_1$ olduğu

kabul edilebilir. O zaman g nin N_i deki eşlenik sınıfı $Cl_{N_i}(g)$ olmak üzere $N_i \cap C_G(g) = C_{N_i}(g)$ ve $|N_i : C_{N_i}(g)| = |Cl_{N_i}(g)|$ dir [24]. Her $i \geq 1$ için N_i bir FC-grup olduğundan $|Cl_{N_i}(g)|$ sonludur. Böylece $|N_i : N_i \cap C|$ sonludur. $g \in G \setminus Z(G)$ olduğundan $C < G$ olur ve böylece hipotezden C çözülebilirdir. (a) da $L = C$ alınıp devam edilirse tekrar çelişkiye düşülür. O halde (a) nın ispatında ki gibi G çözülebilirdir. $\square$

Şimdi bir grubun (*)-özellikliğini sağlaması için bir kriter verilecektir. Bu kriterden (Lemma 4.8) ve Lemma 2.61 den bir mükemmel lokal sonlu barely geçişli G grubu (*)-özellikliğini sağlar.

4.8. Lemma

G bir sonsuz üreteçli mükemmel grup ve Y kümesi G nin bir üreteç kümesi olsun. Kabul edelim ki $K_1 < K_2 < \dots < K_n < \dots$ zinciri G nin öz altgruplarının bir artan zinciri olsun öyle ki G nin her öz altgrubu K_i lerden biri tarafından içerilsin. O zaman G grubu Y ye göre (*)-özellikliğini sağlar.

İspat

$Z(G) < G$ dir. Aksi halde G abelyan gruptur ve böylece $G = G' = 1$ olur ki bu bir çelişkidir. Böylece $Z(G) \leq K_1$ olduğu kabul edilebilir. Çünkü hipotezden bir $j \geq 1$ için $Z(G) \leq K_j$ olacak şekilde bir K_j vardır ve artan zincirde K_j den önceki terimler atılarak $j = 1$ alınıp indisler yeniden düzenlenerek artan zincir oluşturulabilir. Kabul edelim ki iddia yanlış olsun. Yani G grubu Y ye göre (*)-özellikliğini sağlamasın. O zaman $1 \neq w \in G$ için $w \notin V$ olacak şekilde G nin her sonlu üreteçli V altgrubu ve her L öz altgrubu için en azından bir $y \in Y \setminus L$ vardır öyle ki $w \notin \langle V, y \rangle$ dir. O zaman $w \notin 1$ olduğundan en azından bir $y_1 \in Y \setminus K_1$ vardır öyle ki $w \notin \langle 1, y_1 \rangle = \langle y_1 \rangle$ dir. Benzer şekilde $w \notin \langle y_1 \rangle$ olduğundan en azından bir $y_2 \in Y \setminus K_2$ vardır öyle ki $w \notin \langle y_1, y_2 \rangle$ dir. Bu şekilde devam edilirse Y nin sonsuz $\{y_i \mid i \geq 1\}$ altkümesi elde edilir öyle ki her $i \geq 1$ için $y_i \notin K_i$ ve $w \notin \langle y_1, y_2, \dots, y_i \rangle < \langle y_1, y_2, \dots, y_i, y_{i+1} \rangle$ dir. $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} \langle y_1, y_2, \dots, y_n \rangle$ olsun. U , G nin öz altgruplarının artan zincirinin birleşimi olduğundan sonsuz çoklukta eleman tarafından üretilen G nin bir alt grubudur ve $w \notin U$ olduğundan $U < G$ dir. Fakat U nun $\{y_i \mid i \geq 1\}$ altkümesi hiçbir K_i tarafından içerilmediğinden U da içerilmez. Böylece hipotezden $U = G$

olmalıdır. Bu ise $U < G$ olmasıyla çelişir. O halde G grubu Y ye göre $(*)$ -özelliğini sağlar. $\square$

Bundan dolayı eğer bir lokal sonlu barely geçişli p -grubu çözülebilir bir nokta dengeleyenine sahip ise Teorem 1.1(a) dan dolayı grup çözülebilirdir.

Teorem 1.2 nin İspatı

G grubu her öz altgrubu residually (sonlu exponentli nilpotent) ve herhangi iki öz altgrubu bir öz altgrubunu üreten bir mükemmel lokal sonlu grup olsun. Ayrıca (w, V, L) üçlüsü G için bir $(*)$ -üçlüsü olsun. $U = \langle w, V \rangle^G L$ olsun. Önerme 3.2 den G bir mükemmel lokal nilpotent grup olduğundan Lemma 4.7 nin ispatındaki gibi $\langle w, V \rangle^G \neq G$ dir ve böylece hipotezden $U \neq G$ dir. Böylece Lemma 3.4 ten (w, V, U) üçlüsü G için bir $(*)$ -üçlüsüdür. X , G nin herhangi bir öz altgrubu olsun. Hipotezden $\langle w, V \rangle^G X \neq G$ dir. Hipotezden G lokal sonlu ve G nin herhangi iki öz altgrubu bir öz altgrubunu ürettiğinden G sonsuz üreteçlidir. Dolayısıyla her $i \geq 1$ için $\langle w, V \rangle^G X < X_1 < X_{i+1} < G$ olmak üzere $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ öyle ki $y_i \in G \setminus X_i$ olmak üzere $X_{i+1} = \langle y_i, X_i \rangle$ şeklinde G nin X_i öz altgrupları elde edilebilir. Ayrıca hipotezden her X_i residually (sonlu exponentli nilpotent) altgruptur. Böylece Lemma 4.7 den her $i \geq 1$ için $|X_i : X_i \cap U|$ sonludur. Özel olarak $|X : X \cap U|$ sonludur. $N = \text{Core}_G(U)$ ve $\bar{G} = G/N$ olsun. O zaman $\text{Core}_{\bar{G}}(\bar{U}) \leq \text{Core}_G(U)N/N = 1$ olduğundan $\bigcap_{g \in G} (\bar{U})^{\bar{g}} = 1$ dir. $\bar{G}$ nin her $\bar{X}$ öz altgrubu için $|X : X \cap U|$ sonlu olduğundan $|\bar{X} : \bar{X} \cap \bar{U}|$ sonludur. Lemma 2.49 dan $\bar{G}$ bir sonsuz küme üzerinde bir mükemmel barely geçişli gruba izomorftur. $\square$

5. TEOREM 1.3 VE TEOREM 1.4 ÜN İSPATI

5.1. Lemma

G bir sonsuz üreteçli MNS-grup olsun. $1 \neq w \in G$ için G nin w elemanına göre $(*)$ -üçlüsü olmasın. O zaman $w \notin V$ olacak şekilde G nin bir sonlu üreteçli V altgrubu vardır öyle ki eğer $y \in G$ ve $d(\langle V, y \rangle) > d(V)$ ise $w \in \langle V, y \rangle$ dir. Diğer bir deyişle (w, V) ikilisi G için bir seçkin ikilidir.

İspat

G grubu hipotezden lokal çözülebilir ve Önerme 3.2 den sayılabilir sonsuzdur. $U, w \notin U$ olacak şekilde G nin bir sonlu üreteçli altgrubu olsun. Hipotezden $1 \neq w \in G$ için G ye göre bir $(*)$ -üçlüsü olmadığından G nin her L öz altgrubu için bir $y \in G \setminus L$ vardır öyle ki $w \notin \langle U, y \rangle$ dir. L herhangi bir öz altgrup olduğundan $L = U$ alınır bir $y_1 \in G \setminus U$ seçilebilir öyle ki $w \notin \langle U, y_1 \rangle$ dir. Ayrıca y_1 elemanı, eğer mümkünse, $d(\langle U, y_1 \rangle) > d(U)$ olacak şekilde seçilebilir. Eğer burada veya bundan sonra bu şekilde G nin hiçbir elemanı seçilemiyorsa seçkin ikili tanımındaki ikinci şartın hipotezi sağlanmadığından (w, U) ikilisi seçkin ikili olur. $U_0 = U$ olmak üzere $U_1 = \langle U_0, y_1 \rangle$ olsun. U_1 altgrubu $w \notin U_1$ olacak şekilde G nin bir sonlu üreteçli altgrubu olduğundan tekrar G nin her L öz altgrubu için en azından bir $y \in G \setminus L$ vardır öyle ki $w \notin \langle U_1, y \rangle$ dir. Burada benzer şekilde $L = U_1$ alınarak, eğer mümkünse, $d(\langle U_1, y_2 \rangle) > d(U_1)$ olacak şekilde $y_2 \in G \setminus U_1$ seçilebilir. Benzer şekilde $U_2 = \langle U_1, y_2 \rangle$ olsun. Şimdi w elemanı ve U_2 altgrubu için yukarıdaki işlemler benzer şekilde tekrarlanırsa

$$y_1, y_2, \dots, y_n, \dots \text{ ve } U_0, U_1, \dots, U_n, \dots$$

olacak şekilde G nin elemanlarının ve sonlu üreteçli altgruplarını sonsuz bir dizisi elde edilir öyle ki

$$\text{her } i \geq 0 \text{ için } U_{i+1} = \langle U_i, y_{i+1} \rangle \text{ ve } w \notin U_i < U_{i+1}$$

ve ayrıca y_i , eğer mümkünse, $d(U_{i+1}) > d(U_i)$ olacak şekilde seçildi.

$$W = \bigcup_{i=0}^{\infty} U_i$$

olsun. $w \notin W$ olduğundan $W < G$ olur ve böylece hipotezden W çözülebilirdir. W çözülebilir olduğundan sonlu bir çözülebilirlik uzunluğuna sahiptir. Böylece her $i \geq 0$ için U_i de çözülebilir ve $U_i \leq W$ olduğundan $d(U_i) \leq d(W)$ dur. Yani $y_{j+1}, y_{j+2}, \dots$ elemanlarının nasıl seçildiği önemli olmaksızın bir en küçük $j \geq 1$ doğal sayısı vardır öyle ki her $k \geq j$ için $d(U_k) = d(U_j) = d(W)$ dir. Bir başka ifadeyle eğer $y \in G \setminus U_j$ ve $d(\langle U_j, y \rangle) > d(U_j)$ ise $w \in \langle U_j, y \rangle$ dir. Aksi halde $w \notin \langle U_j, y \rangle \leq W$ ve $d(W) < d(\langle U_j, y \rangle)$ olur ki bu bir çelişkidir. Böylece $V = U_j$ alınırsa (w, V) ikilisi G için bir seçkin ikilidir. $\square$

Lemma 5.1 den eğer G bir sonsuz üreteçli MNS-grup ise her $1 \neq w \in G$ ve G nin sonlu üreteçli her U altgrubu için $U \leq V$ olacak şekilde bir sonlu üreteçli V altgrubu vardır öyle ki (w, V) ikilisi G için ya $(*)$ -ikilisidir ya da seçkin ikilidir. İkinci durumda eğer $E \in E^*(w, V)$ ise her $y \in E$ için $d(\langle V, y \rangle) = d(V)$ dir. Elbette $K, E < K$ olacak şekilde G nin herhangi bir altgrubu ise E altgrubu w elemanını içermeyen V yi kapsayan G nin maksimal altgrubu olduğundan $w \in K \setminus E$ dir ancak bu $d(\langle V, y \rangle) > d(V)$ olacak şekilde bir $y \in K \setminus E$ nin varlığını gerektirmez.

5.2. Lemma

G bir sonsuz üreteçli MNS-grup olsun. $1 \neq w \in G$ için (w, V) ve (w, V_1) ikilisi $V \leq V_1$ olacak şekilde G grubunun iki seçkin ikilisi olsun. O zaman $E^*(w, V_1) \subseteq E^*(w, V)$ dir.

İspat

$R \in E^*(w, V_1)$ olsun. O zaman R altgrubu $w \notin R$ ve $V_1 \leq R$ olacak şekilde G nin bir maksimal altgrubudur. Böylece $w \notin R$ ve $V \leq R$ olduğundan bir $E \in E^*(w, V)$ için $R \leq E$ dir. $w \notin E$, $V_1 \leq E$ ve R altgrubu G nin (w, V_1) -maksimal altgrubu olduğundan $R = E$ olmak zorundadır ki böylece $R \in E^*(w, V)$ olduğundan $E^*(w, V_1) \subseteq E^*(w, V)$ dir. $\square$

5.3. Lemma

G bir sonsuz üreteçli MNS-grup olsun. Kabul edelim ki $1 \neq w \in G$ için G nin $(*)$ -üçlüsü olmasın. O zaman G nin her (w, V) seçkin ikilisi için $\langle E(w, V) \rangle = G$ dir.

İspat

Kabul edelim ki $1 \neq w \in G$ için G nin $(*)$ -üçlüsü olmasın. Mümkünse iddia sağlanmasın. O zaman Lemma 5.1 den bir (w, V) seçkin ikilisi vardır ve kabulden dolayı $\langle E(w, V) \rangle \neq G$ dir. Seçkin ikili tanımından

$w \notin V$ fakat eğer $d(\langle V, y \rangle) > d(V)$ olacak şekilde $y \in G$ ise o zaman $w \in \langle V, y \rangle$

dir. $L = \langle w, V, E(w, V) \rangle$ olsun. Lemma 2.74 ten G bir lokal çözülebilir grup olduğundan SI-gruptur. Dolayısıyla faktörleri abelyan olan normal serisi vardır ve G hipotezden çözülebilir olmadığından normal seri sonlu uzunluğa sahip değildir. Dolayısıyla G grubu $1 = N_0 \triangleleft N_1 \triangleleft \dots \triangleleft N_\beta = G$ olacak şekilde öz normal altgrupların artan birleşimi olduğundan $G = \bigcup_{\alpha < \beta} N_\alpha$ dir. Böylece bir $\alpha < \beta$ için $\{w\} \cup V \cup E(w, V) \subseteq N_\alpha$ olduğundan $L \leq N_\alpha$ dir. Böylece $L \neq G$ dir. $E(w, V) \subseteq L$ ve $E(w, V) = \{y \in G \mid w \notin \langle V, y \rangle\}$ olduğundan her $y \in G \setminus L$ için $w \in \langle V, y \rangle$ dir. Fakat bu $1 \neq w \in G$ için G nin $(*)$ -üçlüsü olmaması hipoteziyle çelişir. O halde kabul yanlış olup iddia sağlanır. $\square$

5.4. Lemma

G bir sonsuz üreteçli MNS-grup ve (w, V) ikilisi G için bir seçkin ikili olsun. O zaman $W^*(w, V)$ maksimal elemanlar içerir. $W^*(w, V)$ nin bir maksimal elemanı M olmak üzere $\overline{G} = G/M$ olsun. O zaman ya $Z(\overline{G}) = 1$ ya da $\overline{w}\overline{V} \cap Z(\overline{G}) \neq 1$ dir.

İspat

Her $i \geq 1$ ve bazı $E_i \in E^*(w, V)$ ler için $D_i = \text{Core}_G(E_i)$ olmak üzere

$$D_1 \leq D_2 \leq \dots \leq D_n \leq \dots$$

$W^*(w, V)$ nin elemanlarının artan bir zinciri olsun. $D^* = \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$ olsun. O zaman $VD^* = \bigcup_{i=1}^{\infty} VD_i$ dir. Ayrıca her $i \geq 1$ için $w \notin E_i \in E^*(w, V)$ ve $V \leq E_i$ olduğundan $VD_i \leq E_i$ olur ve böylece $w \notin VD_i$ dir. Her $i \geq 1$ için $w \notin VD_i$ olduğundan $w \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} VD_i = VD^*$ dir. Böylece $VD^* < G$ olduğundan bir $E \in E^*(w, V)$ için $VD^* \leq E$ dir. $D^* \triangleleft G$ olduğundan $D^* = \text{Core}_G(D^*) \leq \text{Core}_G(E)$ dir. Böylece $D_E = \text{Core}_G(E)$ olmak

üzere $D^* \leq D_E$ dir. $D_E \in W^*(w, V)$ olduğundan D_E ispatın başındaki artan zincirin bir üst sınırıdır. O halde $W^*(w, V)$ nin keyfi seçilen her artan zinciri için bu şekilde bir üst sınır bulunabileceğinden Zorn Lemmadan $W^*(w, V)$ bir maksimal eleman içerir [24].

Kabul edelim ki $W^*(w, V)$ nin bir maksimal elemanı M olmak üzere $\overline{G} = G/M$ olsun. $Z(\overline{G}) = 1$ ise iddia sağlandığından $Z(\overline{G}) \neq 1$ olsun. Kabul edelim ki bu şartlar altında lemmanın iddiası sağlanmasın yani $\overline{w}\overline{V} \cap Z(\overline{G}) = 1$ olsun. $\overline{w} \notin \overline{V}$ olduğundan $\overline{w} \notin \overline{V}Z(\overline{G})$ dir. Aksi halde $\overline{w} = \overline{v}\overline{x}$ olacak şekilde bir $\overline{v} \in \overline{V}$ ve bir $\overline{x} \in Z(\overline{G})$ vardır. $\overline{x} \in Z(\overline{G})$ olduğundan $\overline{w} = \overline{x}\overline{v}$ ve böylece $\overline{x} = \overline{w}(\overline{v})^{-1}$ dir. O zaman $\overline{x} \in \overline{w}\overline{V} \cap Z(\overline{G})$ olduğundan $\overline{x} = 1$ dir. Böylece $\overline{w} = \overline{v} \in \overline{V}$ olur ki bu bir çelişkidir. $Z(\overline{G}) = Z/M$ olsun. O zaman $w \notin ZV$ olduğundan bir $E \in E^*(w, V)$ için $ZV \leq E$ dir. Bu durumda $Z \triangleleft G$ olduğundan $Z = \text{Core}_G(Z) \leq \text{Core}_G(E)$ dir. Ancak $M \leq Z \leq \text{Core}_G(E)$, $\text{Core}_G(E) \in W^*(w, V)$ ve M , $W^*(w, V)$ nin bir maksimal elemanı olduğundan $Z = M$ olmak zorundadır. O zaman $Z(\overline{G}) = 1$ olur ki bu hipotez ile çelişir. O halde kabul yanlış olup $\overline{w}\overline{V} \cap Z(\overline{G}) \neq 1$ dir. $\square$

5.5. Lemma

G bir periyodik lokal nilpotent grup ve N , $N \cap Z(G) = 1$ olacak şekilde G nin bir aşıkâr olmayan normal altgrubu olsun. $w \in G$ ve V , G nin w elemanını içermeyen sonlu bir altgrubu olsun. O zaman N tarafından içerilen $w \notin VL$ olacak şekilde G nin trivial olmayan bir L normal altgrubu vardır.

İspat

Hipotezden $N \cap Z(G) = 1$ olduğundan Lemma 2.75 ten N altgrubu G nin aşıkâr olmayan bir minimal normal altgrubunu içeremez. Böylece N normal altgrubu G nin minimal normal altgrubu olamayacağından N tarafından öz olarak kapsanan G nin bir aşıkâr olmayan N_1 normal altgrubu vardır. Bu şekilde sonsuz kez devam edilirse bir γ limit ordinal elde edilir öyle ki her $\alpha < \gamma$ için $N_\alpha > N_{\alpha+1}$ ve

$$\bigcap_{\alpha < \gamma} N_\alpha = 1$$

dir. Kabul edelim ki eğer mümkünse her $\alpha < \gamma$ için $w \in VN_\alpha$ olsun. O zaman Lemma 4.7 nin ispatındaki gibi V sonlu olduğundan

$$w \in \bigcap_{\alpha < \gamma} VN_\alpha = V \bigcap_{\alpha < \gamma} N_\alpha = V$$

olur ki bu bir çelişkidir. Öyleyse en az bir $\alpha < \gamma$ için $w \notin VN_\alpha$ ve $N_\alpha \neq 1$ dir. $\square$

Teorem 1.3 ün İspatı

G her homomorfik görüntüsündeki sonlu altgrupların normal kapanışları residually nilpotent olan bir lokal sonlu MNS- p -grup olsun. G lokal sonlu olduğundan bir periyodik gruptur. Ayrıca G grubu lokal sonlu MNS- p -grup olduğundan sonsuz üreteçlidir. Aksi halde G sonlu p -grup olur. Böylece Lemma 2.42 den G çözülebilirdir. Ancak bu G nin MNS-grup olması ile çelişir. Ek olarak G MNS-grup olduğundan $G' < G$ ise G' çözülebilir ve böylece Sonuç 2.39 dan G çözülebilir olur ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla G bir mükemmel gruptur. Eğer G nin her K homomorfik görüntüsü $K \setminus Z(K)$ nin elemanları için bir $(*)$ -üçlüsüne sahipse Teorem 1.1(a) dan G çözülebilir olur ki bu G nin mükemmel grup olması ile çelişir. O halde G nin bir H epimorfik görüntüsü vardır öyle ki eğer $w_H \in H \setminus Z(H)$ ise H nin w_H için $(*)$ -üçlüsü yoktur ve böylece Lemma 5.1 den $w_H \notin U_H$ olacak şekilde H nin her U_H sonlu altgrubu için $U_H \leq V_H$ olacak şekilde H nin bir V_H sonlu altgrubu vardır öyle ki (w_H, V_H) ikilisi H için bir seçkin ikilidir. Genelliği bozmadan Teorem 1.1(a) nın ispatındaki gibi ispat sadeliği için $H = G$ olduğu kabul edilebilir.

G bir mükemmel grup olduğundan $G \neq Z(G)$ dir ve böylece bir $w \in G \setminus Z(G)$ vardır. O zaman Lemma 5.1 den G nin sonlu bir V altgrubu vardır öyle ki (w, V) ikilisi G için bir seçkin ikilidir. Ayrıca Lemma 5.3 ten $\langle E(w, V) \rangle = G$ dir.

Her $E \in E^*(w, V)$ için $D_E = \text{Core}_G(E)$ olsun. Lemma 5.4 ten $S \in E^*(w, V)$ olmak üzere $W^*(w, V)$ nin bir D_S maksimal elemanı vardır. $\bar{G} = G/D_S$ ve $\bar{Z} = Z(\bar{G})$ olsun. O zaman Lemma 5.4 ten ya $\bar{Z} = 1$ ya da bir $u \in V$ vardır öyle ki $1 \neq \bar{w}u \in \bar{Z}$ dir.

$\bar{Z} \cap \bar{V} = 1$ dir. Eğer $1 \neq \bar{z} \in \bar{Z} \cap \bar{V}$ ise $D_S \triangleleft S$ olduğundan $D_S \langle z \rangle \leq D_S V \leq S$ dir. Ayrıca $\langle \bar{z} \rangle \leq \bar{Z}$ olduğundan $\langle \bar{z} \rangle = (\langle z \rangle D_S) / D_S \triangleleft \bar{G}$ olur ve böylece $\langle z \rangle D_S \triangleleft G$ dir. $1 \neq \bar{z} = z D_S$ olduğundan $z \notin D_S$ dir ve dolayısıyla $D_S < \langle z \rangle D_S$ dir. Böylece $D_S \neq S$ olduğundan S altgrubu G nin bir normal altgrubu değildir. Dolayısıyla $D_S < \langle z \rangle D_S < S$ dir. Ancak bu D_S nin S içinde G nin bir maksimal normal altgrubu olması ile çelişir.

Kabul edelim ki eğer mümkünse $\bar{Z}$ lokal devirli olmasın. O zaman Teorem 2.78 den $\langle \bar{z}_1 \rangle \cap \langle \bar{z}_2 \rangle = 1$ olacak şekilde $\bar{Z}$ nin p^2 mertebeli bir $\langle \bar{z}_1, \bar{z}_2 \rangle$ elemanter abelyan altgrubu vardır. Bu durumda $\bar{Z} \cap \bar{V} = 1$ olduğundan $i = 1, 2$ olmak üzere en az bir i için $\bar{w} \notin \langle \bar{z}_i \rangle \bar{V}$ dir. Eğer her $i = 1, 2$ için $\bar{w} \in \langle \bar{z}_i \rangle \bar{V}$ ise $\bar{w} = \bar{x}_i \bar{v}_i$ olacak şekilde bir $\bar{x}_i \in \langle \bar{z}_i \rangle$ ve bir $\bar{v}_i \in \bar{V}$ elemanı vardır. O zaman $\bar{w} = \bar{x}_1 \bar{v}_1 = \bar{x}_2 \bar{v}_2$ olduğundan $\bar{v}_1 \bar{v}_2^{-1} = \bar{x}_1^{-1} \bar{x}_2 \in \bar{Z} \cap \bar{V}$ dir. Böylece $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$ olur ki bu $\langle \bar{z}_1 \rangle \cap \langle \bar{z}_2 \rangle = 1$ olmasıyla çelişir. O halde $\langle \bar{z}_i \rangle \bar{V}$ nin G içine ters görüntüsü alınırsa $w \notin \langle z_i \rangle VD_S$ olur. Ayrıca $V \leq \langle z_i \rangle VD_S$ ve $S \in E^*(w, V)$ olduğundan $\langle z_i \rangle VD_S \leq S$ dir. Böylece $w \notin \langle z_i \rangle D_S > D_S$ olur ki bu $\langle z_i \rangle D_S \triangleleft G$ olduğundan D_S nin S içinde G nin bir maksimal normal altgrubu olması ile çelişir. O halde $\bar{Z}$ lokal devirlidir.

Son olarak kabul edelim ki $Z(G) = 1$ olsun. O zaman Lemma 5.5 ten $1 \neq G \triangleleft G$ olduğundan G nin bir $1 \neq L$ normal altgrubu vardır öyle ki $w \notin VL$ dir. Böylece bir $E \in E^*(w, V)$ için $VL \leq E$ dir. Bundan dolayı $L \leq Core_G(E)$ dir. O halde $Core_G(E) \neq 1$ ve $Core_G(E) \in W^*(w, V)$ olduğundan $W^*(w, V)$ nin $Core_G(E)$ elemanını içeren aşikar olmayan bir maksimal elemanı vardır. $\square$

5.6. Lemma

G bir sonsuz üreteçli MNS-grup olsun. Kabul edelim ki $1 \neq w \in G$ için G nin $(*)$ -üçlüsü olmasın. (w, V) ikilisi G için bir seçkin ikili olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır.

- (a) $V \leq U$ olacak şekilde G nin bir (w, U) seçkin ikilisi vardır öyle ki her $E \in E^*(w, U)$ için $d(E) = d(U)$ dir. Böylece (w, U) ikilisi G için bir dominant ikilisidir. Ayrıca $E^*(w, U) \subseteq E^*(w, V)$ dir.
- (b) (w, U) ikilisi G için bir dominant ikilisi olsun. $R \in E^*(w, U)$ ve U_1 altgrubu $U \leq U_1$ olacak şekilde R nin sonlu üreteçli bir altgrubu olsun. O zaman (w, U_1) ikilisi G için bir dominant ikilisidir.

İspat

- (a) Kabul edelim ki iddia yanlış olsun. O zaman $V \leq U$ olacak şekilde her $U \leq G$ için (w, U) baskın ikili değildir. Dolayısıyla (w, V) ikilisi de baskın ikili değildir ve böylece bir $E_1 \in E^*(w, V)$ için $d(E_1) > d(V)$ ve (w, V) seçkin ikili olduğundan her $y \in E_1$ için $d(\langle V, y \rangle) = d(V)$ dir. Böylece E_1 in V yi kapsayan sonlu üreteçli bir F_1 altgrubu vardır öyle ki $d(V) < d(F_1) = d(E_1)$ dir. Gerçekten $K_0 = V$ olmak üzere bir $y_1 \in E_1 \setminus K_0$ için

$K_1 = \langle K_0, y_1 \rangle$ ise $d(K_0) = d(K_1)$ dir. Bir $y_2 \in E_1 \setminus K_1$ için $K_2 = \langle K_1, y_2 \rangle$ olmak üzere $d(K_1) \leq d(K_2)$ dir. Bu şekilde devam edilirse bir i için $d(K_i) = d(E_1)$ olmalıdır çünkü E_1 hipotezden çözülebilirdir. Ayrıca F_1 altgrubu G nin $w \notin F_1$ olacak şekildeki bir sonlu üreteçli altgrubu ve G nin w için $(*)$ -üçlüsü olmadığından Lemma 5.1 den $F_1 \leq V_1$ olacak şekilde bir (w, V_1) seçkin ikilisi vardır. Benzer şekilde kabulden (w, V_1) baskın ikili değildir. Böylece bir $E_2 \in E^*(w, V_1)$ için $d(V_1) < d(E_2)$ dir. Ayrıca hipotezden E_2 çözülebilir olduğundan E_2 nin V_1 i kapsayan $d(V_1) < d(F_2) = d(E_2)$ olacak şekilde sonlu üreteçli bir F_2 altgrubu vardır. Bu şekilde devam edilirse

$$V = V_0 < V_1 < \dots < V_n < \dots$$

olacak şekilde G nin sonlu üreteçli altgruplarının artan bir zinciri elde edilir öyle ki her $i \geq 1$ için (w, V_i) ikilisi G için seçkin ikilidir ve $d(V_i) < d(V_{i+1})$ dir. $V^* = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$ olsun. $d(V^*)$ sonlu değildir ve böylece V^* çözülebilir değildir. Ancak $w \notin V^*$ olduğundan hipotezden V^* çözülebilir olmalıdır ki bu bir çelişkidir. O halde kabul yanlış olup $V \leq U$ olacak şekilde G nin bir (w, U) seçkin ikilisi vardır öyle ki her $E \in E^*(w, U)$ için $d(E) = d(U)$ dir. Yani (w, U) ikilisi G için bir dominant ikilisidir. Ayrıca Lemma 5.2 den $V \leq U$ olduğundan $E^*(w, U) \subseteq E^*(w, V)$ dir.

(b) (w, U) ikilisi G için bir dominant ikilisi olsun. $R \in E^*(w, U)$ ve U_1 altgrubu U yu kapsayan R nin bir sonlu üreteçli altgrubu olsun. Öncelikle (w, U_1) ikilisinin G için bir seçkin ikili olduğunu gösterelim. Hipotezden w için G nin $(*)$ -üçlüsü olmadığından U_1 i kapsayan sonlu üreteçli G nin her K altgrubu için (w, K) ikilisi G için $(*)$ -ikilisi değildir. $y \in G$ için $d(\langle U_1, y \rangle) > d(U_1)$ olsun. Eğer mümkünse kabul edelim ki $w \notin \langle U_1, y \rangle$ olsun. $U \leq U_1$ olduğundan $\langle U_1, y \rangle \leq E$ olacak şekilde bir $E \in E^*(w, U)$ vardır. Böylece (w, U) ikilisi G için bir dominant ikilisi olduğundan $d(E) = d(U)$ olmak üzere

$$d(\langle U_1, y \rangle) \leq d(E) = d(U) \leq d(U_1)$$

dir. Böylece $d(\langle U_1, y \rangle) \leq d(U_1)$ olur ki bu bir çelişkidir. O halde $d(\langle U_1, y \rangle) > d(U_1)$ ise $w \in \langle U_1, y \rangle$ olup (w, U_1) ikilisi G için bir seçkin ikilidir.

Her $E \in E^*(w, U_1)$ için (w, U) , (w, U_1) ikilileri G için seçkin ikililer ve $U \leq U_1$ olduğundan Lemma 5.2 den $E \in E^*(w, U)$ dir. (w, U) dominant ikili olduğundan $d(E) = d(U)$ ve

$U \leq U_1 \leq E$ olduğundan $d(U_1) = d(E)$ dir. Böylece (w, U_1) ikilisi G için bir dominant ikilisidir. $\square$

5.7. Lemma

G bir sonsuz üreteçli grup olsun. (w, V) ikilisi G için bir seçkin ikili ve $w \notin VS$ olacak şekilde $S \triangleleft G$ olsun. Kabul edelim ki $U, (wS, US/S)$ ikilisi G/S bölüm grubu için bir seçkin ikili olacak şekilde G nin V yi kapsayan bir sonlu üreteçli altgrubu olsun. Eğer bir $L \leq G$ için $L/S \in E^*(wS, US/S)$ ise $L \in E^*(w, V)$ dir.

İspat

$L/S \in E^*(wS, US/S)$ olsun. O zaman $L/S, wS \notin L/S$ ve $US/S \leq L/S$ olacak şekilde G/S nin bir maksimal altgrubudur. $US/S \leq L/S$ ise $U \leq US \leq L$ dir. Hipotezden $V \leq U$ olduğundan $V \leq L$ ve $wS \notin L/S$ olduğundan $w \notin L$ dir. O zaman $L \leq T$ olacak şekilde bir $T \in E^*(w, V)$ vardır. $U \leq T$ ve $w \notin T$ olduğundan $US/S \leq T/S$ ve $wS \notin T/S$ dir. $L/S \leq T/S$ ve $L/S \in E^*(wS, US/S)$ olduğundan $L/S = T/S$ dir ve böylece $L = T$ dir. $\square$

5.8. Lemma

G bir sonsuz lokal sonlu MNS- p -grup olsun. $w \in G$ ve $V, w \notin V$ olacak şekilde G nin bir sonlu altgrubu olsun. E, G nin bir (w, V) -maksimal altgrubu ise $Core_G(E) \neq E$ dir.

İspat

Kabul edelim ki $Core_G(E) = E$ olsun. $M = E$ ve $\bar{G} = G/M$ olsun. O zaman Lemma 3.7 den $|\langle \bar{w} \rangle| = p$ dir. Kabul edelim ki $\bar{A}, \bar{G}$ nin $\bar{w}$ yi içeren bir maksimal elemanter abelyan altgrubu olsun. Eğer $\bar{A}$ sonlu ise Lemma 2.71 den $\bar{G}$ bir Chernikov gruptur. Ancak eğer $\bar{G}$ Chernikov grupsa $\bar{G}$ nin minimal şartını sağlayan bir normal abelyan $\bar{N}$ altgrubu vardır öyle ki $\bar{G}/\bar{N}$ sonludur. $\bar{G}/\bar{N}$ aynı zamanda p -grup olduğundan Lemma 2.42 den çözülebilir olur ki bu $\bar{G}$ nin mükemmel grup olmasıyla çelişir. O halde $\bar{A}$ nin sonsuz çoklukta elemanı olmalıdır. $\bar{A}$ bir lokal sonlu sonsuz elemanter abelyan grup olduğundan eğer bir $1 \neq \bar{a} \in \bar{A}$ için $\langle \bar{a} \rangle \cap \langle \bar{w} \rangle \neq 1$ ise $\bar{A}$ p exponentli olduğundan $|\langle \bar{a} \rangle| = p$ dir ve böylece $\langle \bar{a} \rangle$ devirli ve birim eleman dışındaki her elemanı üreteç elemanı olduğundan $\langle \bar{a} \rangle = \langle \bar{w} \rangle$ dir. Dolayısıyla $\bar{A}$ sonsuz olduğundan $\langle \bar{a} \rangle \cap \langle \bar{w} \rangle = 1$ olacak şekilde bir $1 \neq \bar{a} \in \bar{A}$ vardır. Ters görüntüleri

alınırsa $w \notin \langle a, M \rangle$ ve $\langle a, M \rangle > M$ olur ki bu $M = E$ olduğundan E nin (w, V) -maksimal altgrup olması ile çelişir. O halde kabul yanlış olup $Core_G(E) \neq E$ dir. $\square$

5.9. Lemma

G bir sonsuz lokal sonlu MNS- p -grup olsun öyle ki $G \setminus Z(G)$ nin elemanları için G ye göre $(*)$ -üçlüsü olmasın. $w \notin Z(G)$ olmak üzere (w, V) ikilisi G için bir dominant ikili olsun. $M, W^*(w, V)$ nin bir maksimal elemanı olmak üzere $\bar{G} = G/M$ olsun. O zaman $V \leq U$ ve $L < G$ olmak üzere $\bar{G}$ nin $(\bar{w}, \bar{U}, \bar{L})$ formunda $(*)$ -üçlüsü yoktur.

İspat

Kabul edelim ki $(\bar{w}, \bar{U}, \bar{L})$ üçlüsü $\bar{G}$ için bir $(*)$ -üçlüsü olsun öyle ki U, G nin bir sonlu altgrubu, $V \leq U$ ve $L < G$ dir. $\bar{w} \notin \bar{U} = UM/M$ olduğundan $w \notin UM$ dir. Ayrıca $V \leq MU$ olduğundan $UM \leq E$ olacak şekilde bir $E \in E^*(w, V)$ vardır. Böylece $M \leq E$ ise $M = Core_G(M) \leq Core_G(E)$, $Core_G(E) \in W^*(w, V)$ ve $M, W^*(w, V)$ nin maksimal elemanı olduğundan $M = Core_G(E)$ dir. Lemma 5.8 dan $M < E$ ve Lemma 5.6(b) den $V \leq U$ olduğundan eğer zorunluysa U altgrubu $U \not\leq M$ olacak şekilde E içinde genişletilebilir. $Z(\bar{G}) = Z/M$ olsun.

İlk olarak kabul edelim ki $\bar{w} \notin \bar{Z}$ olsun. Lemma 4.1 den $\bar{U}$ yi kapsayan $\bar{G}$ nin sonlu bir $\bar{B}$ altgrubu vardır öyle ki $(\bar{w}\bar{Z}, \bar{B}\bar{Z}/\bar{Z})$ ikilisi seçkin ikili değildir. O zaman Lemma 5.1 den $Z \leq R < G$ olmak üzere $(\bar{w}\bar{Z}, \bar{B}\bar{Z}/\bar{Z}, \bar{R})$ üçlüsü $\bar{G}/\bar{Z}$ için bir $(*)$ -üçlüsüdür. G bir mükemmel grup olduğundan $\bar{G}$ de bir mükemmel gruptur. Böylece Lemma 2.40 tan $Z(\bar{G}/\bar{Z}) = 1$ dir. $\bar{G}$ bir lokal sonlu MNS- p -grup olduğundan $\bar{G}/\bar{Z}$ de aynı özellikleri sağlar. $\bar{G}/\bar{Z}$ lokal sonlu olduğundan periyodiktir. Ayrıca $\bar{G}/\bar{Z}$ lokal sonlu p -grup olduğundan sonlu üreteçli her altgrubu sonlu p -gruptur. Böylece sonlu üreteçli her altgrubu Lemma 2.42 den bir nilpotent gruptur. Dolayısıyla $\bar{G}/\bar{Z}$ lokal nilpotenttir. Böylece Lemma 5.5 uygulanırsa $\bar{G}/\bar{Z}$ nin bir $\bar{N}/\bar{Z} \neq 1$ normal altgrubu vardır öyle ki $\bar{w}\bar{Z} \notin \bar{B}\bar{N}\bar{Z}/\bar{Z}$ dir. O zaman $\bar{w} \notin \bar{B}\bar{N}$ olduğundan $w \notin BN$ dir. $V \leq B$ olduğundan bir $K \in E^*(w, V)$ vardır öyle ki $BN \leq K$ dir. Böylece $Core_G(BN) \leq Core_G(K)$ dir. $\bar{N}/\bar{Z} \neq 1$ olduğundan $M < N$ ve $w \notin VN$ dir. Böylece $N \leq Core_G(BN)$ olduğundan $M < Core_G(K) \in W^*(w, V)$ olur ki bu M nin maksimalliği ile çelişir.

İkinci olarak kabul edelim ki $\overline{w} \in \overline{Z}$ olsun. İspatın başında bahsedildiği gibi $U \not\leq M$ olacak şekilde U seçilebildiğinden bir $u \in U \setminus M$ vardır. O zaman $\overline{wu} \notin Z(\overline{G})$ dir. Eğer $\overline{wu} \in Z(\overline{G})$ ise $\overline{w} \in Z(\overline{G})$ olduğundan $\overline{u} \in Z(\overline{G})$ dir. Ayrıca $\langle \overline{u} \rangle \triangleleft \overline{G}$ olduğundan $\langle u \rangle M \triangleleft G$ ve $M \triangleleft G$ olduğundan $\langle u \rangle M = \langle M, u \rangle$ dir. $\overline{u} \in \overline{E}$ olduğundan $M < \langle M, u \rangle \leq \text{Core}_G(E) \in W^*(w, V)$ olur ki bu M nin $W^*(w, V)$ deki maksimalliği ile çelişir. Dolayısıyla $\overline{wu} \notin Z(\overline{G})$ olmak üzere Lemma 3.6 dan $(\overline{wu}, \overline{U}, \overline{L})$ üçlüsü $\overline{G}$ için bir $(*)$ -üçlüsüdür. Bir önceki paragrafta $(\overline{w}, \overline{U})$ yerine $(\overline{wu}, \overline{U})$ ile devam edilirse benzer şekilde çelişki elde edilir. Böylece ispat tamamdır. $\square$

5.10. Lemma

G bir sonsuz lokal sonlu MNS-grup ve (w, V) ikilisi $w \notin Z(G)$ olmak üzere G için bir seçkin ikili olsun. N , $\langle w, V \rangle$ altgrubunu kapsayan G nin bir normal residually nilpotent altgrubu olsun. Eğer N nilpotent değilse $W^*(w, V) \neq \{1\}$ dir.

İspat

N nilpotent olmadığından ve N residually nilpotent olduğundan Lemma 2.79 dan

$$N = N_0 \geq N_1 \geq N_2 \geq \dots$$

olacak şekilde N nin sonsuz çoklukta normal altgruplarının azalan bir zinciri vardır öyle ki her $i \geq 1$ için N/N_i nilpotent ve

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} N_i = 1$$

dir. Ayrıca Lemma 2.41 ve Lemma 2.54 ten $N_i = \gamma_i(N)$ alınırsa N_i , N de karakteristik ve $N \triangleleft G$ olduğundan $N_i \triangleleft G$ dir. Lemma 4.7 nin ispatındaki gibi

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} VN_i = V$$

olduğundan bir $i \geq 1$ için $w \notin VN_i$ dir. O zaman $VN_i \leq E$ olacak şekilde bir $E \in E^*(w, V)$ vardır. Ayrıca N/N_i nilpotent ve N nilpotent olmadığından $N_i \neq 1$ ve $N_i \leq E$ olduğundan $N_i = \text{Core}_G(N_i) \leq \text{Core}_G(E)$ dir. O halde $1 \neq \text{Core}_G(E) \in W^*(w, V)$ dir. $\square$

Teorem 1.4 ün İspatı

G her öz altgrubu çözülebilir ve her homomorfik görüntüsündeki sonlu altgrupların normal kapanışları residually nilpotent olan bir sonsuz üreteçli periyodik grup olsun. Kabul edelim ki (a) sağlanmasın. O halde G çözülebilir değil ve her öz altgrubu çözülebilir olduğundan G bir mükemmel gruptur. Önerme 3.2 den bir p asalı için G bir mükemmel sayılabilir sonsuz lokal sonlu p -gruptur. O halde Teorem 1.3 uygulanırsa $H \setminus Z(H)$ nin elemanları için H ya göre $(*)$ -üçlüsü olmayan G nin bir H homomorfik görüntüsü bulunabilir. Bu durumda Lemma 5.1 ve Lemma 5.6 den her $w_H \in H \setminus Z(H)$ ve $w_H \notin U_H$ olacak şekildeki H nin her sonlu U_H altgrubu için H nin $U_H \leq V_H$ olacak şekilde bir sonlu V_H altgrubu vardır öyle ki (w_H, V_H) ikilisi H için bir seçkin (dominant) ikilidir. Genelliği bozmadan ispat sadeliği için $H = G$ kabul edilebilir.

$w \in G \setminus Z(G)$ seçelim. O zaman yukarıdaki açıklamadan G nin bir sonlu V altgrubu vardır öyle ki (w, V) ikilisi G için bir seçkin ikilidir. O zaman Lemma 5.4 ten $W^*(w, V)$ nin bir M maksimal elemanı vardır. $\bar{G} = G/M$ olsun. Lemma 5.9 dan $V \leq U$ olmak üzere $\bar{G}$ nin $(\bar{w}, \bar{U}, \bar{L})$ formunda $(*)$ -üçlüsü yoktur. Bu durumda Lemma 5.1 ve Lemma 5.6(a) dan V yi kapsayan G nin bir sonlu U altgrubu vardır öyle ki $(\bar{w}, \bar{U})$ ikilisi $\bar{G}$ için bir dominant ikilisidir. $\bar{R} = R/M \in E^*(\bar{w}, \bar{U})$ ise Lemma 5.7 den $R \in E^*(w, V)$ dir. Böylece $M \leq R$ ve $M \triangleleft G$ olduğundan $M = \text{Core}_G(M) \leq \text{Core}_G(R) \in W^*(w, V)$ ve $M, W^*(w, V)$ de maksimal olduğundan $M = \text{Core}_G(R)$ dir. Böylelikle $\text{Core}_{\bar{G}}(\bar{R}) \leq \text{Core}_G(R)M/M = 1$ olduğundan $\text{Core}_{\bar{G}}(\bar{R}) = 1$ dir. O halde açık olarak her $\bar{R} \in E^*(\bar{w}, \bar{U})$ için $\text{Core}_{\bar{G}}(\bar{R}) = 1$ olduğundan $W^*(\bar{w}, \bar{U}) = \{1\}$ dir. Ayrıca eğer $Z(\bar{G}) = 1$ veya eğer G nin bir sonlu F altgrubu için $\bar{F}$ nin $\bar{G}$ deki normal kapanışı nilpotent değilse sırasıyla Lemma 5.5 veya Lemma 5.10 dan $W^*(\bar{w}, \bar{U}) \neq \{1\}$ olduğundan bu bir çelişkidir. Gerçekten Lemma 5.5 için Önerme 3.2 den $\bar{G}$ periyodik lokal nilpotenttir. $Z(\bar{G}) \cap \bar{G} = 1$, $\bar{w} \in \bar{G}$ ve $\bar{U}$, $\bar{w} \notin \bar{U}$ olacak şekilde $\bar{G}$ nin bir sonlu altgrubu olduğundan aşık olmaya bir $\bar{K} \triangleleft \bar{G}$ vardır öyle ki $\bar{w} \notin \bar{U}\bar{K}$ dir. O zaman birimden farklı bir $\bar{E} \in E^*(\bar{w}, \bar{U})$ vardır öyle ki $\bar{U}\bar{K} \leq \bar{E}$ ve böylece $1 \neq \bar{K} = \text{Core}_{\bar{G}}(\bar{K}) \leq \text{Core}_{\bar{G}}(\bar{E})$ olduğundan $1 \neq \text{Core}_{\bar{G}}(\bar{E}) \in W^*(\bar{w}, \bar{U})$ dir. Lemma 5.10 için $\bar{G}$ bir sonsuz lokal sonlu MNS-grup ve $(\bar{w}, \bar{U})$ ikilisi $\bar{G}$ için bir seçkin ikilidir. $\bar{G}$ nin her sonlu $\bar{F}$ altgrubunun normal kapanışı residually nilpotenttir. Bir $\bar{F}$ sonlu altgrubunun

normal kapanışı nilpotent değilse Lemma 5.10 un hipotezini sağlamak için gerekirse $\bar{F}$ yerine sonlu üreteçli $\langle \bar{w}, \bar{U}, \bar{F} \rangle$ altgrubu alınırsa $\bar{F} \leq \langle \bar{w}, \bar{U}, \bar{F} \rangle$ olduğundan ve $\bar{F}$ nin normal kapanışı nilpotent olmadığından $\langle \bar{w}, \bar{U}, \bar{F} \rangle$ nin normal kapanışı nilpotent değildir ve böylece $W^*(\bar{w}, \bar{U}) \neq \{1\}$ dir. O halde $Z(\bar{G}) \neq 1$ ve G nin her F altgrubu için $\bar{F}$ nin $\bar{G}$ deki normal kapanışı nilpotenttir. Böylece Lemma 2.72 den $\bar{G}$ bir Fitting p -gruptur. Ayrıca Teorem 1.3 ten $Z(\bar{G})$ aşık olmayan bir lokal devirli gruptur.

(b) nin ispatını tamamlamak için $\bar{G}$ nin bir homomorfik görüntüsünün varlığını göstermek yeterlidir öyle ki bu homomorfik görüntünün her homomorfik görüntüsü merkezinde olmayan elemanlar için $(*)$ -üçlüsüne sahip değildir. Önceki paragraftan $\bar{G}$ bir mükemmel Fitting p -gruptur. Kabul edelim ki eğer mümkünse $\bar{G}$ nin bir H homomorfik görüntüsü olsun öyle ki H nin her homomorfik görüntüsünün, merkezinde olmayan elemanlara göre $(*)$ -üçlüsü olan bir homomorfik görüntüsü olsun. O zaman özel olarak H , $w_H \notin H \setminus Z(H)$ olmak üzere (w_H, V_H, L_H) $(*)$ -üçlüsüne sahiptir. Genelliği bozmadan $H = G$ kabul edilebilir.

(w, V, L) üçlüsü $w \notin Z(G)$ olmak üzere G için bir $(*)$ -üçlüsü olsun. Ayrıca yukarıdaki kabulden G nin her homomorfik görüntüsünün merkezde olmayan elemanları için $(*)$ -üçlüsüne sahip bir homomorfik görüntüsü vardır. G Teorem 1.1(a) nin hipotezini sağlar ve (w, V, L) $(*)$ -üçlüsüne göre Teorem 1.1(a) nin ispatındaki gibi devam edilirse G nin bir mükemmel grup olmadığı dolayısıyla çözülebilir olduğu elde edilir ki bu bir çelişkidir. O halde G nin bir K homomorfik görüntüsü vardır öyle ki K nin hiçbir homomorfik görüntüsü merkezde olmayan elemanlara göre $(*)$ -üçlüsüne sahip değildir. Ayrıca ispatın ilk kısmından $Z(K)$ nin aşık olmadığı ve lokal devirli olduğu kabul edilebilir. Böylece (b) sağlanıp ispat tamamlanmış olur. $\square$

Sonuç 1.5 in İspatı

Kabul edelim ki G çözülebilir olmasın. O zaman Önerme 3.2 den G bir mükemmel lokal sonlu MNS- p -gruptur. Teorem 1.4(b) den G nin Fitting grup olan bir H homomorfik görüntüsü vardır ve H nin her homomorfik görüntüsünün merkezinde olmayan elemanlara göre $(*)$ -üçlüsü olmadığından özel olarak H nin da merkezinde olmayan elemanlara göre $(*)$ -üçlüsü yoktur ve Lemma 5.1, Lemma 5.6 den H nin $w_H \notin Z(H)$ için bir (w_H, V_H) dominant ikilisi vardır. İspat sadeliği için $H = G$ ve G nin bir Fitting grup olduğu ve $w \notin Z(G)$ olacak şekilde bir (w, V) dominant ikilisine sahip olduğu kabul edilebilir. G

sayılabilir sonsuz olduğundan Önerme 3.2 de tanımlandığı şekilde her $i \geq 1$ için N_i , G nin bir sonlu altgrubunun normal kapanışı ve $N_i \leq N_{i+1}$ olmak üzere

$$G = \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$$

dir. Bir $i \geq 1$ için $M = N_i$ olsun. Hipotezden M residually sonlu olduğundan Lemma 2.79 dan

$$M = M_1 \geq M_2 \geq M_3 \geq \dots$$

olacak şekilde M nin normal altgruplarının azalan bir zinciri vardır öyle ki her $j \geq 1$ için M/M_j bir sonlu p -grup ve $\bigcap_{j=1}^{\infty} M_j = 1$ dir. Bu durumda Lemma 4.7 nin ispatındaki gibi V sonlu olduğundan

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} VM_j = V$$

dir. Bu durumda bir $j \geq 1$ için $w \notin VM_j$ dir. O halde $VM_j \leq E$ olacak şekilde bir $E \in E^*(w, V)$ vardır. V sonlu üreteçli olduğundan $V < G$ dir ve böylece V çözülebilirdir. $t = d(V)$ olsun. (w, V) ikilisi bir dominant ikili olduğundan $t = d(E)$ ve $M_j \leq E$ olduğundan $d(M_j) \leq t$ dir. $|M : M_j| < \infty$ olduğundan Lemma 2.51 den $d(M^*) \leq t^2$ olacak şekilde M nin bir sonlu indeksli M^* karakteristik altgrubu vardır. G bir mükemmel grup olduğundan G/M^* mükemmeldir ve M/M^* , G/M^* in sonlu normal altgrubu olduğundan Lemma 2.44 den M/M^* abelyandır. Böylece Lemma 2.37 dan $M' \leq M^*$ ve $d(M^*) \leq t^2$ olduğundan $d(M') \leq t^2$ dir. O zaman $d(M) \leq t^2 + 1$ dir. Böylece her $i \geq 1$ için $d(N_i) \leq t^2 + 1$ ve $\bigcup_{i=1}^{\infty} N_i = G$ olduğundan $d(G) \leq t^2 + 1$ dir. O halde G çözülebilir olur ki bu kabul ile çelişir. O halde kabul yanlış olup G çözülebilirdir. $\square$

5.11. Lemma

G bir periyodik sonsuz üreteçli MNS- p -grup ve $w \notin Z(G)$ olacak şekilde (w, V) ikilisi G için bir seçkin ikili olsun. Aşağıdakiler sağlanır.

- (a) $X = \{E \in E^*(w, V) \mid C_G(E) \leq Z(G)\}$ ise $|X|$ sonsuzdur.
 (b) $Y = \{E \in E^*(w, V) \mid E \text{ hipermerkez de\u011fil}\}$ ise $\langle Y \rangle = G$ ve $|Y|$ sonsuzdur.

İspat

(a) İlk olarak $X \neq \emptyset$ oldu\u011fu g\u00f6sterilmelidir. (w, V) ikilisi bir se\u00e7kin ikili oldu\u011fundan w i\u00e7in G ye g\u00f6re $(*)$ -\u00fc\u00e7l\u00fcs\u00fc yoktur. O zaman bir $y_0 \in G \setminus Z(G)$ vardır \u00f6yle ki $w \notin \langle V, y_0 \rangle$ dir. $C = C_G(y_0)$ olsun. O halde $y_0 \notin Z(G)$ oldu\u011fundan $C \neq G$ dir. G sayılabilir sonsuz oldu\u011fundan $C \setminus Z(G) = \{c_1, c_2, \dots, c_n, \dots\}$ k\u00fcmesinin sonsuz \u00e7oklukta elemanı vardır. Ger\u00e7ekten \u00d6nerme 3.2 den G lokal sonludur. B\u00f6ylece G lokal nilpotent p -gruptur. G MNS-grup oldu\u011fundan Chernikov grup de\u011gildir. Ayrıca $C_G(y_0) = C_G(\langle y_0 \rangle)$ oldu\u011fundan Lemma 2.73 ten $|C|$ sonsuzdur. Kabul edelim ki $C \setminus Z(G)$ sonlu olsun. O zaman $Z(G)$ sonsuzdur. Ancak $y_0 \in C \setminus Z(G)$ i\u00e7in $|y_0 Z(G)|$ sonsuz ve her $x \in y_0 Z(G)$ i\u00e7in $x \in C \setminus Z(G)$ oldu\u011fundan $|C \setminus Z(G)|$ sonsuz olur ki bu kabul ile \u00e7eli\u015fir. Dolayısıyla $|C \setminus Z(G)|$ sonsuzdur. Her $i \geq 1$ i\u00e7in $C_i = C_G(c_i)$ olsun. O zaman her $i \geq 1$ i\u00e7in $c_i \notin Z(G)$ oldu\u011fundan $C_i \neq G$ dir. G nin w i\u00e7in $(*)$ -\u00fc\u00e7l\u00fcs\u00fc olmadı\u011fından $y_1 \in G \setminus C_1$ vardır \u00f6yle ki $w \notin \langle V, y_0, y_1 \rangle$ dir. Benzer \u015fekilde aynı nedenden dolayı $y_2 \in G \setminus C_2$ vardır \u00f6yle ki $w \notin \langle V, y_0, y_1, y_2 \rangle$ dir. Aynı i\u015lem benzer \u015fekilde sonsuz kez tekrarlanırsa her $i \geq 1$ i\u00e7in $w \notin \langle V, y_0, y_1, \dots, y_i \rangle$ olacak \u015fekilde G nin $y_0, y_1, \dots$ elemanlarının sonsuz bir dizisi elde edilir.

$$R = \bigcup_{i=0}^{\infty} \langle V, y_0, y_1, \dots, y_i \rangle$$

olsun. O zaman $V \leq R$ ve $w \notin R$ oldu\u011fundan $R \leq E$ olacak \u015fekilde bir $E \in E^*(w, V)$ vardır. \u015imdi e\u011fer bir $c \in C_G(E) \setminus Z(G)$ varsa $C_G(E) \leq C_G(y_0)$ oldu\u011fundan $c \in C$ dir. B\u00f6ylece bir $i \geq 1$ i\u00e7in $c = c_i$ olup $y_i \in R \leq E$ oldu\u011fundan $c_i y_i = y_i c_i$ dir. Fakat $y_i \in G \setminus C_i$ oldu\u011fundan $c_i y_i \neq y_i c_i$ olur ki bu bir \u00e7eli\u015kidir. O halde $C_G(E) \leq Z(G)$ dir ve b\u00f6ylece $X \neq \emptyset$ dir.

$E_1 \in X$ olsun. Lemma 3.5 ten $E(w, V) = \bigcup_{E \in E^*(w, V)} E$ oldu\u011fundan Lemma 5.3 ten $\langle E^*(w, V) \rangle = G$ dir. O zaman $w \notin E_1$ oldu\u011fundan $E \neq E_1$ olacak \u015fekilde bir $E \in E^*(w, V)$ vardır. $y_1 \in E \setminus E_1$ olsun. $y_1 \in E$ ve $V \leq E$ oldu\u011fundan $\langle V, y_1 \rangle \leq E$ ve $w \notin E$ oldu\u011fundan $w \notin \langle V, y_1 \rangle$ dir. w i\u00e7in G nin $(*)$ -\u00fc\u00e7l\u00fcs\u00fc olmadı\u011fından Lemma 5.1 den $\langle V, y_1 \rangle \leq U$ olacak \u015fekilde G nin bir sonlu U altgrubu i\u00e7in (w, U) se\u00e7kin ikilisi vardır. Lemma 5.2 den $V \leq U$ oldu\u011fundan $E^*(w, U) \subseteq E^*(w, V)$ dir. İspatın ilk kısmındaki gibi (w, U) ikilisi G i\u00e7in se\u00e7kin

ikili olduğundan $C_G(E_2) \leq Z(G)$ olacak şekilde $E_2 \in E^*(w, U)$ vardır. Ayrıca $y_1 \notin E_1$ ve $y_1 \in U$ olduğundan $E_1 \neq E_2$ dir. $E^*(w, U) \subseteq E^*(w, V)$ olduğundan $E_2 \in X$ dir. Bu paragrafın başından $E_2 \in X$ ve (w, U) seçkin ikilisi için devam edilirse $E_2 \neq E_3$ olacak şekilde $E_3 \in X$ elde edilir. Bu şekilde devam edilirse $|X|$ sonsuz olur.

(b) Kabul edelim ki eğer mümkünse $\langle Y \rangle \neq G$ ($\langle \emptyset \rangle = 1$) olsun. G bir MNS-grup olduğundan Sonuç 2.39 dan $\langle Y \rangle Z(G) \neq G$ dir. (w, V) ikilisi G için bir seçkin ikili olduğundan bir $y_0 \in G \setminus \langle Y \rangle Z(G)$ vardır öyle ki $w \notin \langle V, y_0 \rangle$ dir. $\bar{G} = G/Z(G)$ olsun. G bir mükemmel grup olduğundan Lemma 2.40 tan $Z(\bar{G}) = 1$ dir. $\bar{C}_0 = C_{\bar{G}}(\bar{y}_0)$ olsun. $\bar{y}_0 \neq 1$ ve $Z(\bar{G}) = 1$ olduğundan $\bar{C}_0 \neq \bar{G}$ dir. Burada ve her zaman $C_0, \bar{C}_0$ nin G içine ters görüntüsüdür. $w \notin \langle V, y_0 \rangle$, $V \leq \langle V, y_0 \rangle$ ve (w, V) ikilisi G için bir seçkin ikili olduğundan bir $y_1 \in G \setminus C_0$ vardır öyle ki $w \notin \langle V, y_0, y_1 \rangle$ dir. Ayrıca $[y_0, y_1] \notin Z(G)$ dir. Aksi halde $\bar{y}_1 \in \bar{C}_0$ olur ki bu $y_1 \in G \setminus C_0$ olmasıyla çelişir. $\bar{C}_1 = C_{\bar{G}}(\bar{[y_0, y_1]})$ olsun. $\bar{[y_0, y_1]} \neq 1$ olduğundan $\bar{C}_1 \neq \bar{G}$ dir. Böylece $C_1 < G$, $w \notin \langle V, y_0, y_1 \rangle$, $V \leq \langle V, y_0, y_1 \rangle$ ve (w, V) ikilisi G için bir seçkin ikili olduğundan bir $y_2 \in G \setminus C_1$ vardır öyle ki $w \notin \langle V, y_0, y_1, y_2 \rangle$ ve $[y_0, y_1, y_2] \notin Z(G)$ dir. Aksi halde $\bar{y}_2 \in \bar{C}_1$ olur ki bu $y_2 \in G \setminus C_1$ olmasıyla çelişir. Bu şekilde devam edilirse G nin $y_0, y_1, \dots$ elemanlarının sonsuz bir dizisi elde edilir öyle ki her $n \geq 0$ için

$$w \notin \langle V, y_0, y_1, \dots, y_n \rangle \text{ ve } [y_0, y_1, \dots, y_n] \notin Z(G)$$

dir. $V^* = \langle V, y_0, y_1, \dots \rangle$ olsun. Teorem 2.67 den V^* hipermerkez değildir. Ayrıca $w \notin V^*$ ve $V \leq V^*$ olduğundan $V^* \leq E$ olacak şekilde bir $E \in E^*(w, V)$ vardır. V^* hipermerkez olmadığından ve hipermerkez bir grubun her altgrubu hipermerkez olduğundan E hipermerkez değildir. Dolayısıyla $E \in Y$ dir. Böylece $y_0 \in E$ dir. Ancak $y_0 \in G \setminus \langle Y \rangle Z(G)$ olduğundan bu bir çelişkidir. O halde $\langle Y \rangle = G$ olmalıdır.

$\langle Y \rangle = G$ olduğundan Y boş kümeden farklıdır. Böylece bir $E_1 \in Y$ vardır. (a) nın ispatındaki gibi Lemma 3.5 ve Lemma 5.3 ten $E \neq E_1$ olacak şekilde bir $E \in Y$ vardır. $y_1 \in E \setminus E_1$ seçilirse (a) daki gibi $\langle V, y_1 \rangle \leq U$ olacak şekilde G nin bir (w, U) seçkin ikilisi vardır. Lemma 5.2 den $E^*(w, U) \subseteq E^*(w, V)$ olduğundan hipermerkez olmayacak şekilde bir $E_2 \in E^*(w, U)$ vardır. Aksi halde $Y = \emptyset$ ise Y kümesi (w, U) seçkin ikilisi için tanımlanırsa önceki paragraftan $\langle Y \rangle = G$ olması ile çelişilir. Ayrıca $y_1 \in E_2$ olduğundan $E_1 \neq E_2$ dir. Bu şekilde (a) daki gibi devam edilirse $|Y|$ sonsuz olur. $\square$

Sonuç 1.6 nin İspatı

Kabul edelim ki hipotezden G nin her H homomorfik görüntüsü için eğer (w_H, V_H) ikilisi H için bir seçkin ikili ise her $L \triangleleft H$ ve her $E \in E^*(w_H, V_H)$ için $C_{H/L}(EL/L) \neq 1$ olsun. Kabul edelim ki eğer mümkünse G çözülebilir olmasın. O zaman Teorem 1.4(b) uygulanırsa G Fitting grup olan bir lokal sonlu MNS- p -gruptur. Ayrıca $Z(G)$ nin aşıkâr olmayan bir lokal devirli grup olduğu ve G nin her K homomorfik görüntüsü için $K \setminus Z(K)$ nin elemanlarına göre $(*)$ -ikililerinin olmadığı kabul edilebilir. $\bar{G} = G/Z(G)$ olsun. G mükemmel grup olduğundan Lemma 2.40 tan $Z(\bar{G}) = 1$ dir. $1 \neq \bar{w} \in \bar{G}$ için Lemma 5.1 den $\bar{G}$ nin sonlu bir $\bar{V}$ altgrubu vardır öyle ki $(\bar{w}, \bar{V})$ ikilisi $\bar{G}$ için bir seçkin ikilidir. $Z(\bar{G}) = 1$ olduğundan Lemma 5.11(a) dan bir $\bar{E} \in E^*(\bar{w}, \bar{V})$ vardır öyle ki $C_{\bar{G}}(\bar{E}) = 1$ dir. Ancak hipotezden $\bar{G}$ bölüm grubu G nin bir homomorfik görüntüsü olduğundan $C_{\bar{G}}(\bar{E}) \neq 1$ olmalıdır ki bu bir çelişkidir. O halde G çözülebilirdir. $\square$

Sonuç 1.7 nin İspatı

G periyodikse Teorem 1.4 ten iddia sağlanır. Eğer G periyodik değilse Önerme 3.3 ten çözülebilirdir. $\square$

6. SONUÇ

A. O. Asar'ın “On infinitely generated groups whose proper subgroups are solvable” adlı makalesi boşluklar doldurulmaya çalışılarak daha kolay anlaşılır hale getirilmiştir. Teorem 1.1(a) farklı bir şekilde ispatlanmıştır. Ayrıca [27] düzeltmesi teze eklenmiştir.

Öz altgrupları çözülebilir olan sonsuz üreteçli grupların çözülebilir olup olmadığı henüz bilinmiyor. Bu çalışmanın en genel sonucu olarak grubun periyodik olduğu durumda “homomorfik görüntülerinin sonlu üreteçli altgruplarının normal kapanışları residually nilpotent” ek hipotezi ile birlikte grubun çözülebilirliği incelenmiştir (Teorem 1.4). Ayrıca Teorem 1.4 ve Sonuç 1.6 Kurovka' nın Notdefterindeki (Unsolved Problems in Group Theory by Khukhro and Mazurov) Problem 16.5 (b) ve (c) için kısmi cevaplardır.

KAYNAKLAR

1. Asar, A. O. (2014). On infinitely generated groups whose proper subgroups are solvable. *Journal of Algebra*, 399, 870-886.
2. Arikan, A. (2008). Characterization of minimal non-solvable Fitting p -groups. *Journal of Group Theory*, 11, 95-103.
3. Arikan, A. and Smith, H. (2011). On groups with all proper subgroups of finite exponent. *Journal of Group Theory*, 14, 1-11.
4. Arikan, A. and Arikan, A. (2012). On Fitting p -groups with all proper subgroups satisfying a commutator law. *Journal of Algebra*, 352, 341-345.
5. (a) Asar, A. O. (1997). Barely transitive locally nilpotent p -groups. *Journal of the London Mathematical Society*, 55(2), 357-362; (b) Asar, A. O. (2000). Corrigendum to "Barely transitive locally nilpotent p -groups". *Journal of the London Mathematical Society*, 61(2), 315-318.
6. Asar, A. O. (2000). Locally nilpotent p -groups whose proper subgroups are hypercentral or nilpotent-by-Chernikov. *Journal of the London Mathematical Society*, 61(2), 412-422.
7. Badis, A. and Trabelsi, N. (2011). Groups whose proper subgroups are Baer-by-Chernikov or Baer-by-(finite rank). *Central European Journal of Mathematics*, 9(6), 1344-1348.
8. Belyaev, V. V. (1980). Minimal-non-FC-groups. *All-Union Symposium on Group Theory*, Kiev, 97-102 (in Russian).
9. Belyaev, V. V. and Kuzucuoglu, M. (2003). Locally finite barely transitive groups. *Algebra and Logic*, 42(3), 147-152.
10. Cutolo, M. and Smith, H. (2012). Locally finite groups with all subgroups either subnormal or nilpotent-by-Chernikov. *Central European Journal of Mathematics*, 10(3), 942-949.
11. Hartley, B. (1974). On the normalizer condition and barely transitive permutation groups. *Algebra and Logic*, 13, 334-340.
12. Kegel, O. H., Wehrfritz, B. A. F. (1973). *Locally Finite Groups*. Amsterdam: North-Holland.
13. Khukhro, E. I., Makarenko and Yu, N. (2007). Large characteristic subgroups satisfying multilinear commutator identities. *Journal of the London Mathematical Society*, 75(2), 634-646.
14. Kuzucuoglu, M. (1990). Barely transitive permutation groups. *Archiv der Mathematik*, 55, 521-532.

15. Kuzucuoglu, M. and Phillips, R. E. (1989). Locally finite minimal non-FC-groups. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 105, 417-420.
16. Lennox, J. C., Robinson, D. J. S. (2004). *The Theory of Infinite Soluble Groups*. Oxford: Clarendon Press.
17. Martinelli, A. (2010). Hypercentral groups with all subgroups subnormal. *Journal of Group Theory*, 13, 743–757.
18. Möhres, W. (1989). Torsionsgruppen deren Untergruppen alle subnormal sind. *Geometriae Dedicata*, 31, 237–244.
19. Möhres, W. (1989). Torsionsfreie gruppen deren Untergruppen alle subnormal sind. *Mathematische Annalen*, 284, 245–249.
20. Ol'shanskii, Yu. (1991). *Geometry of Defining Relations in Groups*. Kluwer Academic Publishers.
21. Robinson, D. J. S. (1972). *Finiteness Conditions and Generalized Solvable Groups*. New York: Springer, Parts I, II.
22. Robinson, D. J. S. (1980). *A Course in the Theory of Groups*. New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag.
23. Tomkinson, M. J. (1984). *FC-Groups*. Boston, London, Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program.
24. Asar, A. O. (2009). *Cebir*. Ankara: Eflatun.
25. Hungerford, T. W. (1974). *Algebra*. New York: Springer-Verlag.
26. Casolo, C. (2008). Groups with all subgroups subnormal. *Note di Matematica*, 28, 1-149.
27. Asar, A. O. (in press). Corrigendum: On infinitely generated groups whose proper subgroups are solvable. *Journal of Algebra*.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : ALKIŞ, Oğuz
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 07/04/1990, Ankara
Medeni hali : Bekar
Telefon : 0 (545) 306 74 91
e-mail : oguzalks@gmail.com



Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Lisans	Ankara Üniversitesi /Matematik Bölümü	2013
Lise	Kazan Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi	2008

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

1. Arıkan, A. ve Alkış, O., *Öz Altgrupları Çözülebilir Olan Sonsuz Üreteçli Gruplar*, 28. Ulusal Matematik Sempozyumu, Akdeniz Üniversitesi, 7-9 Eylül 2015.



GAZİ GELECEKTİR...