



BERNOULLİ POLİNOMLARININ GENELLEŞTİRMELERİ VE
FİBO-BERNOULLİ MATRİSLER

Semra KUŞ

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OCAK 2020

Semra KUŞ tarafından hazırlanan "BERNOULLİ POLİNOMLARININ GENELLEŞTİRMELERİ VE FİBO-BERNOULLİ MATRİSLER" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalında DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Naim TUĞLU

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Başkan: Prof. Dr. Dursun TAŞCI

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Doç. Dr. Miraç ÇETİN

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Prof. Dr. E. Gökçen KOÇER

Matematik Ana Bilim Dalı, Konya Necmettin Erbakan Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Prof. Dr. Şerife BÜYÜKKÖSE

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Tez Savunma Tarihi: 15/01/2020

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Doktora Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Prof. Dr. Sena YAŞYERLİ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Semra KUŞ

15/01/2020

BERNOULLİ POLİNOMLARININ GENELLEŞTİRMELERİ VE FİBO-BERNOULLİ MATRİSLER

(Doktora Tezi)

Semra KUŞ

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ocak 2020

ÖZET

Bu tezde, Bernoulli F -polinomları için yeni bir F -üstel üreteç fonksiyon ve Bernoulli F -polinomlarının çeşitli özellikleri elde edildi. Euler-Fibonacci sayıları ve polinomları tanımlanarak, bu polinomların F -üstel üreteçleri bulundu. Ayrıca Euler-Fibonacci sayılarının ve polinomlarının Bernoulli F -polinomları ile ilişkisi gösterildi. Ardından harmonik tabanlı F -üstel fonksiyon tanımlandı. Bernoulli F -polinomları, Euler-Fibonacci sayıları, Euler-Fibonacci polinomları ve Bernoulli-Fibonacci sayılarının harmonik tabanlı F -üstel üreteçleri tanımlandı ve bu polinomların harmonik Fibonacci sayıları ve polinomları ile ilişkisi gösterildi. Bernoulli F -polinomlarından yararlanarak Fibo-Bernoulli matrisi tanımlandı. Genelleştirilmiş Fibo-Pascal matrisinin fibonomial katsayılı özel bir matris ile çarpanlaması yapılarak Fibo-Bernoulli matris elde edildi. Ayrıca Fibo-Bernoulli matrisinin tersi bulundu. Son olarak Fibo-Euler matrisi tanımlanarak, bu matrisin Fibo-Bernoulli matrisi ile ilişkisi gösterildi.

Bilim Kodu : 20401

Anahtar Kelimeler : Bernoulli F -polinomları, Fibo-Bernoulli matrisleri, Fibonomial katsayılar

Sayfa Adedi : 67

Danışman : Prof. Dr. Naim TUĞLU

GENERALIZATIONS OF BERNOULLI POLYNOMIALS AND FIBO-BERNOULLI MATRICES

(Ph. D. Thesis)

Semra KUŞ

GAZİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

January 2020

ABSTRACT

In this thesis, a new F-exponential generating function for Bernoulli F -polynomials and various properties of Bernoulli F -polynomials are obtained. By identifying Euler-Fibonacci numbers and polynomials, F-exponential generating function of these polynomials are found. In addition, the relationship of Euler-Fibonacci numbers and polynomials with Bernoulli F -polynomials is shown. Then, harmonic based F-exponential function is defined. Harmonic based F-exponential generating function is defined for Bernoulli F -polynomials, Euler-Fibonacci numbers, Euler-Fibonacci polynomials and Bernoulli-Fibonacci numbers, and their relations are shown with harmonic Fibonacci numbers and polynomials. The Fibo-Bernoulli matrix is defined using Bernoulli F -polynomials. The generalized Fibo-Pascal matrix is multiplied by a special matrix with fibonomial coefficient to obtain the Fibo-Bernoulli matrix. Also the inverse of the Fibo-Bernoulli matrix is found. Finally, Fibo-Euler matrices are defined and their relation with Fibo-Bernoulli matrix is shown.

Science Code : 20401

Key Words : Bernoulli F -polynomials, Fibo-Bernoulli matrices, Fibonomial coefficients

Page Number : 67

Supervisor : Prof. Dr. Naim TUĞLU

TEŞEKKÜR

Doktora çalışmam süresince değerli katkılarıyla beni yönlendiren, yakın ilgi ve desteğini esirgemeyen ve her safhasında bilgisine başvurduğum Sayın Hocam Prof. Dr. Naim TUĞLU'ya, eğitim süresince ilgi ve yardımlarını esirgemeyen, tecrübelerinden faydalandığım değerli hocalarım Sayın Prof. Dr. Dursun TAŞÇI'ya, Doç. Dr. Miraç ÇETİN'e ve çok kıymetli arkadaşım Doç. Dr. Can KIZILATEŞ'e teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Ayrıca bugünlere gelmemde büyük emekleri olan ilk matematik öğretmenim babam Bekir YILDIRIM'a, annem Ayşe YILDIRIM'a, hayatımın her aşamasında sabır ve manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan eşim Zekeriya KUŞ'a ve kızım Özgü KUŞ'a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ÇİZELGELERİN LİSTESİ	viii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR	x
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR	5
2.1. Fibonomial Katsayılar	5
2.2. Bernoulli-Fibonacci Polinomları ve Bernolli F -Polinomları	8
2.3. Bernoulli F -Polinomlarının Bazı Özellikleri	14
2.4. Euler-Fibonacci Polinomları	21
2.5. Euler-Fibonacci Polinomları ile Bernoulli F -Polinomlarının İlişkisi	26
3. HARMONİK FİBONACCİ POLİNOMLAR	31
3.1. Harmonik Fibonacci Polinomlarının, Bernoulli F -Polinomları ile İlişkisi	31
3.2. Harmonik Fibonacci Polinomlarının Euler-Fibonacci Polinomları ve Bernoulli-Fibonacci Polinomları ile İlişkisi	42
4. BAZI ÖZEL MATRİSLER	49
4.1. Fibo-Bernoulli Matrisler	49
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	61
KAYNAKLAR	63
ÖZGEÇMİŞ	67

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge		Sayfa
Çizelge 2.1.	Bernoulli polinomları, Bernoulli-Fibonacci polinomları ve sayıları	11
Çizelge 2.2.	Bernoulli F –polinomları	12
Çizelge 2.3.	Euler polinomları, Euler-Fibonacci polinomları ve sayıları	25
Çizelge 3.1.	Harmonik polinomlar ve harmonik sayılar	32
Çizelge 3.2.	Harmonik Fibonacci polinomları ve harmonik Fibonacci sayıları .	36
Çizelge 3.3.	Çeşitli polinom ve sayıların harmonik tabanlı F –üstel üreteçleri .	48

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.1. $B_{n,F}(x)$, $B_n^F(x)$ ve $B_n(x)$ polinomlarının grafikleri.	13

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
F_n	n . Fibonacci Sayısı
$F_n!$	F –faktöriyel
$\binom{n}{k}_F$	Fibonomial Katsayısı
e_F^t	F –üstel Fonksiyon
∂_F	F –Türev
B_n	Bernoulli Sayısı
$B_n(x)$	Bernoulli Polinomu
B_n^F	Bernoulli-Fibonacci Sayısı
$B_n^F(x)$	Bernoulli-Fibonacci Polinomu
$B_{n,F}(x)$	Bernoulli F –Polinomu
E_n	Euler Sayısı
$E_n(x)$	Euler Polinomu
$E_{n,F}$	Euler-Fibonacci Sayısı
$E_{n,F}(x)$	Euler-Fibonacci Polinomu
h_n	n . Harmonik Sayı
$H_n(x)$	Harmonik Polinom
$\mathbb{F}_n$	Harmonik Fibonacci Sayısı
$\mathbb{F}_n(x)$	Harmonik Fibonacci Polinomu
$\Phi_F(z)$	Harmonik Fibonacci Vakum Operatörü
$e^{\hat{h}t}$	Harmonik Tabanlı Üstel Fonksiyon
$\mathcal{P}_n(x, F)$	Genelleştirilmiş Fibo-Pascal Matrisi
$\mathcal{B}_n(x, F)$	Fibo-Bernoulli Matrisi
$\mathcal{D}_n(x, F)$	Fibo-Bernoulli Matrisinin Tersi
$\mathcal{W}_n$	Fibonomial Katsayılı Matris
$\mathcal{E}_n(x, F)$	Fibo-Euler Matrisi

1. GİRİŞ

İlk kez İsviçreli matematikçi Jakobs Bernoulli tarafından (1654-1705) yıllarında tanımlanan Bernoulli sayıları günümüze kadar bir çok bilim insanının ilgi odağı olmuş ve çeşitli özellikleri incelenmiştir. Onun bu çalışmaları 1713 yılında *Ars Conjectandi* adlı kitabında yayınlanmıştır [1].

Bernoulli sayılarından yararlanarak Bernoulli polinomları ve bu polinomların çeşitli özellikleri elde edilmiştir.

Nörlund, 1924 yılındaki çalışmasında Bernoulli polinomlarını tanımlamıştır [2].

S.Roman, Bernoulli sayılarının ve Bernoulli polinomlarının üreteç fonksiyonunu elde etmiştir [3].

İlk olarak Carlitz 1948 yılındaki çalışmasında q -Bernoulli sayıları ve q -Bernoulli polinomlarını tanımlamıştır [4].

Al-Salam 1959 yılında q -Bernoulli sayıları ve q -Bernoulli polinomlarının bir takım özelliklerini bularak reküranslar elde etmiştir [5].

Son yıllarda ise q -analiz ve q -kalkülüs hesaplamalarla Bernoulli sayılarının ve polinomlarının q -benzerleri tanımlanarak, üreteç fonksiyonları elde edilmiştir [6].

Hegazi q -Bernoulli polinomları ve q -gamma fonksiyonu arasındaki bağıntıyı elde etmiştir [7].

T. Kim ve arkadaşları q -Bernoulli sayıları ve q -Bernoulli polinomlarının q -umbral hesaplamalarını yapmıştır ve genelleştirilmiş Bernoulli sayılarını ve Bernoulli polinomlarını tanımlamıştır [8, 9]. Ayrıca q -Euler sayıları ve q -Euler polinomları üzerine çalışmalar yapmışlardır [10].

Srivastava 2004 yılındaki çalışmasında Bernoulli ve Euler polinomları arasındaki ilişkiyi elde etmiştir [11].

Çatma ise 2013 yılındaki lisansüstü tezinde Bernoulli ve Euler Polinomlarını inceleyerek çeşitli bağıntılar elde etmiştir [12].

Bernoulli sayıları ve Bernoulli polinomları matris teori ve sayılar teorisinin de ilgi odağı

olmuş, ilerleyen zamanlarda elemanları bu özel sayılar ve polinomlar olan çeşitli matrisler tanımlanmıştır.

Zhang, Bernoulli sayıları ve Bernoulli polinomlarından yararlanarak Bernoulli matrislerini tanımlamış, bu matrislerin ters matrisini elde etmiştir [13]. Ayrıca Bernoulli matrislerinin Pascal ve Fibonacci matrisleri ile ilişkilerini elde etmiştir ve genelleştirilmiş Pascal matrisini tanımlamıştır [13, 14].

2008 de Ernst, yapmış olduğu çalışmalarda q -Bernoulli ve q -Pascal matrislerini tanımlamıştır [15, 16]. Ayrıca Zheng, Pascal matrisinin q -analoğu üzerine çalışmalar yapmıştır [17].

Tuğlu ve Kuş ise 2015 yılında Hegazi'nin tanımlamış olduğu q -Bernoulli sayılarını kullanarak, q -Bernoulli matrislerini tanımlamışlar, bir takım özelliklerini elde etmişler ve q -Pascal matrisleri ile faktörizasyonunu yapmışlardır [18].

Bernoulli sayıları, Bernoulli polinomları, Bernoulli matrisleri ve bunların q -benzerleri; Euler sayıları, Euler polinomları, Euler matrisi ve Pascal matrisi gibi özel matrisler ve polinomlar ile birlikte incelenerek çeşitli uygulamaları yapılmıştır [12, 19–25].

Quintana ve arkadaşları genelleştirilmiş Euler matrislerini tanımlamışlardır ve çeşitli özelliklerini incelemişlerdir [26]. Ayrıca Euler polinom matrisinin, Stirling matrisi ile faktörizasyonunu yapmışlardır.

Infante 2017 deki çalışmasında Bernoulli, Euler ve Fibonacci matrislerinin q -benzerlerini elde etmiştir [27].

Tuğlu ve Koçer, Fibonomiyel katsayılar yardımıyla genelleştirilmiş Fibo-Pascal matris tanımlayarak Fibonomiyel katsayılı Pascal matrisi ile ilgili özellikler vermişlerdir [28].

Krot, Fibonomiyel katsayıları kullanarak Bernoulli F -polinomlarını tanımlamıştır [29]. Rota'nın Ψ -genişletilmiş sonlu operatör hesaplaması olan Fibonomial kalkülüsün temel tanım ve teoremlerini vermiştir [29].

Kwasniewski, Fibonomial katsayılar için inversion formülü üzerine çalışmalar yapmıştır [30].

Özvatan ve Pashaev, fibonomial katsayılar kullanarak Altın-Fibonacci hesaplamaları ve uygulamalarını yapmışlar, Altın (golden) türev ve Altın üstel fonksiyon

kavramlarını tanımlamıştır. Ayrıca Altın üstel fonksiyondan yararlanarak, Bernoulli-Fibonacci sayıları ve Bernoulli-Fibonacci polinomlarını tanımlamış ve bunların F -üstel üreteçlerini elde etmişlerdir [31, 32].

Dattoli, harmonik sayılar ve harmonik polinomlar üzerine çalışmalar yapmış, harmonik sayıları ve harmonik polinomları vakum yükseltme (vacuum shift) operatör yardımı ile tanımlayarak, harmonik tabanlı üstel üreteç fonksiyonlarını elde etmiştir [33, 34].

Cvijovic, 2010 daki çalışmasında harmonik sayıları içeren üreteç fonksiyonlar ile ilgili araştırmalar yapmıştır [35].

Mezö, 2011 yılında yapmış olduğu çalışmasında q -harmonik sayıların üç farklı tanımını yapmıştır ve genelleştirmelerini elde etmiştir [36].

Tuğlu ve arkadaşları harmonik ve hiperharmonik Fibonacci sayılarını tanımlamışlardır [37]. Fark operatörü metodunu kullanarak harmonik Fibonacci sayılarını içeren çeşitli toplamalar elde etmişlerdir. Elemanları harmonik ve hiperharmonik Fibonacci sayıları olan circulant matrisleri üzerinde Euclid normunu ve spektral normu hesaplamışlardır.

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde Fibonacci sayılarının tanımı verilerek, Fibonomial katsayıların özelliklerine değinilmiştir. F -türev tanımı verilerek, F -integral tanımlanmıştır. Literatürde var olan çeşitli özel sayıların ve polinomların tanımları verilerek, Krot tarafından tanımlanan Bernoulli F -polinomlarının F -üstel üretici ve çeşitli özellikleri elde edilmiştir. Ayrıca Euler sayılarının ve Euler polinomlarının tanımına benzer şekilde Euler-Fibonacci sayıları, Euler-Fibonacci polinomları ve onların F -üstel üreteçleri tanımlanmıştır. Bernoulli F -polinomlarının Euler-Fibonacci sayıları ve Euler-Fibonacci polinomları ile ilişkisi incelenerek çeşitli rekürans bağıntıları elde edilmiştir.

Bir sonraki aşamada ise harmonik Fibonacci sayılarının ve harmonik Fibonacci polinomlarının Bernoulli F -polinomları ile ilişkisi gösterilmiştir. Bernoulli F -polinomları F -integral yardımıyla tekrar edilmiştir. Ayrıca harmonik Fibonacci sayılarının ve harmonik Fibonacci polinomlarının, harmonik tabanlı F -üstel üreteçleri elde edilmiştir. Euler-Fibonacci polinomları, Euler-Fibonacci sayıları ve Bernoulli Fibonacci polinomlarının harmonik tabanlı F -üstel üreteçleri bulunmuştur.

Bu çalışmanın son bölümünde ise elemanları Bernoulli F -polinomları olan Fibo-Bernoulli matrisleri tanımlanmıştır. Ayrıca Fibonomial katsayılı özel bir matris tanımlanarak, bu özel matrisin ve Fibo-Pascal matrisinin Fibo-Bernoulli matrisi ile faktörizasyonu yapılmıştır. Fibo-Bernoulli matrisinin ters matrisi elde edilmiştir.

Fibo-Euler matrisi tanımlanarak, bu matrisin Fibo-Bernoulli matrisi ile ilişkisi gösterilmiştir.

Bu çalışmanın amacı Bernoulli F -polinomlarının literatürde var olan bazı polinomlar ile ilişkisini göstererek, tanımladığımız Fibo-Bernoulli matrislerinin özelliklerini elde ederek ayrıntılı bir biçimde incelemektir.

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmamız boyunca kullanacağımız fibonomial katsayıların tanımından ve bazı temel özelliklerinden bahsedeceğiz. [29, 31] de tanımlanan F -türev tanımını vereceğiz. Ayrıca [38] deki (p, q) -integralinden yararlanarak F -integral tanımlayacağız.

2.1. Fibonomial Katsayılar

2.1. Tanım

$\{F_n\}_{n \geq 0}$ Fibonacci dizisi, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ başlangıç şartları olmak üzere $n \geq 2$ için

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

rekürans bağıntısı ile tanımlıdır.

F -faktöriyel, $F_0! = 1$ olmak üzere

$$F_n! = F_n \cdot F_{n-1} \cdot F_{n-2} \cdots F_1$$

şeklinde tanımlanır.

F_n , n -inci Fibonacci sayısını göstermek üzere $n \geq k$ doğal sayıları için Fibonomial katsayılar

$$\binom{n}{k}_F = \frac{F_n!}{F_{n-k}! F_k!} \quad (2.1)$$

ve

$$\binom{n}{0}_F = \binom{n}{n}_F = 1, \quad n < k \text{ için } \binom{n}{k}_F = 0$$

şeklinde tanımlıdır.

Fibonomial katsayıların bazı özellikleri aşağıdaki gibidir:

$$\binom{n}{k}_F = F_{k+1} \binom{n-1}{k}_F + F_{n-k-1} \binom{n-1}{k-1}_F \quad (2.2)$$

$$\binom{n}{k}_F = \binom{n}{n-k}_F \quad (2.3)$$

$$\binom{n}{k}_F \binom{k}{j}_F = \binom{n}{j}_F \binom{n-j}{k-j}_F \quad (2.4)$$

e_F^t F -üstel fonksiyon

$$e_F^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{F_n!} \quad (2.5)$$

dir.

Gauss Binom formülünün F -benzeri yani F -binomial açılımı

$$(x +_F y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_F x^k y^{n-k} \quad (2.6)$$

şeklinde tanımlanır [29].

2.2. Tanım

$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere, $f(x)$ fonksiyonunun F -türevi

$$\partial_F f(x) = \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{(\alpha - \beta)x}$$

şeklinde tanımlıdır [31].

Özel olarak, $f(x) = x^n$ polinom fonksiyonu için F -türev

$$\partial_F (x^n) = F_n x^{n-1} \quad (2.7)$$

dir [29].

a bir sabit sayı olmak üzere

$$\partial_F (a \cdot f(x)) = a \cdot \partial_F f(x) \quad (2.8)$$

dir.

$f(x) = e_F^{xt}$ F -üstel fonksiyonu için F -türev tanımı uygulanırsa

$$\begin{aligned} \partial_F f(x) &= \frac{e_F^{\alpha xt} - e_F^{\beta xt}}{(\alpha - \beta)x} \\ &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x^n \frac{t^n}{F_n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n x^n \frac{t^n}{F_n!}}{(\alpha - \beta)x} \\ &= t \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^{n-1} \frac{t^{n-1}}{F_n!} \\ &= t \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1} x^n \frac{t^n}{F_{n+1}!} \\ &= t \sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{t^n}{F_n!} \\ &= t e_F^{xt} \end{aligned}$$

elde edilir.

2.3. Tanım

$f(x)$ bir fonksiyon olmak üzere (p, q) -integral

$$\int_0^1 f(x) d_{p,q}(x) = (p - q) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{q^i}{p^{i+1}} f\left(\frac{q^i}{p^{i+1}}\right), \quad \left|\frac{p}{q}\right| > 1 \quad (2.9)$$

dir [38].

(p, q) -integralde $p \rightarrow \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $q \rightarrow \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ seçilirse

$$\int_0^1 f(x) d_{\alpha, \beta}(x) = \int_0^1 f(x) d_F(x)$$

F -integral elde edilir. Böylece F -integral

$$\int_0^1 f(x) d_F(x) = (\alpha - \beta) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\beta^i}{\alpha^{i+1}} f\left(\frac{\beta^i}{\alpha^{i+1}}\right) \quad (2.10)$$

olarak tanımlanır.

Özel olarak Eş.2.10 da $f(x) = x^n$ yazıldığında

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^n d_F(x) &= (\alpha - \beta) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\beta^i}{\alpha^{i+1}} \left(\frac{\beta^i}{\alpha^{i+1}}\right)^n \\ &= (\alpha - \beta) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^{n+1}} \left(\frac{\beta^{n+1}}{\alpha^{n+1}}\right)^i \\ &= \frac{\alpha - \beta}{\alpha^{n+1}} \frac{1}{1 - \frac{\beta^{n+1}}{\alpha^{n+1}}} \\ &= \frac{\alpha - \beta}{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}} \\ &= \frac{1}{F_{n+1}} \end{aligned}$$

elde edilir.

2.2. Bernoulli-Fibonacci Polinomları ve Bernolli F -Polinomları

Bu bölümde Bernoulli sayıları ve Bernoulli polinomlarının tanımlarından bahsedeceğiz. Ardından sırası ile Bernoulli-Fibonacci sayıları, Bernoulli-Fibonacci polinomları ve Bernoulli F -polinomlarının tanımlarını vererek, bu polinomların bazılarını grafik üzerinde göstereceğiz. Ayrıca çalışmamızın ilerleyen bölümlerinde tanımlayacağımız fibonomial katsayılı özel polinomlar için, literatürde varolan bazı özel polinomların tanımlarını vereceğiz. Son olarak tanımlarını verdiğimiz bu sayılar ve polinomların üstel üreteçlerini tablo ile göstereceğiz.

2.4. Tanım

n negatif olmayan bir tamsayı ve $B_0 = 1$ olmak üzere, $n \geq 1$ için Bernoulli sayıları ve Bernoulli polinomları

$$B_n = -\frac{1}{(n+1)} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k \quad (2.11)$$

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k x^{n-k} \quad (2.12)$$

ile tanımlıdır [39].

$B_n(x)$ Bernoulli polinomlarının sabit terimleri, B_n Bernoulli sayılarıdır.

2.5. Tanım

$B_n^F(x)$ Bernoulli-Fibonacci polinomu

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n^F(x) \frac{t^n}{F_n!} = \frac{te_F^{tx}}{e_F^t - 1} \quad (2.13)$$

üstel üretici ile tanımlıdır [31].

$B_n^F(x)$ Bernoulli-Fibonacci polinomlarının sabit terimleri B_n^F Bernoulli-Fibonacci sayıları olup,

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n^F \frac{t^n}{F_n!} = \frac{t}{e_F^t - 1} \quad (2.14)$$

şeklindedir.

Bernoulli-Fibonacci sayılarının üstel üretici kullanılıp, gerekli düzenlemeler yapılırsa B_n^F Bernoulli-Fibonacci sayıları $B_0^F = 1$ ve $n \geq 1$ için

$$B_n^F = -\sum_{k=1}^n \frac{1}{F_{k+1}} \binom{n}{k}_F B_{n-k}^F \quad (2.15)$$

indirgeme bağıntısı elde edilir.

Örnek

$$\begin{aligned} B_1^F &= - \sum_{k=1}^1 \frac{1}{F_{k+1}} \binom{1}{k}_F B_{1-k}^F \\ &= - \frac{1}{F_2} \binom{1}{1}_F B_0^F \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_2^F &= - \sum_{k=1}^2 \frac{1}{F_{k+1}} \binom{2}{k}_F B_{2-k}^F \\ &= - \left(\frac{1}{F_2} \binom{2}{1}_F B_1^F + \frac{1}{F_3} \binom{2}{2}_F B_0^F \right) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_3^F &= - \sum_{k=1}^3 \frac{1}{F_{k+1}} \binom{3}{k}_F B_{3-k}^F \\ &= - \left(\frac{1}{F_2} \binom{3}{1}_F B_2^F + \frac{1}{F_3} \binom{3}{2}_F B_1^F + \frac{1}{F_4} \binom{3}{3}_F B_0^F \right) \\ &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

2.6. Tanım

B_n^F Bernoulli-Fibonacci sayıları olmak üzere,

$$B_n^F(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_F B_k^F x^{n-k} \quad (2.16)$$

ile tanımlı polinomlara Bernoulli-Fibonacci polinomları denir [31].

Bernoulli-Fibonacci polinomlarının sabit terimleri Bernoulli-Fibonacci sayılarıdır.

Çizelge 2.1. Bernoulli polinomları, Bernoulli-Fibonacci polinomları ve sayıları

n	$B_n(x)$	B_n	$B_n^F(x)$	B_n^F
0	1	1	1	1
1	$x - \frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$x - 1$	-1
2	$x^2 - x + \frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$x^2 - x + \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
3	$x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$	0	$x^3 - 2x^2 + x - \frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
4	$x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}$	$-\frac{1}{30}$	$x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x + \frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$
5	$x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x$	0	$x^5 - 5x^4 + \frac{15}{2}x^3 - 5x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{8}$	$-\frac{5}{8}$

2.7. Teorem

B_n^F Bernoulli-Fibonacci sayısı ve $\delta_{n,k}$ Kronecker fonksiyonu olmak üzere

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_F B_{n-k}^F \frac{1}{F_{k+1}} = \delta_{n,0} \quad (2.17)$$

dir.

İspat

$n = 0$ için

$$\binom{0}{0}_F B_0^F \frac{1}{F_1} = 1 = \delta_{0,0}$$

dır. $n \geq 1$ için Eş. 2.15 kullanılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_F B_{n-k}^F \frac{1}{F_{k+1}} &= \binom{n}{0}_F B_n^F \frac{1}{F_1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k}_F B_{n-k}^F \frac{1}{F_{k+1}} \\ &= - \sum_{k=1}^n \frac{1}{F_{k+1}} \binom{n}{k}_F B_{n-k}^F + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k}_F B_{n-k}^F \frac{1}{F_{k+1}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. $n \geq 1$ için $\delta_{n,0} = 0$ olup, böylece

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_F B_{n-k}^F \frac{1}{F_{k+1}} = \delta_{n,0}$$

elde edilir.

Bu teoremin q -benzeri, Kim [9] tarafından farklı yöntem ile ispatlanmıştır.

2.8. Tanım

F_n Fibonacci sayısı ve $\binom{n}{k}_F$ Fibonomial katsayılar olmak üzere

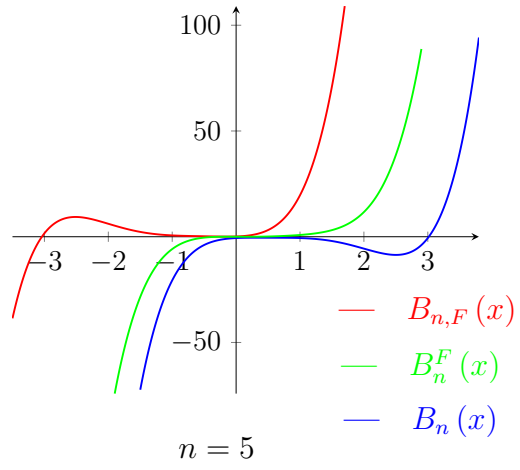
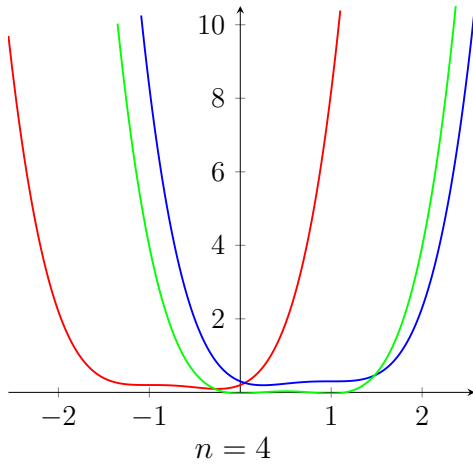
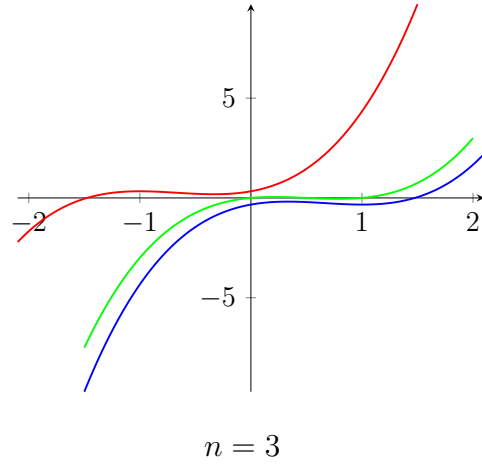
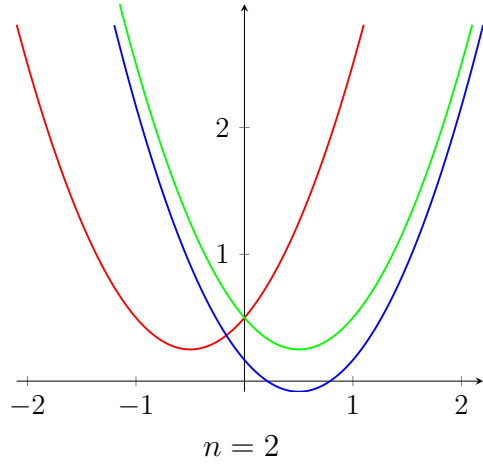
$$B_{n,F}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{F_{k+1}} \binom{n}{k}_F x^{n-k} \quad (2.18)$$

şeklinde tanımlı polinoma Bernoulli F -polinomu denir [29].

Çizelge 2.2. Bernoulli F -polinomları

n	$B_{n,F}(x)$	$\frac{1}{F_{n+1}}$
0	1	1
1	$x + 1$	1
2	$x^2 + x + \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
3	$x^3 + 2x^2 + x + \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
4	$x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + \frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
5	$x^5 + 5x^4 + \frac{15}{2}x^3 + 5x^2 + x + \frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
6	$x^6 + 8x^5 + 20x^4 + 20x^3 + 8x^2 + x + \frac{1}{13}$	$\frac{1}{13}$
7	$x^7 + 13x^6 + 52x^5 + \frac{260}{3}x^4 + 52x^3 + 13x^2 + x + \frac{1}{21}$	$\frac{1}{21}$

Aşağıdaki grafiklerde, Bernoulli polinomu, Bernoulli-Fibonacci polinomu ve Bernoulli F -polinomu arasındaki ilişki görülmektedir.



Şekil 2.1. $B_{n,F}(x)$, $B_n^F(x)$ ve $B_n(x)$ polinomlarının grafikleri.

2.3. Bernoulli F -Polinomlarının Bazı Özellikleri

Bu bölümde, Krot [29] tarafından tanımlanan $B_{n,F}(x)$ Bernoulli F -polinomlarının F -üstel üreticini elde edeceğiz. Ayrıca F -türevin tanımından yararlanarak $B_{n,F}(x)$ Bernoulli F -polinomlarının farklı bir tanımını yaparak, bazı özelliklerini göstereceğiz.

2.9. Teorem

$B_{n,F}(x)$ Bernoulli F -polinomunun F -üstel üretici

$$g(x) = \frac{e_F^{xt} (e_F^t - 1)}{t} \quad (2.19)$$

dir [40].

İspat

$B_{n,F}(x)$ Bernoulli F -polinomu ve F -üstel üreteç fonksiyon tanımları kullanılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} B_{n,F}(x) \frac{t^n}{F_n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{F_{k+1}} \binom{n}{k}_F x^{n-k} \right) \frac{t^n}{F_n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{F_{k+1}!} \frac{x^{n-k}}{F_{n-k}!} \right) t^n \\ &= \frac{1}{t} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{F_{n+1}!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{t^n}{F_n!} \right) \\ &= \frac{1}{t} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{t^n}{F_n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{F_n!} - 1 \right) \\ &= \frac{e_F^{xt} (e_F^t - 1)}{t} \end{aligned}$$

elde edilir.

2.10. Teorem

$B_{n,F}(x)$ Bernoulli F -polinomu ve

$$B_{n,F}(x+y) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{F_{k+1}} \binom{n}{k}_F (x +_F y)^{n-k}$$

olmak üzere

$$B_{n,F}(x+y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_F B_{k,F}(x) y^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_F B_{k,F}(x) x^{n-k}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat

F -üstel fonksiyonun tanımından

$$e_F^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{t^n}{F_n!} \quad e_F^{yt} = \sum_{n=0}^{\infty} y^n \frac{t^n}{F_n!} \quad (2.20)$$

olup, Eş. 2.18 ve Eş. 2.20 den

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_{n,F}(x) \frac{t^n}{F_n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} y^n \frac{t^n}{F_n!} \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{B_{k,F}(x)}{F_k!} \frac{y^{n-k}}{F_{n-k}!} \right) t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_F B_{k,F}(x) y^{n-k} \right) \frac{t^n}{F_n!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_{n,F}(x) \frac{t^n}{F_n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} y^n \frac{t^n}{F_n!} \right) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{F_{k+1}} \binom{n}{k}_F x^{n-k} \frac{t^n}{F_n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} y^n \frac{t^n}{F_n!} \right) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F_{n+1}} \frac{t^n}{F_n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{t^n}{F_n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} y^n \frac{t^n}{F_n!} \right) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F_{n+1}} \frac{t^n}{F_n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_F x^k y^{n-k} \right) \frac{t^n}{F_n!} \end{aligned}$$

olup, Eş. 2.6 dan

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n=0}^{\infty} B_{n,F}(x) \frac{t^n}{F_n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} y^n \frac{t^n}{F_n!} \right) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{F_{n+1}!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (x +_F y)^n \frac{t^n}{F_n!} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{F_{k+1}} \binom{n}{k}_F (x +_F y)^{n-k} \right) \frac{t^n}{F_n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} B_{n,F}(x + y) \frac{t^n}{F_n!}
\end{aligned}$$

dir. Böylece

$$B_{n,F}(x + y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_F B_{k,F}(x) y^{n-k}$$

dır. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n=0}^{\infty} B_{n,F}(x) \frac{t^n}{F_n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} y^n \frac{t^n}{F_n!} \right) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{F_{k+1}} \binom{n}{k}_F x^{n-k} \frac{t^n}{F_n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} y^n \frac{t^n}{F_n!} \right) \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{F_{k+1}! F_{n-k}!} y^{n-k} t^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{t^n}{F_n!} \right) \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{F_{k+1}} \binom{n}{k}_F y^{n-k} \frac{t^n}{F_n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{t^n}{F_n!} \right) \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_{n,F}(y) \frac{t^n}{F_n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{t^n}{F_n!} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_F B_{k,F}(y) x^{n-k} \right) \frac{t^n}{F_n!}
\end{aligned}$$

olup

$$B_{n,F}(x + y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_F B_{k,F}(y) x^{n-k}$$

elde edilir.

2.11. Teorem

$B_{n,F}(x)$ Bernoulli F -polinomu ve ∂_F F -türev olmak üzere;

$$\partial_F B_{n,F}(x) = F_n B_{n-1,F}(x)$$

dir.

İspat

$B_{n,F}(x)$ Bernoulli F -polinomunun birinci mertebeden F -türevini alırsak

$$\begin{aligned} \partial_F \left(B_{n,F}(x) \right) &= \partial_F \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{F_{k+1}} \binom{n}{k}_F x^{n-k} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{F_{k+1}} \binom{n}{k}_F F_{n-k} x^{n-k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{F_{k+1}} \frac{F_n!}{F_{n-k-1}! F_k!} x^{n-1-k} \\ &= F_n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{F_{k+1}} \binom{n-1}{k}_F x^{n-1-k} \\ &= F_n B_{n-1,F}(x) \end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek

$$\begin{aligned} \partial_F B_{2,F}(x) &= \partial_F \left(x^2 + x + \frac{1}{2} \right) \\ &= F_2 x + F_1 \\ &= x + 1 \\ &= F_2 B_{1,F}(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_F B_{3,F}(x) &= \partial_F \left(x^3 + 2x^2 + x + \frac{1}{3} \right) \\
&= F_3 x^2 + 2F_2 x + F_1 \\
&= 2x^2 + 2x + 1 \\
&= 2 \left(x^2 + x + \frac{1}{2} \right) \\
&= F_3 B_{2,F}(x)
\end{aligned}$$

2.12. Teorem

$B_{n,F}(x)$ Bernoulli F -polinomu olmak üzere

$$B_{n,F}(x) = \frac{1}{F_{n+1}} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k}_F x^k \quad (2.21)$$

dır.

İspat

$B_{n,F}(x)$ Bernoulli F -polinomunun F -üstel üreticiden

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{n,F}(x) \frac{t^n}{F_n!} = \frac{e_F^{xt} (e_F^t - 1)}{t} \quad (2.22)$$

olup, eşitliğin her iki tarafına F -türev uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\partial_F \left(e_F^{xt} \frac{e_F^t - 1}{t} \right) &= t e_F^{xt} \frac{e_F^t - 1}{t} \\
&= e_F^{xt} (e_F^t - 1) \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{t^n}{F_n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{F_n!} - 1 \right) \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{t^n}{F_n!} \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{F_n!} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}_F x^k \right) \frac{t^n}{F_n!}
\end{aligned} \quad (2.23)$$

ve

$$\begin{aligned}\partial_F \left(\sum_{n=1}^{\infty} B_{n,F}(x) \frac{t^n}{F_n!} \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \partial_F \left(B_{n,F}(x) \frac{t^n}{F_n!} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} F_n B_{n-1,F}(x) \frac{t^n}{F_n!}\end{aligned}$$

dir. Eş.2.22 ve Eş. 2.23 den

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n B_{n-1,F}(x) \frac{t^n}{F_n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}_F x^k \right) \frac{t^n}{F_n!}$$

olup

$$B_{n-1,F}(x) = \frac{1}{F_n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}_F x^k$$

dır. $n - 1 \rightarrow n$ yazdığımızda

$$B_{n,F}(x) = \frac{1}{F_{n+1}} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k}_F x^k$$

elde edilir.

Örnek

$$\begin{aligned}B_{3,F}(x) &= \frac{1}{F_4} \sum_{k=0}^3 \binom{4}{k}_F x^k \\ &= \frac{1}{F_4} \left(\binom{4}{0}_F x^0 + \binom{4}{1}_F x^1 + \binom{4}{2}_F x^2 + \binom{4}{3}_F x^3 \right) \\ &= x^3 + 2x^2 + x + \frac{1}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{4,F}(x) &= \frac{1}{F_5} \sum_{k=0}^4 \binom{5}{k}_F x^k \\
&= \frac{1}{F_5} \left(\binom{5}{0}_F x^0 + \binom{5}{1}_F x^1 + \binom{5}{2}_F x^2 + \binom{5}{3}_F x^3 + \binom{5}{4}_F x^4 \right) \\
&= x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

2.13. Teorem

$B_{n,F}(x)$ Bernoulli F -polinomu olmak üzere

$$x^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_F x^k - F_n B_{n-1,F}(x)$$

dir.

İspat

$B_{n,F}(x)$ Bernoulli F -polinomu tanımından

$$B_{n-1,F}(x) = \frac{1}{F_n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}_F x^k$$

olup,

$$\begin{aligned}
F_n B_{n-1,F}(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}_F x^k \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_F x^k - x^n
\end{aligned}$$

dir. O halde

$$x^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_F x^k - F_n B_{n-1,F}(x)$$

elde edilir.

2.4. Euler-Fibonacci Polinomları

Bu bölümde Euler sayılarına ve Euler polinomlarına benzer şekilde Euler-Fibonacci sayılarını ve Euler-Fibonacci polinomlarını tanımlayacağız. Ayrıca Euler-Fibonacci sayılarının ve Euler-Fibonacci polinomlarının F -üstel üreteçlerini elde edeceğiz. Ardından tanımlamış olduğumuz bu sayı ve polinomların Bernoulli F -polinomları ile ilişkisini vereceğiz.

2.14. Tanım

E_n Euler sayıları, $E_0 = 1$ olmak üzere, $n \geq 1$ için

$$E_n = - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} E_k \quad (2.24)$$

ve $E_n(x)$ Euler polinomu

$$E_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} E_k x^{n-k} \quad (2.25)$$

ile tanımlıdır [25].

2.15. Tanım

Euler-Fibonacci sayıları, $E_{0,F} = 1$ olmak üzere $n \geq 1$ için

$$E_{n,F} = - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_F E_{k,F} \quad (2.26)$$

şeklinde tanımlıdır.

Örnek

$$\begin{aligned}
 E_{1,F} &= - \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k}_F E_{k,F} \\
 &= - \binom{1}{0}_F E_{0,F} - \binom{1}{1}_F E_{1,F} \\
 &= - \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_{2,F} &= - \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k}_F E_{k,F} \\
 &= - \binom{2}{0}_F E_{0,F} - \binom{2}{1}_F E_{1,F} - \binom{2}{2}_F E_{2,F} \\
 &= - \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_{3,F} &= - \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k}_F E_{k,F} \\
 &= - \binom{3}{0}_F E_{0,F} - \binom{3}{1}_F E_{1,F} - \binom{3}{2}_F E_{2,F} - \binom{3}{3}_F E_{3,F} \\
 &= - 1 - 2 \left(-\frac{1}{2}\right) - 2 \left(-\frac{1}{4}\right) - E_{3,F} \\
 &= \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_{4,F} &= - \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k}_F E_{k,F} \\
 &= - \binom{4}{0}_F E_{0,F} - \binom{4}{1}_F E_{1,F} - \binom{4}{2}_F E_{2,F} - \binom{4}{3}_F E_{3,F} - \binom{4}{4}_F E_{4,F} \\
 &= - 1 - 3 \left(-\frac{1}{2}\right) - 6 \left(-\frac{1}{4}\right) - 3 \left(\frac{1}{4}\right) - E_{4,F} \\
 &= \frac{5}{8}
 \end{aligned}$$

2.16. Teorem

$E_{n,F}$ Euler-Fibonacci sayılarının F -üstel üretici

$$\frac{2}{e_F^t + 1} \quad (2.27)$$

dir.

İspat

$E_{n,F}$ Euler-Fibonacci sayılarının F -üstel üretici

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} E_{n,F} \frac{t^n}{F_n!}$$

olsun.

$$\begin{aligned} f(x) (e_F^t + 1) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} E_{n,F} \frac{t^n}{F_n!} \right) \left(2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{F_n!} \right) \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} E_{n,F} \frac{t^n}{F_n!} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} E_{n,F} \frac{t^n}{F_n!} \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{F_n!} \right) \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} E_{n,F} \frac{t^n}{F_n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{E_{k,F}}{F_k!} \frac{1}{F_{n-k}!} \right) t^n \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} E_{n,F} \frac{t^n}{F_n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}_F E_{k,F} \right) \frac{t^n}{F_n!} \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} E_{n,F} \frac{t^n}{F_n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_F E_{k,F} - E_{n,F} \right) \frac{t^n}{F_n!} \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} E_{n,F} \frac{t^n}{F_n!} + \sum_{n=1}^{\infty} (-2E_{n,F}) \frac{t^n}{F_n!} \\ &= 2 \end{aligned}$$

olup,

$$f(x) = \frac{2}{e_F^t + 1}$$

elde edilir.

2.17. Tanım

$E_{n,F}$ Euler-Fibonacci sayısı olmak üzere $E_{0,F}(x) = 1$ ve $n \geq 1$ için

$$E_{n,F}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_F E_{k,F} x^{n-k} \quad (2.28)$$

şeklinde tanımlı polinoma Euler-Fibonacci polinomu denir.

Örnek

$$\begin{aligned} E_{1,F}(x) &= \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k}_F E_{k,F} x^{1-k} \\ &= \binom{1}{0}_F E_{0,F} x + \binom{1}{1}_F E_{1,F} \\ &= x - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{2,F}(x) &= \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k}_F E_{k,F} x^{2-k} \\ &= \binom{2}{0}_F E_{0,F} x^2 + \binom{2}{1}_F E_{1,F} x + \binom{2}{2}_F E_{2,F} \\ &= x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Euler-Fibonacci polinomlarının bazı örnekleri aşağıdaki çizelgede verilmektedir.

Çizelge 2.3. Euler polinomları, Euler sayıları, Euler-Fibonacci polinomları ve sayıları

n	$E_n(x)$	E_n	$E_{n,F}(x)$	$E_{n,F}$
0	1	1	1	1
1	$x - \frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$x - \frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
2	$x^2 - x$	-1	$x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
3	$x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$x^3 - x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
4	$x^4 - 2x^3 + x$	0	$x^4 - \frac{3}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{5}{8}$	$\frac{5}{8}$
5	$x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{2}x^3 - \frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$x^5 - \frac{5}{2}x^4 - \frac{15}{4}x^3 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{25}{8}x - \frac{13}{16}$	$-\frac{13}{16}$
6	$x^6 - 3x^5 + 5x^3 - 3x$	0	$x^6 - 4x^5 - 10x^4 + 15x^3 + 25x^2 - \frac{13}{2}x - \frac{41}{4}$	$-\frac{41}{4}$

2.18. Teorem

$E_{n,F}(x)$ Euler-Fibonacci polinomunun F -üstel üretici

$$\frac{2e_F^{xt}}{e_F^t + 1} \quad (2.29)$$

dir.

İspat

Euler-Fibonacci polinomlarının indirgeme bağıntısı ve Euler-Fibonacci sayılarının F -üstel üretici tanımı kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} E_{n,F}(x) \frac{t^n}{F_n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_F E_{k,F} x^{n-k} \right) \frac{t^n}{F_n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{E_{k,F}}{F_k!} \frac{x^{n-k}}{F_{n-k}!} \right) t^n \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} E_{n,F} \frac{t^n}{F_n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{t^n}{F_n!} \right) \\
&= \frac{2}{e_F^t + 1} e_F^{xt}
\end{aligned}$$

elde edilir.

2.5. Euler-Fibonacci Polinomları ile Bernoulli F -Polinomlarının İlişkisi

2.19. Teorem

$E_{n,F}$, Euler-Fibonacci sayısı ve $\delta_{n,k}$ Kronecker fonksiyonu olmak üzere

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_F E_{n-k,F} + E_{n,F} = 2 \delta_{n,0} \quad (2.30)$$

dır.

İspat

$n = 0$ için

$$\binom{0}{0}_F E_{0,F} + E_{0,F} = 2 = 2 \delta_{0,0}$$

dır. $n \geq 1$ için Eş. 2.26 kullanılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_F E_{n-k,F} + E_{n,F} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_F E_{n-k,F} - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_F E_{n-k,F} \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. $n \geq 1$ için $\delta_{n,0} = 0$ olup, böylece

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_F E_{n-k,F} + E_{n,F} = 2 \delta_{n,0}$$

elde edilir.

Eş. 2.30 un q -benzeri 2014 yılında Kim [8] tarafından yapılmıştır.

Şimdi $B_{n,F}(x)$ Bernoulli F -polinomu ile $E_{n,F}(x)$ Euler-Fibonacci polinomu arasındaki bağıntıyı vereceğiz.

2.20. Teorem

$B_{n,F}(x)$ ve $E_{n,F}(x)$ Bernoulli F -polinomu ve Euler-Fibonacci polinomu olmak üzere

$$B_{n,F}(x) = \frac{x^{n+1} - E_{n+1,F}(x)}{F_{n+1}} + \sum_{k=0}^n \frac{1}{F_{k+1}} \binom{n}{k}_F (x^{k+1} - E_{k+1,F}(x))$$

dir.

İspat

Bernoulli F -polinomu ve Euler-Fibonacci polinomunun F -üstel üreteçlerinden

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} B_{n,F}(x) \frac{t^n}{F_n!} &= \frac{e_F^{xt} (e_F^t - 1)}{t} \\ &= \frac{(e_F^t + 1)}{t} \left(e_F^{xt} - \frac{2e_F^{xt}}{e_F^t + 1} \right) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{F_n!} + 1 \right) \left(\frac{1}{t} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n t^n}{F_n!} - \sum_{n=0}^{\infty} E_{n,F}(x) \frac{t^n}{F_n!} \right) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{F_n!} + 1 \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1} t^n}{F_{n+1}!} - \sum_{n=0}^{\infty} E_{n+1,F}(x) \frac{t^n}{F_{n+1}!} \right) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{F_n!} + 1 \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (x^{n+1} - E_{n+1,F}(x)) \frac{t^n}{F_{n+1}!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{F_n!} \sum_{n=0}^{\infty} (x^{n+1} - E_{n+1,F}(x)) \frac{t^n}{F_{n+1}!} \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} (x^{n+1} - E_{n+1,F}(x)) \frac{t^n}{F_{n+1}!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^{k+1} - E_{k+1,F}(x)}{F_{k+1}!} \frac{1}{F_{n-k}!} t^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1} - E_{n+1,F}(x)}{F_{n+1}} \frac{t^n}{F_n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{F_{k+1}} \binom{n}{k}_F (x^{k+1} - E_{k+1,F}(x)) t^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1} - E_{n+1,F}(x)}{F_{n+1}} \frac{t^n}{F_n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^{n+1} - E_{n+1,F}(x)}{F_{n+1}} + \sum_{k=0}^n \frac{1}{F_{k+1}} \binom{n}{k}_F (x^{k+1} - E_{k+1,F}(x)) \right) \frac{t^n}{F_n!} \end{aligned}$$

dir. O halde

$$B_{n,F}(x) = \frac{x^{n+1} - E_{n+1,F}(x)}{F_{n+1}} + \sum_{k=0}^n \frac{1}{F_{k+1}} \binom{n}{k}_F (x^{k+1} - E_{k+1,F}(x))$$

dir.

Örnek

$$\begin{aligned} B_{1,F}(x) &= \frac{x^2 - E_{2,F}(x)}{F_2} + \sum_{k=0}^1 \frac{1}{F_{k+1}} \binom{1}{k}_F (x^{k+1} - E_{k+1,F}(x)) \\ &= x^2 - \left(x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{F_1} \binom{1}{0}_F (x - E_{1,F}(x)) + \frac{1}{F_2} \binom{1}{1}_F (x^2 - E_{2,F}(x)) \\ &= x + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{2,F}(x) &= \frac{x^3 - E_{3,F}(x)}{F_3} + \sum_{k=0}^2 \frac{1}{F_{k+1}} \binom{2}{k}_F (x^{k+1} - E_{k+1,F}(x)) \\ &= \frac{1}{2} \left(x^3 - \left(x^3 - x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)\right) + \frac{1}{F_1} \binom{2}{0}_F (x - E_{1,F}(x)) \\ &\quad + \frac{1}{F_2} \binom{2}{1}_F (x^2 - E_{2,F}(x)) + \frac{1}{F_3} \binom{2}{2}_F (x^3 - E_{3,F}(x)) \\ &= x^2 + x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2.21. Teorem

$B_{n,F}(x)$ Bernoulli F -polinomu ve $E_{n,F}(x)$ Euler-Fibonacci polinomu olmak üzere

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_F B_{k,F}(x) E_{n-k,F}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{F_{k+1}} \binom{n}{k}_F E_{n-k,F}(x)$$

dir.

İspat

Bernoulli F –polinomu ve Euler-Fibonacci polinomlarının F –üstel üreteçlerinden

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} E_{n,F}(x) \frac{t^n}{F_n!} \left(\frac{e_F^t - 1}{t} \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} E_{n,F}(x) \frac{t^n}{F_n!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{F_n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E_{n,F}(x) \frac{t^n}{F_n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{F_{n+1}!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{F_{k+1}!} \frac{E_{n-k,F}(x)}{F_{n-k}!} \right) t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{F_{k+1}} \binom{n}{k}_F E_{n-k,F}(x) \right) \frac{t^n}{F_n!}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} E_{n,F}(x) \frac{t^n}{F_n!} \left(\frac{e_F^t - 1}{t} \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} E_{n,F} \frac{t^n}{F_n!} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{t^n}{F_n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{F_{n+1}!} \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} E_{n,F} \frac{t^n}{F_n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{F_{k+1}} \binom{n}{k}_F x^{n-k} \right) \frac{t^n}{F_n!} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E_{n,F} \frac{t^n}{F_n!} \sum_{n=0}^{\infty} B_{n,F}(x) \frac{t^n}{F_n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{B_{k,F}(x)}{F_k!} \frac{E_{n-k,F}}{F_{n-k}!} \right) t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_F B_{k,F}(x) E_{n-k,F} \right) \frac{t^n}{F_n!}
\end{aligned}$$

olup, bu iki eşitlikten

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_F B_{k,F}(x) E_{n-k,F} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{F_{k+1}} \binom{n}{k}_F E_{n-k,F}(x)$$

elde edilir.

Örnek

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^2 \binom{2}{k}_F B_{k,F}(x) E_{2-k,F} &= \binom{2}{0}_F B_{0,F}(x) E_{2,F} + \binom{2}{1}_F B_{1,F}(x) E_{1,F} \\
&\quad + \binom{2}{2}_F B_{2,F}(x) E_{0,F} \\
&= -\frac{1}{4} + (x+1) \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right) 1 \\
&= x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^2 \frac{1}{F_{k+1}} \binom{2}{k}_F E_{2-k,F}(x) &= \frac{1}{F_1} \binom{2}{0}_F E_{2,F}(x) + \frac{1}{F_2} \binom{2}{1}_F E_{1,F}(x) + \frac{1}{F_3} \binom{2}{2}_F E_{0,F}(x) \\
&= x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{4} + x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\
&= x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

3. HARMONİK FİBONACCİ POLİNOMLAR

Çalışmamızın bu bölümünde harmonik tabanlı F –üstel üreteç fonksiyonunu tanımlayarak, Bernoulli F –polinomlarının harmonik tabanlı F –üstel üretecini elde edeceğiz. Ayrıca F –integral yardımı ile Bernoulli F –polinomlarını farklı bir metodla elde edeceğiz. Bernoulli F –polinomlarının harmonik Fibonacci sayıları ve harmonik Fibonacci polinomları ile arasındaki bağıntıyı vereceğiz.

3.1. Harmonik Fibonacci Polinomlarının, Bernoulli F –Polinomları ile İlişkisi

h_n harmonik sayıları, n doğal sayıları için $h_0 = 0$ ve

$$h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad (3.1)$$

ile tanımlıdır.

Dattoli 2008 yılında yaptığı çalışmasında harmonik sayıları vakum yükseltme operatör kullanarak, harmonik tabanlı üstel üreteç fonksiyon yardımı ile tanımlamıştır [33]. Bunun için bir harmonik umbral vakum operatörü tanımlayarak h_n harmonik sayısını aşağıdaki şekilde ifade etmiştir.

$\forall z \in \mathbb{R}$ için harmonik umbral vakum operatörü

$$\Phi_h(z) = \int_0^1 \frac{1-x^z}{1-x} dx \quad (3.2)$$

olup, $\hat{h}$ vakum yükseltme (vacuum shift) operatörü

$$\hat{h} = e^{\partial z} \quad (3.3)$$

dir [33, 41].

h_n harmonik sayı olmak üzere, $\hat{h}^n$ umbral operatörünü

$$\hat{h}^n \Phi_h(z) \Big|_{z=0} = h_n$$

veya

$$\hat{h}^n = h_n$$

şeklinde ifade etmiş ve

$$\begin{aligned} \hat{h}^n \Phi_h(z) \Big|_{z=0} &= e^{n\partial z} \Phi_h(z) \Big|_{z=0} \\ &= \Phi_h(z+n) \Big|_{z=0} \\ &= \left(\int_0^1 \frac{1-x^{z+n}}{1-x} dx \right) \Big|_{z=0} \\ &= \int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x} dx \\ &= h_n \end{aligned}$$

ile göstermiştir [33].

$H_n(x)$ harmonik polinomunu ise h_n n —inci harmonik sayı olmak üzere,

$$H_n(x) = x^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} h_k x^{n-k} \quad (3.4)$$

ile tanımlamıştır [33].

Çizelge 3.1. Harmonik polinomlar ve harmonik sayılar

n	$H_n(x)$	h_n
0	1	0
1	$x + 1$	1
2	$x^2 + 2x + \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$
3	$x^3 + 3x^2 + \frac{9}{2}x + \frac{11}{6}$	$\frac{11}{6}$
4	$x^4 + 4x^3 + 9x^2 + \frac{22}{3}x + \frac{25}{12}$	$\frac{25}{12}$
5	$x^5 + 5x^4 + 15x^3 + \frac{55}{3}x^2 + \frac{125}{12}x + \frac{137}{60}$	$\frac{137}{60}$
6	$x^6 + 6x^5 + \frac{45}{2}x^4 + \frac{110}{3}x^3 + \frac{125}{12}x^2 + \frac{137}{10}x + \frac{49}{20}$	$\frac{49}{20}$

3.1. Tanım

$\mathbb{F}_n$ harmonik Fibonacci sayısı $\mathbb{F}_0 = 0$ olmak üzere

$$\mathbb{F}_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{F_k} \quad (3.5)$$

şeklinde tanımlıdır [37]. Harmonik Fibonacci sayılarının tanımından

$$\mathbb{F}_{n+1} = \mathbb{F}_n + \frac{1}{F_{n+1}} \quad (3.6)$$

dir.

Örnek

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_1 &= \sum_{k=1}^1 \frac{1}{F_k} \\ &= \frac{1}{F_1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_2 &= \sum_{k=1}^2 \frac{1}{F_k} \\ &= \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_3 &= \sum_{k=1}^3 \frac{1}{F_k} \\ &= \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} + \frac{1}{F_3} \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Şimdi harmonik Fibonacci sayılarını F -integral yardımı ile elde edelim:

3.2. Teorem

$\mathbb{F}_n$ harmonik Fibonacci sayısı ve $x \neq 1$ olmak üzere

$$\mathbb{F}_n = \int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x} d_F(x)$$

dir.

İspat

$x \neq 1$ ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. F -integral tanımından

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x} d_F(x) &= \int_0^1 (x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + 1) d_F(x) \\ &= \int_0^1 \sum_{k=1}^n x^{k-1} d_F(x) \\ &= \sum_{k=1}^n \int_0^1 x^{k-1} d_F(x) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{F_k} \\ &= \mathbb{F}_n \end{aligned}$$

dir.

3.3. Tanım

$\mathbb{F}_n$ harmonik Fibonacci sayısı olmak üzere $\mathbb{F}_0(x) = 1$ ve $n \geq 1$ için

$$\mathbb{F}_n(x) = x^n + \sum_{k=1}^n \mathbb{F}_k \binom{n}{k}_F x^{n-k}$$

ile tanımlı $\mathbb{F}_n(x)$ polinomuna harmonik Fibonacci polinomu denir.

Örnek

$$\begin{aligned}
 \mathbb{F}_1(x) &= x + \sum_{k=1}^1 \mathbb{F}_k \binom{1}{k}_F x^{1-k} \\
 &= x + \mathbb{F}_1 \binom{1}{1}_F \\
 &= x + 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{F}_2(x) &= x^2 + \sum_{k=1}^2 \mathbb{F}_k \binom{2}{k}_F x^{2-k} \\
 &= x^2 + \mathbb{F}_1 \binom{2}{1}_F x + \mathbb{F}_2 \binom{2}{2}_F \\
 &= x^2 + x + 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{F}_3(x) &= x^3 + \sum_{k=1}^3 \mathbb{F}_k \binom{3}{k}_F x^{3-k} \\
 &= x^3 + \mathbb{F}_1 \binom{3}{1}_F x^2 + \mathbb{F}_2 \binom{3}{2}_F x + \mathbb{F}_3 \binom{3}{3}_F \\
 &= x^3 + 2x^2 + 4x + \frac{5}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{F}_4(x) &= x^4 + \sum_{k=1}^4 \mathbb{F}_k \binom{4}{k}_F x^{4-k} \\
 &= x^4 + \mathbb{F}_1 \binom{4}{1}_F x^3 + \mathbb{F}_2 \binom{4}{2}_F x^2 + \mathbb{F}_3 \binom{4}{3}_F x + \mathbb{F}_4 \binom{4}{4}_F \\
 &= x^4 + 3x^3 + 12x^2 + \frac{15}{2}x + \frac{17}{6}
 \end{aligned}$$

Çizelge 3.2. Harmonik Fibonacci polinomları ve harmonik Fibonacci sayıları

n	$\mathbb{F}_n(x)$	$\mathbb{F}_n$
0	1	0
1	$x + 1$	1
2	$x^2 + x + 2$	2
3	$x^3 + 2x^2 + 4x + \frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$
4	$x^4 + 3x^3 + 12x^2 + \frac{15}{2}x + \frac{17}{6}$	$\frac{17}{6}$
5	$x^5 + 5x^4 + 30x^3 + \frac{75}{2}x^2 + \frac{85}{6}x + \frac{91}{30}$	$\frac{91}{30}$
6	$x^6 + 8x^5 + 80x^4 + 150x^3 + \frac{340}{3}x^2 + \frac{364}{15}x + \frac{379}{120}$	$\frac{379}{120}$

Şimdi Dattoli'nin harmonik sayılar için tanımladığı harmonik vakum operatörünü ve vakum yükseltme operatörünü, benzer şekilde harmonik Fibonacci sayıları için uygulayalım.

Burada harmonik Fibonacci sayıları için harmonik Fibonacci vakum operatör

$$\Phi_{\mathbb{F}}(z) = \int_0^1 \frac{1 - x^z}{1 - x} d_F(x)$$

ve vakum yükseltme operatörü

$$f = e^{\partial z}$$

dir. Ayrıca

$$f_{\mathbb{F}}^n = \mathbb{F}_n$$

dir.

3.4. Tanım

h_n harmonik sayı olmak üzere,

$$e^{\hat{h}t} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} h_n \frac{t^n}{n!}$$

şeklinde tanımlı fonksiyona harmonik tabanlı üstel fonksiyon denir [33].

Bu tanımlı F –üstele uygularsak, harmonik tabanlı F –üstel fonksiyon

$$e^{f_{\mathbb{F}}t} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{F}_n \frac{t^n}{F_n!} \quad (3.7)$$

elde edilir. Harmonik tabanlı F –üstel fonksiyona, birinci mertebeden F –türev uygulanırsa

$$\begin{aligned} \partial_{F,t}(e^{f_{\mathbb{F}}t}) &= \partial_{F,t} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{F}_n \frac{t^n}{F_n!} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{F}_n \frac{F_n t^{n-1}}{F_n!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{F}_n \frac{t^{n-1}}{F_{n-1}!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{F}_{n+1} \frac{t^n}{F_n!} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{F}_{n+1} \frac{t^n}{F_n!} \end{aligned}$$

yani

$$\partial_{F,t}(e^{f_{\mathbb{F}}t}) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{F}_{n+1} \frac{t^n}{F_n!} \quad (3.8)$$

elde edilir.

3.5. Teorem

$\mathbb{F}_n(x)$ harmonik Fibonacci polinomunun harmonik tabanlı F –üstel üretici

$$e_F^{xt} e^{f_{\mathbb{F}}t} \quad (3.9)$$

dir.

İspat

F –üstel üreteç tanımı ve Eş. 3.7 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{F}_n(x) \frac{t^n}{F_n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(x^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k}_F \mathbb{F}_n x^{n-k} \right) \frac{t^n}{F_n!} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{t^n}{F_n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{\mathbb{F}_n}{F_k!} \frac{x^{n-k}}{F_{n-k}!} t^n \\
 &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{t^n}{F_n!} \right) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{F}_n \frac{t^n}{F_n!} \right) \\
 &= e_F^{xt} e_{\mathbb{F}}^{f_{\mathbb{F}} t}
 \end{aligned}$$

elde edilir.

3.6. Teorem

$B_{n,F}(x)$ Bernoulli F –polinomu olmak üzere

$$\int_0^1 (x +_F y)^n d_F(y) = B_{n,F}(x)$$

dir.

İspat

$B_{n,F}(x)$, Bernoulli F –polinomu

$$B_{n,F}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{F_{k+1}} \binom{n}{k}_F x^{n-k}$$

dır. Gerekli düzenlemeler yapılır ve Eş. 2.6 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (x +_F y)^n d_F(y) &= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_F x^k y^{n-k} \right) d_F(y) \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_F x^k \left(\int_0^1 y^{n-k} d_F(y) \right) \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_F x^k \frac{1}{F_{n-k+1}} \\
&= \binom{n}{0}_F x^0 \frac{1}{F_{n+1}} + \binom{n}{1}_F x \frac{1}{F_n} + \cdots + \binom{n}{n}_F x^n \frac{1}{F_1} \\
&= \sum_{k=0}^n \frac{1}{F_{k+1}} \binom{n}{k}_F x^{n-k} \\
&= B_{n,F}(x)
\end{aligned}$$

elde edilir.

3.7. Teorem

$B_{n,F}(x)$ Bernoulli F -polinomunun harmonik tabanlı F -üstel üretici

$$k(x) = \left(\partial_{F,t} e^{f_F t} - e^{f_F t} + 1 \right) e_F^{xt} \quad (3.10)$$

dir.

İspat

Harmonik tabanlı F -üstel üreteç fonksiyon ve bu fonksiyonun birinci mertebeden türevi sırasıyla

$$e^{f_F t} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{F}_n \frac{t^n}{F_n!}$$

ve

$$\partial_{F,t} e^{f_{\mathbb{F}} t} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{F}_{n+1} \frac{t^n}{F_n!}$$

olup,

$$\begin{aligned} \partial_{F,t} e^{f_{\mathbb{F}} t} - e^{f_{\mathbb{F}} t} &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{F}_{n+1} \frac{t^n}{F_n!} - \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{F}_n \frac{t^n}{F_n!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (\mathbb{F}_{n+1} - \mathbb{F}_n) \frac{t^n}{F_n!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_{n+1}} \frac{t^n}{F_n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F_{n+1}} \frac{t^n}{F_n!} - 1 \end{aligned} \tag{3.11}$$

elde edilir. Eş. 3.11 in her iki tarafı e_F^{xt} ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} (\partial_{F,t} e^{f_{\mathbb{F}} t} - e^{f_{\mathbb{F}} t} + 1) e_F^{xt} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F_{n+1}} \frac{t^n}{F_n!} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{t^n}{F_n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{F_{k+1}!} \cdot \frac{x^{n-k}}{F_{n-k}!} \right) t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{F_{k+1}} \binom{n}{k}_F x^{n-k} \right) \frac{t^n}{F_n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} B_{n,F}(x) \frac{t^n}{F_n!} \end{aligned}$$

bulunur.

3.8. Teorem

$B_{n,F}(x)$ Bernoulli F -Polinomu, $\mathbb{F}_n$ harmonik Fibonacci sayısı ve $\mathbb{F}_n(x)$ harmonik

Fibonacci polinomu olmak üzere

$$B_{n,F}(x) = x^n + \sum_{k=0}^n \mathbb{F}_{k+1} \binom{n}{k}_F x^{n-k} - \mathbb{F}_n(x)$$

dir.

İspat

Harmonik Fibonacci polinom tanımı kullanılırsa

$$\begin{aligned} x^n + \sum_{k=0}^n \mathbb{F}_{k+1} \binom{n}{k}_F x^{n-k} - \mathbb{F}_n(x) &= x^n + \sum_{k=0}^n \mathbb{F}_{k+1} \binom{n}{k}_F x^{n-k} - x^n - \sum_{k=1}^n \mathbb{F}_k \binom{n}{k}_F x^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n (\mathbb{F}_{k+1} - \mathbb{F}_k) \binom{n}{k}_F x^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{F_{k+1}} \binom{n}{k}_F x^{n-k} \\ &= B_{n,F}(x) \end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek

$$\begin{aligned} B_{2,F}(x) &= x^2 + \sum_{k=0}^2 \mathbb{F}_{k+1} \binom{2}{k}_F x^{2-k} - \mathbb{F}_2(x) \\ &= x^2 + \left(\mathbb{F}_1 \binom{2}{0}_F x^2 + \mathbb{F}_2 \binom{2}{1}_F x + \mathbb{F}_3 \binom{2}{2}_F \right) - \mathbb{F}_2(x) \\ &= x^2 + \left(\mathbb{F}_1 x^2 + \mathbb{F}_2 F_2 x + \mathbb{F}_3 \right) - \mathbb{F}_2(x) \\ &= x^2 + \left(x^2 + 2x + \frac{5}{2} \right) - \left(x^2 + x + 2 \right) \\ &= x^2 + x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{3,F}(x) &= x^3 + \sum_{k=0}^3 \mathbb{F}_{k+1} \binom{3}{k}_F x^{3-k} - \mathbb{F}_3(x) \\
&= x^3 + \left(\mathbb{F}_1 \binom{3}{0}_F x^3 + \mathbb{F}_2 \binom{3}{1}_F x^2 + \mathbb{F}_3 \binom{3}{2}_F x + \mathbb{F}_4 \binom{3}{3}_F \right) - \mathbb{F}_3(x) \\
&= x^3 + (\mathbb{F}_1 x^3 + \mathbb{F}_2 F_3 x^2 + \mathbb{F}_3 F_3 x + \mathbb{F}_4) - \mathbb{F}_3(x) \\
&= x^3 + \left(x^3 + 4x^2 + 5x + \frac{17}{6} \right) - \left(x^3 + 2x^2 + 4x + \frac{5}{2} \right) \\
&= x^3 + 2x^2 + x + \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

3.2. Harmonik Fibonacci Polinomlarının Euler-Fibonacci Polinomları ve Bernoulli-Fibonacci Polinomları ile İlişkisi

Bu bölümde Euler-Fibonacci sayılarının, Euler-Fibonacci polinomlarının ve Bernoulli-Fibonacci polinomlarının harmonik tabanlı F -üstel üreteçlerini elde edeceğiz. Ayrıca Euler-Fibonacci polinomlarının, harmonik Fibonacci sayıları ve harmonik Fibonacci polinomları arasındaki ilişkileri göstereğiz.

3.9. Teorem

Euler-Fibonacci sayılarının harmonik tabanlı F -üstel üreteci

$$\frac{2}{2 + t \left(\partial_{F,t} e^{f_F t} - e^{f_F t} + 1 \right)} \quad (3.12)$$

dir.

İspat

Harmonik tabanlı F -üstel üreteç ve bu fonksiyonun birinci mertebeden türevi sırasıyla

$$e^{f_F t} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{F}_n \frac{t^n}{F_n!}$$

ve

$$\partial_{F,t} e^{f_{\mathbb{F}} t} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{F}_{n+1} \frac{t^n}{F_n!}$$

dir. Ayrıca Eş. 2.27 kullanılırsa

$$\begin{aligned} e_F^t + 1 &= 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{F_n!} \\ &= 2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{F_{n+1}!} \\ &= 2 + t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F_{n+1}} \frac{t^n}{F_n!} \\ &= 2 + t \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbb{F}_{n+1} - \mathbb{F}_n) \frac{t^n}{F_n!} \\ &= 2 + t \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{F}_{n+1} \frac{t^n}{F_n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{F}_n \frac{t^n}{F_n!} \right) \\ &= 2 + t \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{F}_{n+1} \frac{t^n}{F_n!} - \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{F}_n \frac{t^n}{F_n!} \right) \\ &= 2 + t \left(\partial_{F,t} e^{f_{\mathbb{F}} t} - e^{f_{\mathbb{F}} t} + 1 \right) \end{aligned}$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} E_{n,F} \frac{t^n}{F_n!} &= \frac{2}{e_F^t + 1} \\ &= \frac{2}{2 + t \left(\partial_{F,t} e^{f_{\mathbb{F}} t} - e^{f_{\mathbb{F}} t} + 1 \right)} \end{aligned}$$

dir.

3.10. Teorem

$E_{n,F}(x)$ Euler-Fibonacci polinomlarının harmonik tabanlı F -üstel üretici

$$\frac{2e^{xt}}{2+t\left(\partial_{F,t}e^{f_{\mathbb{F}}t}-e^{f_{\mathbb{F}}t}+1\right)} \quad (3.13)$$

dir.

İspat

$E_{n,F}(x)$ Euler-Fibonacci polinomları

$$E_{n,F}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_F E_{k,F} x^{n-k}$$

ile tanımlıdır.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} E_{n,F}(x) \frac{t^n}{F_n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_F E_{k,F} x^{n-k} \right) \frac{t^n}{F_n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{F_n!}{F_{n-k}!F_k!} E_{k,F} x^{n-k} \right) \frac{t^n}{F_n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{F_{n-k}!F_k!} E_{k,F} x^{n-k} \right) t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E_{n,F} \frac{t^n}{F_n!} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{t^n}{F_n!} \end{aligned}$$

olup Eş. 3.12 uygulanırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_{n,F}(x) \frac{t^n}{F_n!} = \frac{2e_F^{xt}}{2+t\left(\partial_{F,t}e^{f_{\mathbb{F}}t}-e^{f_{\mathbb{F}}t}+1\right)}$$

elde edilir.

3.11. Teorem

$E_{n,F}(x)$ Euler-Fibonacci polinomu, $\mathbb{F}_n(x)$ harmonik Fibonacci polinomu ve $\mathbb{F}_n$ harmonik Fibonacci sayısı olmak üzere

$$E_{n,F}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_F (E_{k,F} \mathbb{F}_{n-k}(x) - E_{k,F}(x) \mathbb{F}_{n-k}) \quad (3.14)$$

dır.

İspat

$E_{n,F}(x)$ Euler-Fibonacci polinomunun tanımı

$$E_{n,F}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_F E_{k,F} x^{n-k}$$

olup, Teorem 3.10 dan

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_{n,F}(x) \frac{t^n}{F_n!} = \sum_{n=0}^{\infty} E_{n,F} \frac{t^n}{F_n!} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{t^n}{F_n!} \quad (3.15)$$

dir. Eş. 3.15 in her iki tarafı harmonik tabanlı F -üstel fonksiyon $e^{f_{\mathbb{F}} t}$ ile çarpılır ve Cauchy çarpımını uygulanırsa

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=0}^{\infty} E_{n,F}(x) \frac{t^n}{F_n!} \right) e^{f_{\mathbb{F}} t} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} E_{n,F}(x) \frac{t^n}{F_n!} \right) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{F}_n \frac{t^n}{F_n!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E_{n,F}(x) \frac{t^n}{F_n!} + \sum_{n=0}^{\infty} E_{n,F}(x) \frac{t^n}{F_n!} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{F}_n \frac{t^n}{F_n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E_{n,F}(x) \frac{t^n}{F_n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{E_{k,F}(x)}{F_k!} \frac{\mathbb{F}_{n-k}}{F_{n-k}!} \right) t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E_{n,F}(x) \frac{t^n}{F_n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_F E_{k,F}(x) \mathbb{F}_{n-k} \right) \frac{t^n}{F_n!} \end{aligned} \quad (3.16)$$

ve

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n=0}^{\infty} E_{n,F} \frac{t^n}{F_n!} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{t^n}{F_n!} \right) e^{f_{\mathbb{F}} t} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} E_{n,F} \frac{t^n}{F_n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{t^n}{F_n!} \right) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{F}_n \frac{t^n}{F_n!} \right) \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} E_{n,F} \frac{t^n}{F_n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{F}_n(x) \frac{t^n}{F_n!} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{E_{k,F}}{F_k!} \frac{\mathbb{F}_{n-k}(x)}{F_{n-k}!} \right) t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_F E_{k,F} \mathbb{F}_{n-k}(x) \right) \frac{t^n}{F_n!} \tag{3.17}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} E_{n,F}(x) \frac{t^n}{F_n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_F E_{k,F} \mathbb{F}_{n-k}(x) \right) \frac{t^n}{F_n!} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_F E_{k,F}(x) \mathbb{F}_{n-k} \right) \frac{t^n}{F_n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_F (E_{k,F} \mathbb{F}_{n-k}(x) - E_{k,F}(x) \mathbb{F}_{n-k}) \frac{t^n}{F_n!}
\end{aligned}$$

O halde Eş. 3.16 ve Eş. 3.17 den

$$E_{n,F}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_F (E_{k,F} \mathbb{F}_{n-k}(x) - E_{k,F}(x) \mathbb{F}_{n-k})$$

dir.

Örnek

$$\begin{aligned}
E_{1,F}(x) &= \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k}_F (E_{k,F} \mathbb{F}_{1-k}(x) - E_{k,F}(x) \mathbb{F}_{1-k}) \\
&= \binom{1}{0}_F (E_{0,F} \mathbb{F}_1(x) - E_{0,F}(x) \mathbb{F}_1) + \binom{1}{1}_F (E_{1,F} \mathbb{F}_0(x) - E_{1,F}(x) \mathbb{F}_0) \\
&= (x + 1 - 1) + \left(-\frac{1}{2} - 0 \right) \\
&= x - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{2,F}(x) &= \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k}_F (E_{k,F} \mathbb{F}_{2-k}(x) - E_{k,F}(x) \mathbb{F}_{2-k}) \\
&= \binom{2}{0}_F (E_{0,F} \mathbb{F}_2(x) - E_{0,F}(x) \mathbb{F}_2) + \binom{2}{1}_F (E_{1,F} \mathbb{F}_1(x) - E_{1,F}(x) \mathbb{F}_1) \\
&\quad + \binom{2}{2}_F (E_{2,F} \mathbb{F}_0(x) - E_{2,F}(x) \mathbb{F}_0) \\
&= (x^2 + x + 2 - 2) + 1 \left(-\frac{1}{2}(x+1) - \left(x - \frac{1}{2}\right) \right) + \left(-\frac{1}{4} - \left(x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right) \right) 0 \\
&= x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

3.12. Teorem

B_n^F Bernoulli-Fibonacci sayılarının harmonik tabanlı F -üstel üretici

$$\frac{1}{\partial_{F,t} e^{f_{\mathbb{F}} t} - e^{f_{\mathbb{F}} t} + 1} \quad (3.18)$$

dir.

İspat

F -üstel fonksiyon e_F^t de düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
e_F^t - 1 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{F_n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{F_{n+1}!} \\
&= t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F_{n+1}} \frac{t^n}{F_n!} \\
&= t \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbb{F}_{n+1} - \mathbb{F}_n) \frac{t^n}{F_n!} \\
&= t \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{F}_{n+1} \frac{t^n}{F_n!} - \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{F}_n \frac{t^n}{F_n!} \right) \\
&= t \left(\partial_{F,t} e^{f_{\mathbb{F}} t} - e^{f_{\mathbb{F}} t} + 1 \right)
\end{aligned} \quad (3.19)$$

dir. Ayrıca B_n^F Bernoulli-Fibonacci sayısının F -üstel üreticinde $e_F^t - 1$ yerine yazılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n^F \frac{t^n}{F_n!} = \frac{1}{\partial_{F,t} e^{f_F t} - e^{f_F t} + 1}$$

harmonik tabanlı F -üstel üretici elde edilir.

Aşağıdaki tabloda bazı polinom ve sayıların F -üstel üreticileri ve harmonik tabanlı F -üstel üreticileri verilmiştir.

Çizelge 3.3. Çeşitli polinom ve sayıların harmonik tabanlı F -üstel üreticileri

	Polinom/Sayı	F -üstel üreteç	Harmonik tabanlı F -üstel üreteç
$B_{n,F}(x)$	Bernoulli F -Polinomu	$\frac{e_F^{xt} (e_F^t - 1)}{t}$	$(\partial_{F,t} e^{f_F t} - e^{f_F t} + 1) e_F^{xt}$
$E_{n,F}(x)$	Euler-Fibonacci polinomu	$\frac{2e_F^{xt}}{e_F^t + 1}$	$\frac{2e_F^{xt}}{2 + t (\partial_{F,t} e^{f_F t} - e^{f_F t} + 1)}$
$E_{n,F}$	Euler-Fibonacci sayısı	$\frac{2}{e_F^t + 1}$	$\frac{2}{2 + t (\partial_{F,t} e^{f_F t} - e^{f_F t} + 1)}$
$B_n^F(x)$	Bernoulli-Fibonacci polinomu	$\frac{t e_F^{xt}}{e_F^t - 1}$	$\frac{e_F^{xt}}{\partial_{F,t} e^{f_F t} - e^{f_F t} + 1}$
B_n^F	Bernoulli-Fibonacci sayısı	$\frac{t}{e_F^t - 1}$	$\frac{1}{\partial_{F,t} e^{f_F t} - e^{f_F t} + 1}$
$\mathbb{F}_n(x)$	Harmonik Fibonacci polinomu	—	$e_F^{xt} e^{f_F t}$
$\mathbb{F}_n$	Harmonik Fibonacci sayısı	—	$e^{f_F t} - 1$

4. BAZI ÖZEL MATRİSLER

Bu bölümde, elemanları Bernoulli F -polinomlarından oluşan Fibo-Bernoulli matrislerini tanımlayacağız. Fibo-Bernoulli matrisinin tersini, fibonomial katsayılı bazı matrisler ile ilişkisini ve faktörizasyonunu göstereceğiz.

4.1. Fibo-Bernoulli Matrisler

4.1. Tanım

$\binom{i}{j}_F$ Fibonomiyel katsayılar ve $\mathcal{P}_n(x, F) = [p_{i,j}(x)]_{n \times n}$

$$p_{i,j}(x) = \begin{cases} \binom{i}{j}_F x^{i-j} & i \geq j \text{ ise,} \\ 0 & i < j \text{ ise,} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $n \times n$ tipindeki matrise genelleştirilmiş Fibo-Pascal matrisi denir [28].

Koçer [28], genelleştirilmiş Fibo-Pascal matrisinin tersinin $a_1 = 1$, $a_n = -\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k}_F a_k$ olmak üzere

$$v_{ij} = \begin{cases} \binom{i}{j}_F a_{i-j+1} x^{i-j} & i \geq j \text{ ise,} \\ 0 & i < j \text{ ise,} \end{cases}$$

ile tanımlı $\mathcal{V}_n = [v_{ij}]_{n \times n}$ matris olduğunu göstermiştir.

Örnek

6×6 tipinde genelleştirilmiş Fibo-Pascal matrisi

$$\mathcal{P}_6(x, F) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x^2 & x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x^3 & 2x^2 & 2x & 1 & 0 & 0 \\ x^4 & 3x^3 & 6x^2 & 3x & 1 & 0 \\ x^5 & 5x^4 & 15x^3 & 15x^2 & 5x & 1 \end{bmatrix}$$

olup, bu matrisin tersi

$$\mathcal{V}_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x^3 & 0 & -2x & 1 & 0 & 0 \\ -x^4 & 3x^3 & 0 & -3x & 1 & 0 \\ -6x^5 & -5x^4 & 15x^3 & 0 & -5x & 1 \end{bmatrix}$$

dir.

4.2. Tanım

$B_{n,F}(x)$ Bernoulli F -polinomu olmak üzere $\mathcal{B}_n(x, F) = [b_{ij}(x)]_{n \times n}$

$$b_{ij}(x) = \begin{cases} \binom{i}{j}_F B_{i-j,F}(x) & i \geq j \text{ ise,} \\ 0 & i < j \text{ ise,} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $n \times n$ tipindeki matrise Fibo-Bernoulli matrisi denir.

Örnek

5×5 tipinde Fibo-Bernoulli matrisi aşağıdaki gibidir.

$$\mathcal{B}_5(x, F) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x+1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x^2+x+\frac{1}{2} & x+1 & 1 & 0 & 0 \\ x^3+2x^2+x+\frac{1}{3} & 2x^2+2x+1 & 2x+2 & 1 & 0 \\ x^4+3x^3+3x^2+x+\frac{1}{5} & 3x^3+6x^2+3x+1 & 6x^2+6x+3 & 3x+3 & 1 \end{bmatrix}$$

Şimdi özel bir Fibonomial katsayılı matris tanımlayıp, bu matrisin genelleştirilmiş Fibo-Pascal matris ile faktörizasyonunu yaparak, Fibo-Bernoulli matrisini elde edeceğiz.

4.3. Tanım

F_n Fibonacci sayısı ve

$$w_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{F_{i-j+1}} \binom{i}{j}_F & i \geq j \text{ ise,} \\ 0 & i < j \text{ ise,} \end{cases}$$

olmak üzere $\mathcal{W}_n = [w_{ij}]_{n \times n}$ matrisine Fibonomial katsayılı matris denir.

Örnek

6×6 tipinde $\mathcal{W}_6$ matrisi

$$\mathcal{W}_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ \frac{1}{8} & 1 & 5 & \frac{15}{2} & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

4.4. Teorem

B_n^F Bernoulli-Fibonacci sayısı olmak üzere $\mathcal{T}_n = [t_{ij}]_{n \times n}$

$$t_{ij} = \begin{cases} \binom{i}{j}_F B_{i-j}^F & i \geq j \text{ ise,} \\ 0 & i < j \text{ ise,} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $n \times n$ matris olsun. O zaman

$$\mathcal{W}_n^{-1} = \mathcal{T}_n$$

dir.

İspat

Matris çarpımı ve Eş. 2.17 den yararlanılırsa

$$\begin{aligned}
(\mathcal{T}_n \cdot \mathcal{W}_n)_{ij} &= \sum_{k=j}^i t_{ik} w_{kj} \\
&= \sum_{k=j}^i \binom{i}{k}_F B_{i-k}^F \frac{1}{F_{k-j+1}} \binom{k}{j}_F \\
&= \sum_{k=j}^i \binom{i}{j}_F \binom{i-j}{k-j}_F B_{i-k}^F \frac{1}{F_{k-j+1}} \\
&= \binom{i}{j}_F \sum_{k=0}^{i-j} \binom{i-j}{k}_F B_{i-j-k}^F \frac{1}{F_{k+1}} \\
&= \binom{i}{j}_F \delta_{i-j,0}
\end{aligned}$$

$i = j$ için $(\mathcal{T}_n \cdot \mathcal{W}_n)_{ij} = 1$ ve $i \neq j$ için $(\mathcal{T}_n \cdot \mathcal{W}_n)_{ij} = 0$ olur. Böylece

$$\mathcal{T}_n \cdot \mathcal{W}_n = I_n$$

birim matris elde edilir.

Örnek

6×6 tipinde $\mathcal{T}_6$ matrisi

$$\mathcal{T}_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{10} & -1 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ -\frac{5}{8} & \frac{3}{2} & -5 & \frac{15}{2} & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

olup,

$$\mathcal{T}_6 \cdot \mathcal{W}_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{10} & -1 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ -\frac{5}{8} & \frac{3}{2} & -5 & \frac{15}{2} & -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ \frac{1}{8} & 1 & 5 & \frac{15}{2} & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

elde edilir.

4.5. Teorem

$\mathcal{B}_n(x, F)$ Fibo-Bernoulli matris, $\mathcal{P}_n(x, F)$ genelleştirilmiş Fibo-Pascal matris ve $\mathcal{W}_n$ Fibonomial katsayılı matris olmak üzere

$$\mathcal{B}_n(x, F) = \mathcal{P}_n(x, F) \cdot \mathcal{W}_n \quad (4.1)$$

dir.

İspat

$\mathcal{P}_n(x, F)$ ve Fibonomial katsayılı $\mathcal{W}_n$ matrislerinin tanımından

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_n(x, F) \cdot \mathcal{W}_n)_{ij} &= \sum_{k=j}^i \binom{i}{k}_F x^{i-k} \frac{1}{F_{k-j+1}} \binom{k}{j}_F \\ &= \binom{i}{j}_F \sum_{k=j}^i \frac{1}{F_{k-j+1}} \binom{i-j}{k-j}_F x^{i-k} \\ &= \binom{i}{j}_F \sum_{k=0}^{i-j} \frac{1}{F_{k+1}} \binom{i-j}{k}_F x^{i-j-k} \\ &= \binom{i}{j}_F B_{i-j, F}(x) \\ &= b_{ij}(x) \end{aligned}$$

olup,

$$\mathcal{P}_n(x, F) \cdot \mathcal{W}_n = \mathcal{B}_n(x, F)$$

elde edilir.

Örnek

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_5(x, F) \cdot \mathcal{W}_5 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x^2 & x & 1 & 0 & 0 \\ x^3 & 2x^2 & 2x & 1 & 0 \\ x^4 & 3x^3 & 6x^2 & 3x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x+1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x^2+x+\frac{1}{2} & x+1 & 1 & 0 & 0 \\ x^3+2x^2+x+\frac{1}{3} & 2x^2+2x+1 & 2x+2 & 1 & 0 \\ x^4+3x^3+3x^2+x+\frac{1}{5} & 3x^3+6x^2+3x+1 & 6x^2+6x+3 & 3x+3 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \mathcal{B}_5(x, F) \end{aligned}$$

4.6. Teorem

$\mathcal{B}_n(x, F)$ Fibo-Bernoulli matrisinin tersi, B_n^F Bernoulli-Fibonacci sayısı ve

$$d_{ij} = \begin{cases} \binom{i}{j}_F \sum_{k=0}^{i-j} \binom{i-j}{k}_F B_{i-j-k}^F a_{k+1} x^k & i \geq j \text{ ise,} \\ 0 & i < j \text{ ise,} \end{cases}$$

olmak üzere $\mathcal{D}_n(x, F) = [d_{ij}]_{n \times n}$ matrisidir.

İspat

Eş. 4.1 ve ters matris özelliğinden

$$\mathcal{B}_n^{-1}(x, F) = \mathcal{W}_n^{-1} \cdot \mathcal{P}_n^{-1}(x, F) = \mathcal{T}_n \cdot \mathcal{V}_n$$

dir. $i < j$ için

$$(\mathcal{T}_n \cdot \mathcal{V}_n)_{ij} = 0$$

ve $i \geq j$ için

$$\begin{aligned} (\mathcal{T}_n \cdot \mathcal{V}_n)_{ij} &= \sum_{k=j}^i \binom{i}{k}_F B_{i-k}^F \binom{k}{j}_F a_{k-j+1} x^{k-j} \\ &= \binom{i}{j}_F \sum_{k=j}^i \binom{i-j}{k-j}_F B_{i-k}^F a_{k-j+1} x^{k-j} \\ &= \binom{i}{j}_F \sum_{k=0}^{i-j} \binom{i-j}{k}_F B_{i-j-k}^F a_{k+1} x^{k-j} \\ &= d_{ij} \end{aligned}$$

olup, böylece

$$\mathcal{T}_n \cdot \mathcal{V}_n = \mathcal{D}_n(x, F)$$

elde edilir.

Örnek

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_5 \cdot \mathcal{V}_5 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & -2 & 1 & 0 \\ \frac{3}{10} & -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 & 0 & 0 \\ x^3 & 0 & -2x & 1 & 0 \\ -x^4 & 3x^3 & 0 & -3x & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x-1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x+\frac{1}{2} & -x-1 & 1 & 0 & 0 \\ x^3-x-\frac{1}{3} & 2x+1 & -2x-2 & 1 & 0 \\ -x^4-3x^3+x+\frac{3}{10} & 3x^3-3x-1 & 6x+3 & -3x-3 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \mathcal{D}_5(x, F) \end{aligned}$$

İlginçtir ki; Fibo-Bernoulli matrisi, Bernoulli F -polinomları kullanılarak oluşturulurken, bu matrisin tersinde ise Bernolli-Fibonacci sayıları karşımıza çıkmaktadır.

4.7. Tanım

$E_{n,F}$ Euler-Fibonacci sayısı ve

$$e_{ij} = \begin{cases} \binom{i}{j}_F E_{i-j,F} x^{i-j} & i \geq j \text{ ise,} \\ 0 & i < j \text{ ise,} \end{cases}$$

olmak üzere, $n \times n$ tipinden $\mathcal{E}_n(x, F) = [e_{ij}(x)]_{n \times n}$ matrisine Fibo-Euler matrisi denir.

Örnek

5×5 Fibo-Euler matrisi

$$\mathcal{E}_5(x, F) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{x}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{x^2}{4} & -\frac{x}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{x^3}{4} & -\frac{x^2}{2} & -x & 1 & 0 \\ \frac{5x^4}{8} & \frac{3x^3}{4} & -\frac{3x^2}{2} & -\frac{3x}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

4.8. Teorem

$n \times n$ tipinden $\mathcal{E}_n(x, F)$ Fibo-Euler matrisinin tersi I_n birim matris olmak üzere,

$$\mathcal{H}_n(x, F) = \frac{1}{2} \left(\mathcal{P}_n(x, F) + I_n \right) \quad (4.2)$$

biçimindeki $\mathcal{H}_n(x, F) = [\varepsilon_{ij}(x)]_{n \times n}$ matrisidir.

İspat

Matris çarpımı yapılırsa

$$\mathcal{E}_n(x, F) \cdot \frac{1}{2}(\mathcal{P}_n(x, F) + I_n) = [c_{ij}]_{n \times n}$$

olup,

$$[c_{ij}]_{n \times n} = \frac{1}{2} \mathcal{E}_n(x, F) \cdot \mathcal{P}_n(x, F) + \frac{1}{2} \mathcal{E}_n(x, F)$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=j}^i \binom{i}{k}_F E_{i-k, F} x^{i-k} \binom{k}{j}_F x^{k-j} + \frac{1}{2} \sum_{k=j}^i \binom{i}{j}_F E_{i-j, F} x^{i-j} \\ &= \frac{1}{2} \binom{i}{j}_F \sum_{k=j}^i \binom{i-j}{k-j}_F E_{i-k, F} x^{i-j} + \frac{1}{2} \binom{i}{j}_F \sum_{k=j}^i E_{i-j, F} x^{i-j} \\ &= \frac{1}{2} \binom{i}{j}_F x^{i-j} \left[\sum_{k=0}^{i-j} \binom{i-j}{k}_F E_{i-j-k, F} + E_{i-j, F} \right] \end{aligned}$$

Eş. 2.30 kullanılırsa

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \frac{1}{2} \binom{i}{j}_F x^{i-j} 2 \delta_{0, i-j} \\ &= \binom{i}{j}_F x^{i-j} \delta_{0, i-j} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $i = j$ için

$$c_{ii} = \binom{i}{j}_F x^{i-j} \delta_{0, i-j} = 1$$

ve $i \neq j$ için

$$c_{ij} = \binom{i}{j}_F x^{i-j} \delta_{0, i-j} = 0$$

olup,

$$\mathcal{E}_n(x, F) \cdot \frac{1}{2} \left(\mathcal{P}_n(x, F) + I_n \right) = I_n$$

birim matris olur.

Örnek

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\mathcal{P}_5(x, F) + I_5 \right) &= \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x^2 & x & 1 & 0 & 0 \\ x^3 & 2x^2 & 2x & 1 & 0 \\ x^4 & 3x^3 & 6x^2 & 3x & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}x^2 & \frac{1}{2}x & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}x^3 & x^2 & x & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}x^4 & \frac{3}{2}x^3 & 3x^2 & \frac{3}{2}x & 1 \end{bmatrix} \\ &= \mathcal{H}_5(x, F) \end{aligned}$$

Şimdi Fibo-Bernoulli matrisini, Fibo-Euler matrisinin tersinden yararlanarak bulacağız.

Sonuç

$\mathcal{B}_n(x, F)$ Fibo-Bernoulli matrisi olmak üzere

$$\mathcal{B}_n(x, F) = \left(2 \mathcal{H}_n(x, F) - I_n \right) \cdot \mathcal{W}_n \quad (4.3)$$

dir.

İspat

Eş. 4.2 den

$$\mathcal{H}_n(x, F) = \frac{1}{2} \left(\mathcal{P}_n(x, F) + I_n \right)$$

olup, buradan

$$\mathcal{P}_n(x, F) = 2 \mathcal{H}_n(x, F) - I_n \quad (4.4)$$

bulunur. Eş. 4.4 ifadesi Eş. 4.1 de yazılırsa

$$\mathcal{B}_n(x, F) = \left(2 \mathcal{H}_n(x, F) - I_n \right) \cdot \mathcal{W}_n$$

elde edilir.

Örnek

$$\begin{aligned} & \left(2 \mathcal{H}_5(x, F) - I_5 \right) \cdot \mathcal{W}_5 \\ &= \left(2 \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}x^2 & \frac{1}{2}x & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}x^3 & x^2 & x & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}x^4 & \frac{3}{2}x^3 & 3x^2 & \frac{3}{2}x & 1 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \right) \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & 1 & 3 & 3 & 1 \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x+1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x^2+x+\frac{1}{2} & x+1 & 1 & 0 & 0 \\ x^3+2x^2+x+\frac{1}{3} & 2x^2+2x+1 & 2x+2 & 1 & 0 \\ x^4+3x^3+3x^2+x+\frac{1}{5} & 3x^3+6x^2+3x+1 & 6x^2+6x+3 & 3x+3 & 1 \end{array} \right] \\ &= \mathcal{B}_n(x, F) \end{aligned}$$

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, literatür hakkında bilgi verilmiştir. İkinci bölümde, tezde kullanılacak temel kavramlardan bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde, çeşitli polinomlar, sayılar ve üreteç fonksiyonlar elde edilmiştir ve bazı özelliklerine yer verilmiştir. Dördüncü bölümde çalışmanın asıl amacı olan Fibo-Bernoulli matrisleri ve çeşitli Fibonomial katsayılı matrisler tanımlanmış, bu matrislerin tersi olan matrisler elde edilmiş ve faktörizasyonları yapılarak aralarındaki ilişkiler bulunmuştur.

Bu çalışma boyunca kullanılan Bernoulli F -polinomlarının, Fibonomial anlamda Stirling sayıları ile ilişkisi gösterilebilir ve çeşitli indirgeme bağıntıları elde edilebilir. Ayrıca elamanları Fibonomial katsayılı Stirling sayıları olan matris tanımlanarak Fibo-Bernoulli matris ile ilişkisi bulunabilir. Harmonik Fibonacci polinom matrisi tanımlanarak, yine bu matrisin çeşitli özellikleri ve faktörizasyonu bulunabilir.

KAYNAKLAR

1. Bernoulli, J. (1713). *Ars conjectandi*. Basel: Published Posthumously.
2. Nörlund, N. E. (1924). *Vorlesungen über differenzenrechnung* (First edition). New York: Chelsea Publishing Company, 10-25.
3. Roman, S. (1984). *The umbral calculus*. New York: Academic Press Inc.
4. Carlitz, L. (1948). q -Bernoulli numbers and polynomials. *Duke Mathematical Journal*, 15(4), 987-1000.
5. Al-Salam, W. A. (1958). q -Bernoulli numbers and polynomials. *Mathematische Nachrichten*, 17, 239-260.
6. Kac, V., Cheung P. (2002). *Quantum calculus*. New York: Springer.
7. Hegazi, A. S., Mansour, M. (2006). A Note on q -Bernoulli numbers and polynomials. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, 13(1), 9-18.
8. Kim, D. S., Kim, T. (2014). Some identities of q -Euler polynomials arising from q -umbral calculus. *Journal of Inequalities and Applications*, 2014(19).
9. Kim, D. S., Kim, T. (2014). q -Bernoulli polynomials and q -umbral calculus. *Science China Mathematics*, 57(9), 1867-1874.
10. Kim, T., Jang, L.C. and Pak, H.K. (2001). A note on q -Euler and Genocchi numbers. *Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences*, 77(8), 139-141.
11. Srivastava, H. M., Pinter, A. (2004). Remarks on some relationships between the Bernoulli and Euler polynomials. *Applied Mathematics Letters*, 17, 375-380.
12. Çatma, G. (2013). *Bernoulli and Euler polynomials*. Master Thesis, Institute of Graduate Studies and Research, Eastern Mediterranean University, North Cyprus.
13. Zhang, Z., Whang, J. (2006). Bernoulli matrix and its algebraic properties. *Discrete Applied Mathematics*, 154(11), 1622-1632.
14. Zhang, Z. (1997). The linear algebra of generalized Pascal matrix. *Linear Algebra and its Applications*, 250, 51-60.
15. Ernst, T. (2008). q -Pascal and q -Bernoulli matrices and umbral approach. *Department of Mathematics Uppsala University D.M. Report*, Uppsala, 2008:23.
16. Ernst, T. (2018). On several q -Special matrices, including the q -Bernoulli and

- q -Euler matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 542, 422-440.
17. Zheng, D. (2008). q -analogue of the Pascal matrix. *Ars Combinatoria*, 80, 321-336.
 18. Tuglu, N., Kuş, S. (2015). q -Bernoulli matrices and their some properties. *Gazi University Journal of Science*, 28(2), 269-273.
 19. Call, G. S., Velleman, D. J. (1993). Pascal's matrices. *American Mathematical Monthly*, 100(4), 372-376.
 20. Yang, S. L., Liu, Z. K. (2005). Explicit inverse of the Pascal matrix plus one. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2006, 1-7.
 21. Chan, O. Y. ve Manna, D. (2012). A New q -Analogue for Bernoulli numbers. *The Ramanujan Journal*, 30(1), 125-152.
 22. Çamdelen, N. A. (2010). *Genelleştirilmiş Pascal matrisleri*, Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
 23. Kim, D. S., Kim, T. (2015). Umbral calculus associated with Bernoulli polynomials. *Journal of Number Theory*, 147, 871-882.
 24. Liu, G. (2008). Generating functions and generalized Euler numbers. *Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences*, 84(2), 29-34.
 25. Kim, T. (2008). Note on the Euler numbers and polynomials. *Advanced Studies in Contemporary Mathematics*, 17(2), 131-136.
 26. İnternet: Quintana, Y., Ramirez, W. and Urieles, A. (2018). Euler matrices and their algebraic properties revisted. URL:<https://arxiv.org/pdf/1811.01455.pdf>, Son Erişim Tarihi: 04.02.2020.
 27. Infante, G. M., Ramirez, J. L. and Sahin, A. (2017). Some results on q -analogue of the Bernoulli, Euler and Fibonacci matrices. *Mathematical Reports*, 19(69), 4, 399-417.
 28. Koçer, E. G., Tuglu, N. (2013). *The Pascal matrix associated with Fontené-Ward generalized binomial coefficients*. 4th International Conference on Matrix Analysis and Applications (ICMAA-2013), Konya, Turkey.
 29. Krot, E. (2004). An introduction to finite fibonomial calculus. *Central European Journal of Mathematics*, 2(5), 754-766.
 30. Kwasniewski, A. K., Krot, E. (2008). Lucky 7-th exercises on inversion formulas and Fibonomial coefficients. *Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society*, 11(1), 65-68.

31. Özvatan, M. (2018). *Generalized Golden-Fibonacci Calculus and Applications*, Master Thesis, The Graduate School of Engineering and Sciences of Izmir Institute of Technology, İzmir.
32. Pashaev, O.K., Nalci, S. (2012). Golden quantum oscillator and Binet-Fibonacci calculus. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 45(1), 1-23.
33. Dattoli, G., Germano, B., Licciardi, S. and Martinelli M. R. (2018). Umbral methods and harmonic numbers. *Axioms*, 7(62), 1-9.
34. Dattoli, G., Srivastava, H.M. (2008). A note on harmonic numbers, umbral calculus and generating functions. *Applied Mathematics Letters*, 21(79), 686-693.
35. Cvijovic, D. (2010). The Dattoli–Srivastava conjectures concerning generating functions involving the harmonic numbers. *Applied Mathematics and Computation*, 215(11), 4040-4043.
36. İnternet: Mezö, I. (2011). Some possible q –generalizations of harmonic numbers. URL:<https://arxiv.org/pdf/1106.5029.pdf>, Son Erişim Tarihi: 04.02.2020.
37. Tuglu, N., Kızılateş, C. and Kesim, S. (2015). On the harmonic and hyperharmonic Fibonacci numbers. *Advances in Difference Equations*, 2015(297), 1-12.
38. Sadjang, P. N. (2018). On the fundamental theorem of (p, q) –calculus and some (p, q) –Taylor formulas. *Results in Mathematics*, 73(39), 1-21.
39. Lalin, M.,N. (2005). *Bernoulli numbers*. Junior Number Theory Seminar-University of Texas, Austin September 6th.
40. Kuş, S., Tuglu, N. and Kim, T. (2019). Bernoulli F –polynomials and Fibo-Bernoulli matrices. *Advances in Difference Equations*. 2019(145).
41. İnternet: Licciardi, S. (2018). Umbral calculus, a different mathematical language. URL: <https://arxiv.org/pdf/1803.03108.pdf>. Son Erişim Tarihi: 04.02.2020.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı : KUŞ, Semra
 Uyuğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 1982, Kırşehir
 Medeni hali : Evli
 e-mail : semrakus40@gmail.com



Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Doktora	Gazi Üniversitesi/Matematik Ana Bilim Dalı	Devam ediyor.
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi/Matematik Ana Bilim Dalı	2013
Lisans	Selçuk Üniversitesi/Matematik Öğretmenliği	2005
Lise	Kırşehir Anadolu Öğretmen Lisesi	2000

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2008-	Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi	Öğretim Görevlisi

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

1. Kuş, S., Tuglu, N. and Kim, T. (2019). Bernoulli F -polynomials and Fibo-Bernoulli matrices. *Advances in Difference Equations*. 2019(145).
2. Tuglu, N., Kuş, S. (2015). q -Bernoulli matrices and their some properties. *Gazi University Journal of Science*, 28(2), 269-273.
3. Tuglu, N., Kuş, S. (2013). q -Bernoulli matrices and its some properties. ICMAA-2013, Konya, Turkey.
4. Kuş, S., Tuglu, N. (2019). *Some properties of Fibo-Bernoulli matrices*. ICMME-2019, Konya, Turkey.



GAZİ GELECEKTİR..