

**MÖBIUS İNVERSİYON FORMÜLÜ,
GENELLEŞTİRİLMELERİ VE UYGULAMALARI**

Mehmet YILDIZ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**OCAK 2010
ANKARA**

Mehmet YILDIZ tarafından hazırlanan MÖBİUS İNVERSİYON FORMÜLÜ, GENELLEŞTİRİLMELERİ VE UYGULAMALARI adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Ercan ALTINIŞIK
Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU (başkan)
Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Ercan ALTINIŞIK(danışman)
Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Prof. Dr. Dursun TAŞCI (üye)
Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Tarih: / / 2010

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Bilal TOKLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Mehmet YILDIZ

**MÖBIUS İNVERSİYON FORMÜLÜ,
GENELLEŞTİRİLMELERİ VE UYGULAMALARI
(Yüksek Lisans Tezi)**

Mehmet YILDIZ

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Ocak 2010**

ÖZET

Bu çalışmada, sayılar teorisinde aritmetik fonksiyonların kullanışlı araçlarından olan Möbius inversiyon formülünün bazı genelleştirilmeleri sunulmuştur. Bu genelleştirilmelerin çeşitli konulardaki uygulamaları verilmiştir. Son bölümde Möbius inversiyon formülünün genelleştirilmesi ile ilgili yaptığımız çalışmalar tartışılmıştır.

Bilim kodu : 403
Anahtar Kelimeler : Möbius inversiyon formülü, aritmetik fonksiyon, Dirichlet konvulasyonu, incidence cebiri, incidence fonksiyonu
Sayfa Adedi : 69
Tez Yöneticisi : Yrd. Doç. Dr. Ercan ALTINIŞIK

**MÖBIUS INVERSION FORMULA,
ITS GENERALIZATIONS AND APPLICATIONS
(M.Sc.Thesis)**

Mehmet YILDIZ

**GAZİ UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
January 2010**

ABSTRACT

In this study, we present some generalizations of Möbius inversion formula which is an useful tool for arithmetical functions on the theory of numbers. Then we give its applications to various areas. In the last section we argue our study on its generalizations.

Science Code	: 403
Key Words	: Möbius inversion formula, arithmetical function, Dirichlet convolution, incidence algebra, incidence function
Page Number	: 69
Adviser	: Assistant Professor, Ercan ALTINIŞIK

TEŞEKKÜR

Yaptığımız çalışmalar boyunca çok kıymetli olan zamanını ve bilgilerini bizden esirgemeyen çok değerli ve sabırlı hocam Yrd. Doç. Dr. Ercan ALTINIŞIK ‘a yürekten teşekkürlerimi bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	viii
1. GİRİŞ	1
2. ÖN BİLGİLER	8
2.1. Aritmetik Fonksiyon Kavramı	8
2.2. Aritmetik Fonksiyonların Dirichlet Çarpımları	12
2.3. Möbius inversiyon Formülü	12
2.4. Çarpımsal Fonksiyonlar	20
3. KISMİ SIRALI KÜMELERDE MÖBIUS İNVERSİYON FORMÜLÜ	24
3.1. Kısmi Sıralı Kümeler	24
3.2. Incidence Cebiri	31
3.3. Kısmi Sıralı Kümelerde Möbius İversiyon Formülü ve Uygulamaları...	34
4. GENELLEŞTİRİLMİŞ MÖBIUS İNVERSİYON FORMÜLLERİ	39
4.1. Parametrik Möbius İversiyon Formülü	39
4.2. Soyut Möbius İversiyon Formülü	44
4.3. Selberg-Çarpımsal Fonksiyonlar İçin Genelleştirilmiş Möbius İversiyon Formülü	51
4.4. Kombinatorik Analizde Möbius İversiyon Uygulaması	60
5. SONUÇ	66

	Sayfa
KAYNAKLAR	68
ÖZGEÇMİŞ	70

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 3.1. 5 , B_3 ve D_{12} kısmi sıralı kümelerin Hasse diyagramı	37
Şekil 3.2. Eş.3.1. ile verilen kısmi sıralı kümenin Hasse diyagramı	45

1.GİRİŞ

Euler “Sonsuzun Analizine Giriş” adlı eserinin [1] ”Çarpımlardan Elde Edilen Seriler

Üzerine” başlıklı bölümünde $P = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$ çarpımının $P = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ olarak

yazılabileceğini göstermiş ve $PQ=1$ koşulunu sağlayan Q çarpımının

$Q = \frac{1}{P} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$ olarak yazılabileceğinin açık olduğunu söyledikten sonra

$$Q = \frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} - \frac{1}{3^s} - \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} - \frac{1}{7^s} + \frac{1}{10^s} - \dots$$

olduğunu ispatlamıştır. Euler, bu serinin $\frac{1}{(p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_r^{n_r})^s}$ genel teriminin

katsayısının $n_1 = n_2 = \dots = n_r = 0$ ise 1, $n_1 = n_2 = \dots = n_r = 1$ ise $(-1)^r$ $\exists n_i \geq 2$ ise 0 olduğunu sözcüklerle ifade etmiştir.

Euler’ın bu şekilde tanımladığı fonksiyonun aritmetik önemi Möbius tarafından keşfedilmiştir. Möbius [2] çalışmasında; “verilen bir keyfi $f(z)$ fonksiyonu ve

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f(z^n) \quad (1.1)$$

ile tanımlı $g(z)$ fonksiyonu için $f(z)$ yi $g(z^n)$ in terimleri cinsinden

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n g(z^n) \quad (1.2)$$

olarak nasıl belirlenebilir?” problemini ortaya atmıştır. Eğer $f(z)$ fonksiyonu

$f(z) = c_1 z + c_2 z^2 + \dots$ biçiminde bir kuvvet serisi olarak alınırsa bu problem biçimsel

kuvvet serileri ile ilgili bir problem olarak ele alınabilir. Gerçekten verilen $(a_n)_{n \geq 1}$ katsayıları

$$\sum_{d|n} a_d b_{\frac{n}{d}} = \begin{cases} 1, & n=1 \text{ ise} \\ 0, & n>1 \text{ ise} \end{cases} \quad (1.3)$$

eşitliğinde yerlerine yazılarak $(b_n)_{n \geq 1}$ dizisi elde edilir. Özel olarak her n pozitif tamsayısı için $a_n = 1$ alınırsa b_n , μ ile gösterdiğimiz Möbius fonksiyonundan başka bir şey değildir. Buradan Möbius'ün sorusunun $a_n = 1$ için yanıtı; biçimsel seriler için

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f(z^n) \Leftrightarrow f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) g(z^n) \quad (1.4)$$

Möbius inversiyon formülüdür. Burada $f(e^z) = F(z)$ ve $g(e^z) = G(z)$ alınırsa Eş.1.1. ve Eş.1.2. eşitlikleri sırasıyla

$$G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n F(nz) \text{ ve } F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n G(nz)$$

biçiminde daha uygun bir hal alır [3].

Günümüzde Möbius fonksiyonu için kullandığımız μ ilk kez 1874 yılında F. Mertens tarafından kullanılmıştır [3-4].

Hille ve Szasz'ın çalışmalarına [5-6] kadar bu seriler biçimsel olarak ele alınmıştır.

Hille ve Szasz'ın çalışmalarının bir sonucu olarak “ $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $g(n) = \sum_{m=1}^{\infty} f(mn)$ ”

ve $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\varepsilon} |f(n)|$ yakınsak olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı vardır ancak ve ancak

$f(n) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(m)g(mn)$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\varepsilon} |g(n)|$ yakınsak olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı vardır” teoremini ispatlamışlardır. Böylece Eş.1.1. ve Eş.1.2. ile verilen serilerin yakınsaklıkları da incelenmiştir.

Möbius inversiyon formülünün

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d) \Leftrightarrow f(n) = \sum_{d|n} \mu(d)g\left(\frac{n}{d}\right) \quad (1.5)$$

biçimindeki ilk sonlu versiyonu Dedekind [7] ve Liouville [8] tarafından eş zamanlı olarak 1857 yılında verilmiştir.

Bu gelişmelerden bağımsız olarak 1935 yılında Weisner [9] ve 1936 yılında Philip Hall [10] grup teori problemleri ile ilgili çalışmalarında Eş.1.5. ile verilen Möbius inversiyon formülünün genel bir halini elde etmişlerdir. Hall bir kümenin kuvvet kümesinin kapsama bağıntısı ile oluşturduğu kısmi sıralı küme üzerinde Möbius inversiyon formülünü yeniden keşfetmiştir. Weisner ise daha genel olarak herhangi bir kısmi sıralı kümede bu genellemeyi gerçekleştirmiştir. $(P, \leq)$ bir kısmi sıralı küme olsun. Verilen bir $f: P \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu; bir $t \in P$ için $x \geq t$ olmadıkça $f(x) = 0$ şartını sağlasın. Weisner çalışmasında [9] $x \in P$ için

$$g(x) = \sum_{x \leq z} f(z) \text{ ise } f(x) = \sum_{z \leq x} g(z)\mu(z, x) \quad (1.6)$$

olduğunu ispatlamıştır.

Weisner’in grup teorideki bir problemin çözümü için elde ettiği kısmi sıralı kümeler üzerindeki Möbius inversiyon formülü 1964 yılında Rota [11] tarafından çok daha genel bir amaç için verilmiştir.

Gerçekten bu kısmi sıralı kümenin elemanlarının grup, halka, cisim, vektör uzayı gibi cebirsel yapıların alt yapıları olması, bir topolojik uzayın açık veya kapalı kümelerinin olması, bir grafin köşelerinin olması, bir parçalanmanın bloklarının olması durumlarında Möbius inversiyon formülünün özellikle sayma problemleri ile ilgili bir çok problemin çözümünde kullanılması bu aracın genelliğini çok iyi vurgulamaktadır.

Rota'dan sonra yapılan çalışmalarda [12] P bir kısmi sıralı küme olmak üzere $P \times P$ den $\mathbb{C}$ ye tanımlanan incidence fonksiyonları için Möbius inversiyon formülü elde edilmiştir. $(P, \leq)$ yerel sonlu bir kısmi sıralı küme olmak üzere $F(P)$ incidence cebiri üzerinde $f * g$ konvülasyonu $\forall x, y \in P$ için

$$g(x) = \sum_{y \leq x} f(y) \Leftrightarrow f(x) = \sum_{y \leq x} g(y) \mu(y, x) \quad (1.7)$$

ile tanımlanmaktadır. Bu cebirin birim elemanı

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1 & x = y \\ 0 & x \neq y \end{cases}$$

olup

$$\zeta(x, y) = \begin{cases} 1 & x \leq y \\ 0 & \text{aksi halde} \end{cases}$$

incidence fonksiyonunun $*$ konvülasyonuna göre tersi P nin Möbius fonksiyonu μ dir. Bu durumda Möbius inversiyon formülü $f \in F(P)$ olmak üzere

$$g = f * \zeta \Leftrightarrow f = g * \mu \quad (1.8)$$

veya

$$h = e * f \Leftrightarrow f = \mu * h \quad (1.9)$$

halini alacaktır.

Bu gelişmelerden sonra 1997 yılında Chen [13] yaptığı genelleştirme ile Möbius fonksiyonunun ortaya çıktığı seriler ile ilgili problem ile Möbius inversiyon formülünün sonlu versiyonunu birleştirmeyi başarmıştır. A boştan farklı bir küme, $F(P)$ incidence cebiri ve $*$ Eş.1.7. ile tanımlanan konvülasyon olmak üzere $P \times A$ üzerindeki kompleks değerli fonksiyonlar $P \times A$ üzerinde bir vektör uzayı olup bu uzayı $F(P \times A)$ ile gösterilsin. $f \in F(P)$ $\xi \in F(P \times A)$ olmak üzere

$$D_{\xi} f(a, x) = \xi f(a, x) = \sum_{a \leq b} \xi(a, b) f(b, x)$$

ile $F(P)$ soldan $F(P \times A)$ ya etki eder ve benzer biçimde

$$D_{\xi} f(x, b) = f \xi(x, b) = \sum_{a \leq b} f(x, a) \xi(a, b)$$

ile $F(P)$ sağdan $F(P \times A)$ ya etki eder. Chen $f \in F(P)$ tersinir ve

$$\eta(x, a) = \sum_{\substack{x \leq y \\ y \in P}} f(x, y) \xi(y, a) \text{ mutlak yakınsak ise } \xi(x, a) = \sum_{\substack{x \leq y \\ y \in P}} f^{-1}(x, y) \eta(y, a)$$

Möbius inversiyon formülünü elde etmiştir.

Haukkanen [14], 1997 yılında $(S, \subseteq)$ ve $(S, \leq)$ iki kısmi sıralı küme olmak üzere $F(P \times P, \subseteq \leq)$ kümesi üzerinde tanımlı $f : (S \times S) \times (S \times S) \rightarrow \mathbb{C}$ incidence fonksiyonları için Möbius inversiyon formülünün farklı bir anlamda genellemesini vermiştir. Yine bu çalışmasında Haukkanen regüler aritmetik konvülasyonlar yardımı ile literatürde yer alan birkaç genelleştirmeyi gerçekleştirmiş ve bu genelleştirme yardımı ile yeni inversiyon formülleri elde etmiştir.

2006 yılında Bundschuh, Hsu ve Shive [15] Selberg-çarpımsal aritmetik fonksiyonların özel bir S sınıfı üzerinde Möbius inversiyon formülünün yeni bir genellemesini elde etmiştir. Bunu ortaya attıkları “verilen bir $F \in S$ fonksiyonu ve α, β aritmetik fonksiyonları için

$$\beta(n) = \sum_{d|n} F\left(\frac{n}{d}\right) \alpha(d) \Leftrightarrow \alpha(n) = \sum_{d|n} G\left(\frac{n}{d}\right) \beta(d)$$

biçiminde bir Möbius tipi inversiyon formülü geçerli olacak şekilde bir $G \in S$ fonksiyonu bulunabilir mi?” problemini çözerek yapmışlardır. Ayrıca buradaki genelleştirmeye benzer bir genelleştirme 1963 yılında Daykin [16] tarafından elde edilmiştir.

Bu çalışmada öncelikle literatürde yer alan Möbius inversiyon formülünün genelleştirmelerinin ve uygulamalarının bir çoğu gözden geçirilmiştir. Aynı zamanda $F(P)$ incidence cebiri üzerinde Eş.1.7. ile verilen $*$ konvolüsyonunda $z \in [x, y]$ yerine z yi $[x, y]$ aralığının bir A alt aralığından seçerek Eş.1.8. ve Eş.1.9. ile verilen inversiyon formülleri genelleştirilmeye çalışıldı. Bu nedenle literatürde yer alan genelleştirme ve uygulamalara daha çok bu amaç doğrultusunda yer vermeye özen gösterildi

Çalışmanın birinci bölümünü konunun tarihsel gelişimini ve çalışmanın amacını içeren bu giriş bölümü oluşturmaktadır. İkinci bölümde sayılar teorisinde aritmetik fonksiyonlar ile ilgili kısa ön bilgilerden sonra klasik Möbius inversiyon formülü ifade edildi. Üçüncü bölümde kısmi sıralı kümeler ve latislerle ilgili alt yapıdan sonra kısmi sıralı kümeler için Möbius inversiyon formülü ve kombinatorikteki çeşitli uygulamaları sunulmuştur. Dördüncü bölümde Haukkanen; Chen ve Bundschuh, Hsu ve Shive tarafından elde edilen çeşitli genelleştirmeler ve uygulamalar sunulmuştur. Beşinci bölümde üzerinde çalıştığımız genelleştirmeler ile ilgili yanıt aradığımız sorular sıralanmıştır. Bu sorularla ilgili sonuçlar tartışılmıştır.

2. ÖN BİLGİLER

2.1. Aritmetik Fonksiyon Kavramı

Öncelikle Möbius fonksiyonu ve Möbius inversiyon formülünün sayılar teorisindeki başlangıcından bahsedilecektir. Bunun için sayılar teorisinin bazı araçlarını özetleyelim.

2.1. Tanım

Tanım kümesi doğal sayılar değer kümesi kompleks sayılar olan $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonlarına aritmetik fonksiyon veya teorik-sayı fonksiyonu denir. Bu fonksiyonları karmaşık sayıların bir dizisi olarak $(a_n) = (f(n))$ şeklinde de gösterebiliriz [17].

Möbius fonksiyonu, Euler fonksiyonu, kuvvet fonksiyonu ve bölen fonksiyonu aritmetik fonksiyonlara birer örnektir. Şimdi sırasıyla bu aritmetik fonksiyonları ve temel özelliklerini [17] ve [18] kaynaklarının ışığında görelim. Bu konuda daha ayrıntılı bilgilere [19-22] kitaplarından ulaşılabilir.

2.2. Tanım

$p_1, p_2, \dots, p_k$ farklı asallar olmak üzere n pozitif tamsayısı $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ olarak yazılsın. Klasik Möbius fonksiyonu

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & , \quad n = 1 \\ (-1)^k & , \quad a_1 = a_2 = \dots = a_k = 1 \\ 0 & , \quad \text{aksi halde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [17].

Şimdi bazı tamsayılar için Möbius fonksiyonunun değerlerini hesaplayalım. $15 = 3 \cdot 5$ olduğundan $\mu(15) = (-1)^2 = 1$; $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ olduğundan $\mu(30) = (-1)^3 = -1$ ve $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ olduğundan $\mu(60) = 0$.

2.1. Teorem

$$\text{Her } n \in \mathbb{Z}^+ \text{ için } \sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & n=1 \\ 0, & n>1 \end{cases}$$

dir [18].

İspat

$n=1$ ise formül açıkça doğrudur. Varsayalım $n>1$ ve $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ olsun.

$\sum_{d|n} \mu(d)$ toplamının terimlerinde sıfır olmayan terimler sadece $d=1$ ve d nin, farklı

$p_i \in \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ asalların çarpımı olarak yazılabildiği durumlardır. $0 \leq r \leq k$ olmak

üzere eğer d bu asalların r tanesinin çarpımı şeklinde yazılıyorsa o zaman Möbius fonksiyonunun tanımından $\mu(d) = (-1)^r$ dir. Bu r ler $\binom{k}{r}$ binom katsayısına eşit

sayıda seçilebilir. Yani $(-1)^r$ sayısına karşılık gelen d bölenlerinin sayısı $\binom{k}{r}$.

Böylece $\sum_{d|n} \mu(d)$ toplamını r üzerinden tanımlayabiliriz.

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} (-1)^r = (1 + (-1))^k = 0$$

elde edilir.

Bu teoremin kullanılmasıyla yapılacak basit hesaplamalar bize her p asalı için $\mu(p) = -1$ ve $\mu(p^2) = 0$ olduğunu gösterir. Aritmetik fonksiyonlara ikinci örnek olarak Euler fonksiyonunu verelim.

2.3. Tanım

$n \in \mathbb{Z}^+$ için *Euler ϕ fonksiyonu*; cebirsel anlamda $\phi(n) = |U_n|$ yani $\mathbb{Z}_n$ halkasının birimsellerinin sayısı veya sayılar teorisindeki ifadesi ile n ile aralarında asal ve n den büyük olmayan pozitif tamsayıların sayısı olarak tanımlayabiliriz [17-18].

n in bazı küçük değerleri için Euler fonksiyonunun değerleri aşağıdaki gibidir:

$$\phi(1) = 1, \phi(2) = 1, \phi(3) = 2, \phi(4) = 2, \phi(5) = 4$$

$$\phi(6) = 2, \phi(7) = 6, \phi(8) = 4, \phi(9) = 6, \phi(10) = 4$$

2.2. Teorem

$$\text{Her } n \in \mathbb{Z}^+ \text{ için } \sum_{d|n} \phi(d) = n$$

dir [18].

İspat

$S = \{1, 2, \dots, n\}$ olsun. Her $d | n$ için $S_d = \left\{ a \in S : (a, n) = \frac{n}{d} \right\}$ kümesini tanımlayalım.

S_d kümeleri S in bir parçalanışıdır. Çünkü eğer $a \in S$ ise o zaman $(a, n) = \frac{n}{d}$ olacak şekilde n in sadece bir tane d böleni vardır. Bundan dolayı $\sum_{d|n} |S_d| = |S| = n$ dir.

Geriye her bir d için $|S_d| = \phi(d)$ olduğunu göstermek kalıyor.

$$a \in S_d \Leftrightarrow a \in \mathbb{Z}, 1 \leq a \leq n \text{ ve } (a, n) = \frac{n}{d}.$$

Eğer her bir a tamsayısı için $a' = \frac{ad}{n}$ yi tanımlarsak $\frac{n}{d} = (a, n)$ a yı böldüğünden dolayı a' bir tamsayı olur. $a' = \frac{ad}{n}$ eşitliğini $\frac{d}{n}$ ile bölersek yukarıdaki çift gerektirmeyi $1 \leq a' \leq n$ olmak üzere

$$a \in S_d \Leftrightarrow a = \frac{n}{d} \cdot a', a' \in \mathbb{Z} \text{ ve } (a', d) = 1$$

şeklinde yazabiliriz. Bundan dolayı $|S_d|$ $1 \leq a' \leq d$ olmak üzere d ile aralarında asal a' tamsayılarının sayısına eşittir. Bu, tanımdan $\phi(d)$ dir. Sonuç olarak $|S_d| = \phi(d)$.

2.4. Tanım

$\alpha \in \mathbb{R}$ ya da $\mathbb{C}$ olmak üzere $N^\alpha : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ $N^\alpha(n) = n^\alpha$ biçiminde tanımlanan aritmetik fonksiyona *kuvvet fonksiyonu* denir [17].

2.5. Tanım

$$\tau(n) = \sum_{d|n} 1 \text{ (} n \text{ in bölenlerinin sayısını gösteren fonksiyon),}$$

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d \text{ (} n \text{ in pozitif bölenlerinin toplamlarını ifade eden fonksiyonlar)}$$

biçiminde tanımlanan τ, σ bölen fonksiyonu olarak adlandırılır. Bölen fonksiyonu en genel haliyle $\alpha \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\sigma_\alpha(n) = \sum_{d|n} d^\alpha$ şeklinde tanımlanır [17].

2.2. Aritmetik Fonksiyonların Dirichlet Çarpımları

2.6. Tanım

f ve g aritmetik fonksiyonlarının *Dirichlet çarpımı* veya *konvülasyonu* her n pozitif tamsayısı için

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right)$$

ile tanımlanan $f * g$ aritmetik fonksiyonudur [17].

Eğer $e = \frac{n}{d}$ alınırsa $f * g$ çarpımını $(f * g)(n) = \sum_{de=n} f(d)g(e)$ şeklinde de ifade edilebilir [18].

2.3. Aritmetik Fonksiyonların Dirichlet Tersi ve Möbius İncersiyon Formülü

Cebirsel olarak $f(1) \neq 0$ şartını sağlayan aritmetik fonksiyonların kümesinin Dirichlet çarpımı ile bir abelyan grup oluşturduğunu göstermek için bazı tanım ve teoremleri ifade edeceğiz. Öncelikle tanımdan hareketle aritmetik fonksiyonların oluşturduğu kümenin Dirichlet çarpımına göre kapalı olduğunu söyleyebiliriz. Şimdi bu işlemin değişme ve birleşme özelliklerinin var olduğunu gösterelim.

2.3. Teorem

f , g ve h aritmetik fonksiyonlar olmak üzere

$$f * g = g * f \text{ ve } (f * g) * h = f * (g * h)$$

dir [18].

İspat

f ve g aritmetik fonksiyonlar olmak üzere. $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\begin{aligned}(f * g)(n) &= \sum_{ab=n} f(a)g(b) \\ &= \sum_{ab=n} g(a)f(b) \\ &= (g * f)(n)\end{aligned}$$

yazılabileceğinden $f * g = g * f$ elde edilir. Diğer taraftan f, g ve h aritmetik fonksiyonları verilsin. $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\begin{aligned}((f * g) * h)(n) &= \sum_{dc=n} (f * g)(d)h(c) \\ &= \sum_{dc=n} \left(\sum_{ab=d} f(a)g(b) \right) h(c) \\ &= \sum_{abc=n} f(a)g(b)h(c)\end{aligned}$$

ve benzer olarak

$$\begin{aligned}(f * (g * h))(n) &= \sum_{ae=n} f(a)(g * h)(e) \\ &= \sum_{ae=n} f(a) \left(\sum_{bc=e} g(b)h(c) \right) \\ &= \sum_{abc=n} f(a)g(b)h(c)\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $*$ işleminin birleşmeli olduğu görülür.

$f(1) \neq 0$ şartını sağlayan aritmetik fonksiyonların kümesinin Dirichlet çarpımı ile bir abelyan grup olması için verilen özelliklere ek olarak birim elemanının ve her

elemanının tersinin bu kümede var olması gerekir.

2.7. Tanım

Her n pozitif tamsayısı için

$$I(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 0, & n > 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan I fonksiyonuna *özdeşlik fonksiyonu* denir [17].

Aşağıdaki teorem, bu fonksiyonun yukarıda sözü edilen grubun birim elemanı olduğunu gösterir.

2.4. Teorem

f aritmetik fonksiyonu için $I * f = f * I = f$ eşitliği sağlanır [17].

İspat

$(f * I)(n) = \sum_{d|n} f(d)I(\frac{n}{d})$ eşitliğinin sağ tarafında sıfırdan farklı olan tek terim

$f(n)I(\frac{n}{n}) = f(n)I(1)$ dir. $I(1)=1$ olduğundan bu terim de $f(n)$ e eşittir. Benzer şekilde $(I * f)(n) = f(n)$ olduğu gösterilebilir.

Şimdi verilen bir f aritmetik fonksiyonunun hangi şartlarda tersinin var olduğunu ve tersinin nasıl bulunabileceğini gösteren aşağıdaki teoremi ifade ve ispat edelim.

2.5. Teorem (Aritmetik fonksiyonların Dirichlet tersi)

$f(1) \neq 0$ şartını sağlayan bir f aritmetik fonksiyonu verilsin. Bu takdirde f in Dirichlet tersi

$$n=1 \text{ için } f^{-1}(1) = \frac{1}{f(1)} \text{ ve } n>1 \text{ için } f^{-1}(n) = \frac{-1}{f(1)} \sum_{\substack{d|n \\ d < n}} f\left(\frac{n}{d}\right) f^{-1}(d)$$

ile tanımlanan f^{-1} aritmetik fonksiyonudur [18].

İspat

* değişmeli olduğundan $f^{-1} * f = I$ olduğunu göstermek yeterlidir. Yani

$\sum_{d|n} f^{-1}(d) f\left(\frac{n}{d}\right) = I(n)$ olduğunu göstermeliyiz. $n=1$ için $f^{-1}(1) f(1) = 1$ elde edilir.

$n > 1$ ise o zaman

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} f^{-1}(d) f\left(\frac{n}{d}\right) &= f^{-1}(n) f(1) + \sum_{\substack{d|n \\ d < n}} f^{-1}(d) f\left(\frac{n}{d}\right) \\ &= -\frac{f(1)}{f(1)} \sum_{\substack{d|n \\ d < n}} f^{-1}(d) f\left(\frac{n}{d}\right) + \sum_{\substack{d|n \\ d < n}} f^{-1}(d) f\left(\frac{n}{d}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

O halde buraya kadar yaptığımız işi şöyle özetleyebiliriz: $f(1) \neq 0$ şartını sağlayan aritmetik fonksiyonların kümesi Dirichlet çarpımı ile bir abelyan grup teşkil eder. Şimdi bu grubun önemli bir elemanı olan Möbius fonksiyonunun tersini tanımlayalım.

2.8. Tanım

Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $u(n) = 1$ biçiminde tanımlanan u fonksiyonuna *birim fonksiyon* denir [17].

2.1. Örnek

Teorem 2.1. den $\sum_{d|n} \mu(d) = I(n)$ olduğunu biliyoruz. Bu eşitliği Dirichlet çarpımının ve u fonksiyonunun tanımından hareketle

$$\begin{aligned} (\mu * u)(n) &= \sum_{d|n} \mu(d) u\left(\frac{n}{d}\right) \\ &= \sum_{d|n} \mu(d) \\ &= I(n) \end{aligned}$$

şeklinde de gösterebiliriz. Sonuç olarak $u = \mu^{-1}$ ve $\mu = u^{-1}$ dir. Bu son eşitlik aşağıdaki teoremin ispatında bize oldukça yardımcı olacaktır.

2.6. Teorem (Sayılar teorisinde Möbius inversiyon formülü)

f ve g aritmetik fonksiyonlar olmak üzere her $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) \Leftrightarrow g(n) = \sum_{d|n} f(d) \mu\left(\frac{n}{d}\right) \quad (2.1)$$

olmasıdır [17].

İspat

Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $f(n) = \sum_{d|n} g(d)$ olsun. Bu $f = g * u$ şeklinde ifade edilebilir. Her iki taraf μ ile çarpılırsa

$$f * \mu = (g * u) * \mu$$

ve bu eşitlikten

$$f * \mu = g * (u * \mu) = g * I = g$$

elde edilir. Yani açık olarak $g(n) = \sum_{d|n} f(d) \mu\left(\frac{n}{d}\right)$ dir.

Karşıt olarak $f * \mu = g$ eşitliğinin her iki tarafı u fonksiyonu ile çarpılırsa

$$(f * \mu) * u = f * (\mu * u) = f * I = f = g * u$$

ve buradan

$$f = g * u$$

elde edilir ki bu $f(n) = \sum_{d|n} g(d)$ anlamına gelir. .

Şimdi Dirichlet çarpımı ve Möbius inversiyon formülü yardımıyla aşağıdaki teoremi ispatlayalım.

2.7. Teorem

Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d}$ [18].

İspat

Teorem 2.2. den $\sum_{d|n} \phi(d) = n = N(n)$ olduğunu biliyoruz. Burada Eş.2.1. deki denklemde $f = N$ ve $g = \phi$ alıp Möbius inversiyon formülü uygulanırsa istenilen sonuca ulaşılır.

2.2. Örnek

$a \geq 1$ olmak üzere Teorem 2.7. yi kullanarak $\phi(p^a)$ nın değerini hesaplayalım.

$$\begin{aligned} \phi(p^a) &= \sum_{d|p^a} \mu(d) \frac{p^a}{d} \\ &= \mu(p^a) p^{a-1} + \cdots + \mu(p) p^{a-1} + \mu(1) p^a \\ &= p^a - p^{a-1} \end{aligned}$$

elde edilir.

2.3. Örnek

Yine Teorem 2.6. yı kullanarak n in bölenlerinin sayısını gösteren $\tau(n)$ ve n in bölenlerinin toplamını veren $\sigma(n)$ fonksiyonları için $\sum_{d|n} 1 = \tau(n)$ ve $\sum_{d|n} d = \sigma(n)$ eşitliklerinden faydalanarak

$$\sum_{d|n} \tau(d) \mu\left(\frac{n}{d}\right) = 1 \text{ ve } \sum_{d|n} \sigma(d) \mu\left(\frac{n}{d}\right) = n$$

özdeşlikleri elde edilebilir.

2.4. Örnek (Möbius inversiyon formülünün özel bir uygulaması)

Yuvarlak bir masa etrafına n tane sandalye yerleştiriliyor. Her bir sandalyeye bir erkek (E) veya bir kız (K) oturacaktır. Erkekler veya kızların farklılıkları dikkate alınmadığında 2^n muhtemel oturma şekli vardır. Oturanların her biri aynı yönde bir sonraki sandalyeye otururlarsa farklı bir oturma şekli elde edilir ancak bu işlem n kez tekrarlanırsa başlangıçtaki oturma şekline ulaşılır. Bir oturma düzeninde herkesin aynı yönde bir sonraki sandalyeye oturması ve bu işlemin istenildiği kadar tekrarlanması ile en fazla d farklı oturma düzeni ortaya çıkıyorsa bu oturma düzeninin periyodu d dir. Eğer bir oturma düzeninin periyodu d ise oturma düzeni yukarıdaki anlamda d kez aynı yönde döndürülürse yine başlangıçtaki oturma şekli elde edilir. Örneğin KK...K ve EE...E oturma düzenlerinin periyodu 1 dir. EKEK...EK ve KEKE...KE oturma düzenlerinin periyodu 2 dir. Her bir d için acaba periyodu d olan oturma düzenlerinden kaç tane vardır? İlk olarak bir oturma düzeninin periyodu d ise $d|n$ olması gerektiğini gösterelim. $d|n$ olmadığını varsayalım: O zaman $n = qd + r$ $0 \leq r < d$ olacak şekilde bir tek q , r tamsayı çifti vardır. Buradan bu oturma biçimi hem n hem de d defa döndürüldüğünde tekrarlanacağından $n - qd$ kez döndürüldüğünde de tekrarlanır. Halbuki $r = n - qd$ olup $0 \leq r < d$ olduğundan d nin tanımı gereği $r = 0$ olmalıdır.

Şimdi $f(d)$ periyodu d olan oturma şekillerin sayısını göstereyim. O zaman

$$\sum_{d|n} f(d) = 2^n \text{ olup burada } g(n) = 2^n \text{ alınırsa Möbius inversiyon formülünden}$$

$$f(n) = \sum_{d|n} 2^{\frac{n}{d}} \mu\left(\frac{n}{d}\right)$$

elde edilir. Örneğin

$$\begin{aligned}
 f(12) &= 2^1 \mu(12) + 2^2 \mu(6) + 2^3 \mu(4) + 2^4 \mu(3) + 2^6 \mu(2) + 2^{12} \mu(1) \\
 &= 412
 \end{aligned}$$

olarak kolayca hesaplanır [18].

2.4. Çarpımsal Fonksiyonlar

2.9. Tanım

$f \neq 0$ a özdeş olmayan bir aritmetik fonksiyon olsun. Aralarında asal olan her m, n pozitif tamsayı çifti için $f(mn) = f(m)f(n)$ koşulunu sağlıyor ise f aritmetik fonksiyonuna *çarpımsal fonksiyon* denir [17].

2.10. Tanım

f aritmetik fonksiyonu, her m, n pozitif tamsayı için $f(mn) = f(m)f(n)$ koşulunu sağlıyor ise f aritmetik fonksiyonuna *tam çarpımsal fonksiyon* denir [17].

Basit hesaplamalar ile eğer f fonksiyonu çarpımsal ve $n_1, \dots, n_k$ pozitif tamsayıları ikişer ikişer aralarında asal ise $f(n_1 \dots n_k) = f(n_1) \dots f(n_k)$ olduğu bulunabilir. Ayrıca $n = p_1^{e_1} \dots p_k^{e_k}$ şeklinde asal çarpanlarının çarpımı şeklinde ifade ediliyorsa o zaman $f(n) = f(p_1^{e_1}) \dots f(p_k^{e_k})$ dir. Sonuç olarak f çarpımsal fonksiyonunun herhangi bir n pozitif tamsayısı için değerini hesaplamak istediğimizde n in asal çarpanlarının f altındaki görüntüsünü hesaplamak yeterlidir. Möbius fonksiyonu, Euler fonksiyonu ve bölen fonksiyonu çarpımsal, kuvvet fonksiyonu ve özdeşlik fonksiyonu tam çarpımsaldır.

2.8. Teorem

f çarpımsal fonksiyon ise $f(1) = 1$ dir [18].

İspat

1 sayısı bütün tamsayılarla aralarında asaldır. Herhangi bir n pozitif tamsayısı için $f(n) = f(n \cdot 1) = f(n)f(1)$ eşitliğinden $f(1) = 1$ elde edilir.

Çarpımsal fonksiyonların kümesi yukarıda Dirichlet çarpımı ile oluşturulan grubun bir alt grubudur. Bunun için çarpımsal iki fonksiyonun Dirichlet çarpımının da çarpımsal ve çarpımsal bir fonksiyonun Dirichlet çarpımına göre tersinin de çarpımsal olduğunu göstermek yeterlidir.

2.9. Teorem

Dirichlet çarpımı çarpımsallığı korur [19].

İspat

Teoremin ispatı için çarpımsal olan iki f, g aritmetik fonksiyonu için $f * g$ nin de çarpımsal olduğunu göstermeliyiz. $k = f * g$ ve $(a, b) = 1$ olmak üzere $k(ab) = k(a)k(b)$ olduğunu göstermeliyiz.

$$k(ab) = \sum_{d|ab} f(d)g\left(\frac{ab}{d}\right) \quad (2.2)$$

toplamında a ile b aralarında asal olduğundan ab nin her d böleni $(x, y) = 1$ ve $x|a$ ve $y|b$ olmak üzere $d = xy$ şeklinde yazılır. Ayrıca $\left(\frac{a}{x}, \frac{b}{y}\right) = 1$ olduğu aşıkardır. Buna göre Eş.2.2. toplamını yeniden ifade edecek olursak

$$k(ab) = \sum_{\substack{x|a \\ y|b}} f(xy)g\left(\frac{ab}{xy}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{x|a \\ y|b}} f(x)f(y)g\left(\frac{a}{x}\right)g\left(\frac{b}{y}\right) && (f \text{ ve } g \text{ çarpımsal}) \\
&= \sum_{\substack{x|a \\ y|b}} f(x)g\left(\frac{a}{x}\right) \sum_{\substack{x|a \\ y|b}} f(y)g\left(\frac{b}{y}\right) \\
&= k(a)k(b)
\end{aligned}$$

Çarpımsal bir fonksiyonun Dirichlet tersinin de çarpımsal olduğunu göstermemize yarayacak aşağıdaki teoremi verelim

2.10. Teorem

h ve $f * h$ çarpımsal ise f çarpımsaldır [17].

İspat

f fonksiyonunun çarpımsal olmaması durumunda $f * h$ ın da çarpımsal olmadığını göstermek yeterlidir. $k = f * h$ olsun. f çarpımsal olmadığından $(m, n) = 1$ olan m ve n pozitif tamsayıları için $f(mn) \neq f(m)f(n)$ dir.

$mn = 1$ için $k(1) = f(1)g(1) = f(1) \neq 1$ buna göre k çarpımsal değildir.

$mn > 1$ için

$(a, b) = 1$ ve $ab < mn$ a ve b pozitif tamsayıları için $f(ab) = f(a)f(b)$ eşitliği var olsun.

$$\begin{aligned}
k(mn) &= \sum_{\substack{a|m \\ b|n \\ ab < mn}} f(ab)g\left(\frac{mn}{ab}\right) + f(mn)g(1) \\
&= \sum_{\substack{a|m \\ b|n \\ ab < mn}} f(a)f(b)g\left(\frac{m}{a}\right)g\left(\frac{n}{b}\right) + f(mn) \\
&= \sum_{a|m} f(a)g\left(\frac{m}{a}\right) \sum_{b|n} f(b)g\left(\frac{n}{b}\right) - f(m)f(n) + f(mn)
\end{aligned}$$

$$= k(m)k(n) - f(m)f(n) + f(mn)$$

$f(mn) \neq f(m)f(n)$ olduğundan $k(mn) \neq k(m)k(n)$ elde edilir ve bu sonuç k nın çarpımsal olmadığını gösterir ki bu ise bir çelişkidir.

2.11. Teorem

f aritmetik fonksiyonu çarpımsal ise f in Dirichlet tersi f^{-1} de çarpımsaldır [17].

İspat

$f * f^{-1} = I$ Teorem 2.24 ten I ve f çarpımsal olduğundan f^{-1} de çarpımsaldır.

Sonuç olarak çarpımsal fonksiyonlar kümesi aritmetik fonksiyonların Dirichlet çarpımıyla oluşturduğu grubun bir alt grubudur.

3. KİSMİ SIRALI KÜMELERDE MÖBIUS İNVERSİYON FORMÜLÜ

3.1. Kısmi Sıralı Kümeler ve Latisler ile İlgili Tanım ve Temel Özellikler

Kısmi sıralı kümeler kombinatorikte çok önemli bir rol oynamaktadır. Özellikle kısmi sıralı bir küme üzerinde Möbius inversiyon içerme-dışarma prensibinin çok zengin bir genelleştirmesidir. Örneğin sonlu A, B, C ve D kümeleri için $D = A \cap B = A \cap C = B \cap C = A \cap B \cap C$ olsun. İçerme-dışarma prensibi (*Inclusion-Exclusion Principle*)

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \\ &= |A| + |B| + |C| - 2|D| \end{aligned} \quad (3.1)$$

sonucuna ulaşmamızı sağlar. Dikkat edilirse Eş.3.1. denklemindeki 7 terim A, B, C kümelerinin birleşiminde sadece 4 farklı eleman olduğu için 4 terime dönüşmektedir. Eş.3.1. deki -2 katsayısının önemi nedir? Daha fazla sayıda küme verildiğinde bu katsayıyı hesaplayabilir miyiz? Açıkça bu katsayı A, B, C ve D kümeleri arasında kapsama bağıntısıyla tanımlanan ve birleşim kümesinin eklendiği kısmi sıralı kümenin Möbius fonksiyonunun değeridir. Sonuç olarak Möbius inversiyon uygun şartlarda tanımlandığında içerme-dışarma prensibinin bir basitleştirilmiş ile sonuçlanır. Bununla birlikte Möbius inversiyonun uygulamalarında içerme-dışarma prensibinin zengin bir genelleştirmesinden çok daha fazlası olduğunu göreceğiz [12].

İncidence cebiri ve Möbius fonksiyonuna başlamadan önce sonlu kısmi sıralı kümelerin yapısını kavramak için bir takım temel tanım ve teoremleri vereceğiz.

3.1. Tanım (Kısmi sıralı küme, Partially Ordered SET, Poset)

Bir P kümesi ve bu küme üzerinde tanımlanan bir $\leq$ bağıntısı verilsin.

- 1) $\forall x \in P$ için $x \leq x$ (yansıma)
- 2) $x, y \in P$ için $x \leq y$ ve $y \leq x$ ise $x = y$ (ters simetri)

3) $x, y, z \in P$ için $x \leq y$ ve $y \leq z$ ise $x \leq z$ (geçişme)

koşulları sağlanıyor ise $\leq$ bağıntısına P üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı denir.

Bu bağıntıyla birlikte P ye kısmi sıralı küme adı verilir [12].

Şimdi sonlu kısmi sıralı kümelere birkaç örnek verelim.

3.1. Örnek

$n \in \mathbb{N}$ olsun. $[n] = \{1, \dots, n\}$ kümesinin bütün alt kümelerinin kapsamaya göre sıralamasıyla oluşan B_n kümesi kısmi sıralı kümedir. B_n kümesinde eğer $S \subseteq T$ ise $S \leq T$ dir.

3.2. Örnek

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $[n] = \{1, \dots, n\}$ kümesi bildiğimiz anlamdaki sıralama ile kısmi sıralı bir kümedir. Bundan böyle bu kısmi sıralı kümeyi $\mathbf{n}$ ile göstereceğiz.

3.3. Örnek

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere n in bütün pozitif bölenlerinden oluşan küme bölünebilme bağıntısı ile kısmi sıralı bir kümedir. n in bütün pozitif bölenlerinden oluşan bu kısmi sıralı kümeyi D_n ile göstereceğiz. Bu kümedeki sıralama eğer $i \mid j$ ise $i \leq j$ ile tanımlanır.

3.4. Örnek

$V_n(q)$, q -elemanlı $\mathbb{F}_q$ cismi üzerinde n -boyutlu bir vektör uzayını gösterebilir. $V_n(q)$ uzayının bütün alt uzaylarının kapsamaya göre sıralanmasıyla oluşan $L_n(q)$ kümesi, bir kısmi sıralı kümedir. $L_n(q)$, B_n kısmi sıralı kümesinin q -benzeridir.

3.2. Tanım

$x, y \in P$ için $x \leq y$ ya da $y \leq x$ ise x ile y *karşılaştırılabilir elemanlardır*. Aksi halde x ile y *karşılaştırılamayan elemanlardır*. Bu durum $x \parallel y$ ile gösterilir [12].

3.5. Örnek

$\mathbf{n}$ kısmi sıralı kümesinin bütün elemanları karşılaştırılabilir. Çünkü iki doğal sayıdan biri diğerinden küçük veya büyüktür. D_6 kümesinde 2 ile 3 karşılaştırılamayan elemanlardır.

3.3. Tanım

Q, P nin bir alt kümesi olmak üzere $\forall x, y \in Q$ için $x \leq_Q y \Leftrightarrow x \leq_P y$ ise Q, P nin bir *alt kısmi sıralı kümesidir* denir [12].

3.6. Örnek

Bölünebilme ile sıralı $D_6 = \{1, 2, 3, 6\}$ kümesinin bir alt kısmi sıralı kümesi $D_2 = \{1, 2\}$ dir.

3.4. Tanım

Bir P kısmi sıralı kümesinde $x \leq y$ olmak üzere $[x, y] = \{z \in P : x \leq z \leq y\}$ kümesi, alt kısmi sıralı küme kavramına özel bir örnektir. Bu küme *kapalı aralık* olarak adlandırılır. Boş küme bir aralık olarak kabul edilmez. $[x, x]$ kapalı aralığı sadece x elemanından oluşmaktadır [12].

3.5. Tanım

P nin her aralığı sonlu ise P ye *yerel sonlu kısmi sıralı küme* denir [12].

3.6. Tanım

$x, y \in P$ için eğer $x < y$ ve P nin $x < z < y$ şartını sağlayan bir z elemanı yoksa y elemanı x elemanını kaplar deriz ve $x \prec y$ ile gösteririz. $\prec$ bağıntısına *kaplama bağıntısı* denir. Eğer $x \prec y$ ise o zaman $[x, y] = \{x, y\}$ dir [12].

3.7. Tanım

P kısmi sıralı küme olsun. $\forall x, y \in P$ için $x \leq y$ ya da $y \leq x$ oluyorsa P ye bir *zincir* (tam sıralı küme) denir [12].

Bir zincirin herhangi bir alt kısmi sıralı kümesi de yine bir zincirdir. $P = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesi adi sıralama bağıntısıyla bir zincirdir.

3.8. Tanım

İki kısmi sıralı küme P ve Q olsun. Eğer $x \leq_P y \Leftrightarrow \phi(x) \leq_Q \phi(y)$ şartı sağlanıyorsa $\phi: P \rightarrow Q$ birebir eşlemesi sıra koruyandır denir [12].

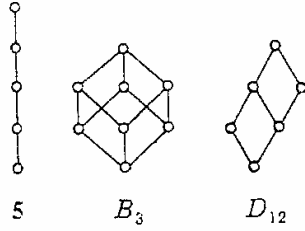
P ve Q nun izomorf olması için P den Q ya tanımlı sıra koruyan ve üzerine bir dönüşümün var olması gerekir.

3.9. Tanım

P kısmi sıralı kümesinin elemanlarını $x \prec y$ ise x y nin aşağısında kalacak şekilde diyagramla gösterilmesine bu kısmi sıralı kümenin Hasse diyagramı denir [12].

3.7. Örnek

5 sıralı kümesi, 3 elemanlı bir kümenin alt kümelerinin kapsamayla sıralı kısmi sıralı kümesi; B_3 ve 12 nin pozitif bölenlerinin kümesi $D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ nin Hasse diyagramı Şekil 3.1 de verilmiştir.



Şekil 3.1. 5, B_3 ve D_{12} kısmi sıralı kümelerin Hasse diyagramı

3.10. Tanım

P kısmi sıralı kümesinin bütün elemanlarından küçük yani; $\forall x \in P$ için $\hat{0} \leq x$ olacak şekilde bir $\hat{0}$ elemanı varsa bu elemana P kısmi sıralı kümesinin *tabanı* denir. Benzer şekilde P kısmi sıralı kümesinin bütün elemanlarından büyük olan yani; $\forall x \in P$ için $x \leq \hat{1}$ olacak şekilde bir $\hat{1}$ elemanı varsa bu elemana P kısmi sıralı kümesinin *tavanı* denir [12].

3.11. Tanım

P ve Q kısmi sıralı kümelerinin direkt (kartezyen) çarpımı $P \times Q$

$\{(x, y) : x \in P \text{ ve } y \in Q\}$ kümesi üzerinde tanımlı

$$(x, y) \leq_{P \times Q} (x', y') \Leftrightarrow x \leq_P x' \text{ ve } y \leq_Q y'$$

sıralama bağıntısı ile verilen kısmi sıralı kümedir.

3.12. Tanım

$P_1, P_2, \dots, P_n$ sıralı kümeler olsun. $P_1 \times P_2 \times \dots \times P_n$ kartezyen çarpımı üzerinde bileşen bazında sıralama şöyle tanımlanır;

$$P_1 \times P_2 \times \dots \times P_n \text{ 'de } (x_1, x_2, \dots, x_n) \leq (y_1, y_2, \dots, y_n) \Leftrightarrow \forall i = 1, 2, \dots, n \text{ için } x_i \leq_{P_i} y_i$$

dir [12].

3.13. Tanım

P bir sıralı küme ve $Q \subseteq P$ olsun. Eğer $x \in Q$, $y \in P$ olmak üzere $y \leq x$ iken $y \in Q$ oluyorsa Q ya P nin bir aşağı kümesi denir [12].

3.14. Tanım

$Q \subseteq P$ olsun. $\downarrow Q = \{y \in P : \exists x \in Q \text{ için } y \leq x\}$ kümesi Q 'yu kapsayan en küçük aşağı kümeyi gösterir. Eğer Q nun kendisi bir aşağı küme ise Q 'yu kapsayan en küçük aşağı küme Q nun kendisidir.

3.15. Tanım

P bir sıralı küme ve $x \in P$ olmak üzere $\langle x \rangle = \{y \in P : y \leq x\}$ kümesine esas aşağı küme (esas ideal) denir [4]

Şimdi kısmi sıralı kümelerin özel bir sınıfından bahsedelim. Bunun için öncelikle alt ve üst sınır kavramlarını ifade etmeliyiz.

3.16. Tanım

P kısmi sıralı bir küme ve $S \subseteq P$ olsun. $\forall s \in S$ için $s \leq x$ oluyorsa $x \in P$ ye S kümesinin bir üst sınırı denir. Benzer şekilde $\forall s \in S$ için $y \leq s$ oluyorsa $y \in P$ ye S in bir alt sınırı denir [12].

3.17. Tanım

L kısmi sıralı kümesinde her bir eleman çiftinin en büyük alt sınırı ve en küçük üst sınırı varsa L ye latis denir [12].

3.18. Tanım

Bir L latisinde herhangi iki a, b elemanının en küçük üst sınırını $a \vee b$ ve en büyük alt sınırını $a \wedge b$ ile gösterilir ve bunlar sırasıyla a join b ve a meet b diye okunur.

3.8. Örnek

Bölünebilme ile sıralı $D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ kümesi bir latistir. Her zincir aynı zamanda bir latisdir.

3.19. Tanım (Alt latis)

L bir latis ve $M \neq \emptyset$ ve $M \subset L$ olmak üzere $\forall a, b \in M$ için $a \vee b \in M$ ve $a \wedge b \in M$ oluyorsa M ye L nin bir alt latisi denir [12].

3.20. Tanım (Dağılmalı latis)

L bir latis ve $\forall a, b, c \in L$ için ;

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \text{ ve } a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

şartları sağlanıyorsa L ye dağılmalı latis denir [12].

3.21. Tanım

L , tabanı (0) ve tavanı (1) var olan bir latis olsun. $a \in L$ için $a \wedge b = 0$ ve $a \vee b = 1$ olacak şekilde bir $b \in L$ varsa b ye a nın tamlayıcısı denir [12].

a nın tamlayıcısının tek olması durumunda bunu a' ile göstereceğiz. L nin dağılmalı latis olması durumunda a nın tamlayıcısı varsa tektir.

3.22. Tanım

L bir latis olsun. Eğer L dağılmalı latis, L nin taban ve tavanı var ve $\forall a \in L$ için bir a' tamlayıcısı var ise L ye *Boole latisi* denir [12].

3.23. Tanım (Boole cebiri)

$\langle B; \vee, \wedge, ', 0, 1 \rangle$ cebirsel yapısı verilsin. $\langle B; \wedge, \vee \rangle$ dağılmalı latis, $\forall a \in B$ için $a \vee 0 = a$ ve $a \wedge 1 = a$; $\forall a \in B$ için $a \vee a' = 1$ ve $a \wedge a' = 0$ ise B ye *Boole Cebiri* denir [12].

X herhangi bir küme, $A \subseteq X$ için $A' = X \setminus A$ ile tanımlansın. $\langle \wp(X); \cup, \cap, ', \emptyset, X \rangle$ bir Boole cebiridir.

3.2. İncidence Cebiri

P yerel sonlu kısmi sıralı bir küme olsun. $\text{Int}(P)$ ile P nin tüm aralıklarının kümesini gösterelim. K bir cisim olsun. Eğer $f : \text{Int}(P) \rightarrow K$ bir fonksiyon ise o zaman $f([x, y])$ yerine $f(x, y)$ yazılır.

3.24. Tanım

K bir cisim olmak üzere $x, y \in P$ için tanımlanan iki değişkenli reel değerli $f: \text{Int}(P) \rightarrow K$ $f(x, y)$ fonksiyonu $x \leq y$ olmaması durumunda $f(x, y) = 0$ olsun. f fonksiyonuna P nin incidence fonksiyonu denir [12].

3.25. Tanım

f, g incidence fonksiyonlarının toplamı ve skalerle çarpımı

$$(f + g)(x, y) = f(x, y) + g(x, y),$$

$$(cf)(x, y) = c.f(x, y)$$

şeklinde tanımlanır. Bu fonksiyonların çarpımı aşağıdaki şekilde tanımlanır;

$$h(x, y) = \sum_{x \leq z < y} f(x, z).g(z, y) \quad [12].$$

P yerel sonlu olduğundan fonksiyonların çarpımı sonlu tane terimden oluşur. Açıkça anlaşılabacağı üzere bu bir reel cisim üzerinde tanımlı birleşmeli bir cebirdir. Bu cebire P nin incidence cebiri denir ve $I(P, K)$ ile gösterilir [12].

Bizim yapacağımız çalışmalar için $K = \mathbb{C}$ almak yeterlidir. Bu durumda $I(P, \mathbb{C})$ yerine kısaca $I(P)$ yazalım. Şimdi incidence cebirinin birim elemanını tanımlayalım.

3.26. Tanım

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & x \neq y \end{cases}$$

ile tanımlanan $\delta(x, y)$ *Kronecker delta*, incidence cebirinin birim elemanıdır [12].

Şimdi $I(P)$ de Möbius fonksiyonun tersi olan zeta fonksiyonunu tanımlayalım.

3.27. Tanım

P kısmi sıralı kümesinde $x \leq y$ için $\zeta(x, y) = 1$ biçiminde tanımlanan fonksiyona *zeta fonksiyonu* adı verilir [12].

ζ fonksiyonun bir takım özellikleri yerel sonlu kısmi sıralı kümeler üzerinde çok kullanışlı sonuçlar elde etmemizi sağlar. Örneğin

$$\begin{aligned}\zeta^2(x, y) &= \sum_{x \leq z \leq y} \zeta(x, z) \zeta(z, y) \\ &= \text{card}[x, y]\end{aligned}$$

yani $\zeta^2[x, y]$ aralığının uzunluğunu hesap etmemizi sağlar.

Daha genel olarak $k \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere

$$\zeta^k(x, y) = \sum_{x=x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_k \leq y} 1$$

x ten y ye uzunluğu k olan çoklu-zincirlerin sayısını hesaplar. Benzer şekilde

$$(\zeta - 1)(x, y) = \begin{cases} 1, & x < y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

elde edilir. Bundan dolayı $(\zeta - 1)^k(x, y)$ ile $x = x_0 < x_1 < \dots < x_k = y$ biçimindeki x

ten y ye uzunluğu k olan zincirlerin sayısı hesap edilebilir [12].

3.3. Kısmi Sıralı Kümeler Üzerinde Möbius İncersiyon ve Uygulamaları

Şimdi yerel sonlu kısmi sıralı bir kümede Möbius fonksiyonunu ve Möbius incersiyon formülünü uygulamalarıyla birlikte verelim.

3.28. Tanım

P nin zeta fonksiyonunun tersine Möbius fonksiyonu denir ve

$$\begin{aligned}\mu(x, x) &= 1 \quad \forall x \in P \text{ için} \\ \mu(x, y) &= -\sum_{x \leq z < y} \mu(x, z) \quad x < y\end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır [12].

$\mu\zeta = \delta$ eşitliğinden hareketle de tümevarım uygulanarak Möbius fonksiyonunu bu şekilde elde edebildik.

3.1. Teorem (Kısmi sıralı kümeler üzerinde Möbius inversion formülü)

P her esas ideali sonlu olan bir kısmi sıralı küme ve f, g P den $\mathbb{C}$ içine iki fonksiyon olsun. $\forall x \in P$ için

$$g(x) = \sum_{y \leq x} f(y) \Leftrightarrow f(x) = \sum_{y \leq x} g(y) \mu(y, x)$$

dir [12] .

İspat

$\mathbb{C}^P$ ile P den $\mathbb{C}$ ye tanımlanan ve sıra koruyan bütün fonksiyonların kümesini gösterelim. Bu küme lineer dönüşümlerin bir cebiri olarak $I(P)$ ye sağdan aşağıdaki gibi etki eder. $f \in \mathbb{C}^P$ ve $\zeta \in I(P)$ olmak üzere

$$(f\zeta)(x) = \sum_{y \leq x} f(y)\zeta(y, x)$$

Dirichlet çarpımından $f\zeta = g \Leftrightarrow f = g\mu$ dir.

3.9. Örnek (İçerme-dışarma prensibi)

$S_1, \dots, S_n$ sonlu kümeler olsun. P bu kümelerin tüm arakesitlerinin kapsama bağıntısına göre oluşturduğu, $\hat{1} = S_1 \cup \dots \cup S_n$ birleşimini de kapsayan kısmi sıralı küme olsun. $f(T)$; $T' <_p T$ için T ye ait olup T' ye ait olmayan elemanların sayısını göstersin. $g(T) = |T|$ olsun. $|S_1 \cup \dots \cup S_n|$ yi hesaplayan

$$|S_1 \cup \dots \cup S_n| = g(\hat{1}) = \sum_{T \leq \hat{1}} f(T)$$

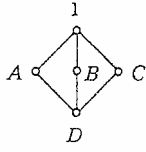
biçiminde bir formül elde etmek istiyoruz.

$$g(T) = \sum_{T' \leq T} f(T')$$

olup, P üzerinde Möbius inversiyon uygulanırsa

$$0 = f(\hat{1}) = \sum_{T \in P} g(T)\mu(T, \hat{1}) \Rightarrow g(\hat{1}) = -\sum_{T < \hat{1}} |T| \mu(T, \hat{1})$$

elde edilir. Şimdi Eş.3.1. ile verilen örneğe geri dönelim. Bu kısmi sıralı kümeyi P ile gösterelim. P nin Hasse diyagramı Şekil 3.2 de gösterilmiştir. Buna göre $\mu(A, \hat{1}) = -1$, $\mu(B, \hat{1}) = -1$, $\mu(C, \hat{1}) = -1$ ve $\mu(D, \hat{1}) = 2$ ve böylece Eş.3.1. denkleminin sağlandığı görülebilir.



Şekil 3.2 Eş.3.1. ile verilen kısmi sıralı kümenin Hasse diyagramı

Möbius fonksiyonunun kısmi sıralı kümeler üzerinde nasıl hesaplandığını gösteren birkaç örnek verelim.

3.10. Örnek

$P, \mathbb{N}$ zinciri olsun.

$\mu(x, x) = 1$ ve $\mu(x, y) = - \sum_{x \leq z < y} \mu(x, z)$ olduğundan

$$\mu(i, j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ -1, & i + 1 = j \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

dir. Bu durumda Möbius inversiyon formülü aşağıdaki şekle dönüşür; $\forall n > 0$ için

$$g(n) = \sum_{i=0}^n f(i) \quad (\forall n > 0) \Leftrightarrow f(n) = g(n) - g(n-1).$$

Başka bir deyişle $\sum$ ve Δ işlemleri birbirlerinin tersidirler.

3.2. Teorem (Çarpım teoremi)

P ve Q lokal sonlu birer kısmi sıralı küme ve $P \times Q$ direkt çarpımları olsun. Eğer $P \times Q$ da $(x, y) \leq (x', y')$ ise o zaman

$$\mu_{P \times Q}((x, y), (x', y')) = \mu_P(x, x') \cdot \mu_Q(y, y')$$

dir [12].

İspat

$(x, y) \leq (x', y')$ olsun.

$$\begin{aligned} \mu_{P \times Q}((x, y), (x', y')) &= \sum_{(x, y) \leq (u, v) \leq (x', y')} \mu_P(x, u) \mu_Q(y, v) \\ &= \left(\sum_{x \leq u \leq x'} \mu_P(x, u) \right) \left(\sum_{y \leq v \leq y'} \mu_Q(y, v) \right) \\ &= \delta_{xx'} \delta_{yy'} \\ &= \delta_{(x, y), (x', y')} \end{aligned}$$

3.11. Örnek

P , B_n Boole cebiri olsun. $B_n \cong 2^n$ ve $2 = \{1, 2\}$ zincirinin Möbius fonksiyonu $\mu(1, 1) = 1$, $\mu(2, 2) = 1$, $\mu(1, 2) = -1$ ile verilir. B_n n elemanlı bir X kümesinin bütün alt kümeleri olarak tanımlarsak çarpım teoeminden $\mu(T, S) = (-1)^{|S-T|}$ sonucuna ulaşırız. $[T, S]$ aralığının uzunluğu $l(T, S) = |S - T|$ olduğundan $\mu(T, S) = (-1)^{l(T, S)}$ olarak ifade edilebilir. B_n için Möbius inversion formülü aşağıdaki gibi olur. $f, g: B_n \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonları verilsin. $\forall S \subseteq X$ için

$$g(S) = \sum_{T \subseteq S} f(T) \Leftrightarrow f(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|S-T|} g(T).$$

Sonuç olarak bir Boole cebiri üzerinde Möbius inversion formülü içirme-dışarma prensibine denktir.

3.3. Teorem

P bir sonlu kısmi sıralı küme ve $\hat{P}$, P ye $\hat{0}$ ve $\hat{1}$ eklenmiş halini gösterebiliriz. c_i uzunluğu i olan $\hat{0} = x_0 < x_1 < \dots < x_i = \hat{1}$ zincirlerinin sayısını gösterebiliriz. Örneğin $c_0 = 0$ ve $c_1 = 1$ dir. O zaman

$$\mu_{\hat{P}}(\hat{0}, \hat{1}) = c_0 - c_1 + c_2 - \dots$$

dir [12].

İspat

$$\begin{aligned} \mu_{\hat{P}}(\hat{0}, \hat{1}) &= (1 + (\zeta - 1))^{-1} (\hat{0}, \hat{1}) = (1 - (\zeta - 1) + (\zeta - 1)^2 - \dots) (\hat{0}, \hat{1}) \\ &= \delta(\hat{0}, \hat{1}) - (\zeta - 1) (\tilde{0}, \tilde{1}) + (\zeta - 1)^2 (\tilde{0}, \tilde{1}) \dots \\ &= c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + \dots \end{aligned}$$

4. MÖBIUS İNVERSİYON FORMÜLÜNÜN GENELLEŞTİRMELERİ VE UYGULAMALARI

4.1. Parametrik Möbius İncersiyon Formülü

Şu ana kadar yaptığımız çalışmalarda sonlu toplamlar üzerinden Möbius incersiyon formülünü uyguladık. Acaba sonsuz toplamlar ve parametre içeren ifadeler için de Möbius incersiyon formülüne benzer bir ifade elde edebilir miyiz? Sonsuz toplamda parametre kullanılması kombinatorik incersiyon formülleri ve ters dönüşümlerin uygulamalarında yarar sağlamaktadır. Şimdi sonsuz toplamlar için bize gerekli olan bazı kavram ve teoremleri ifade edelim.

P bir kısmi sıralı küme ve X boş olmayan herhangi bir keyfi küme olsun. $F(P \times X)$ $P \times X$ üzerinde tanımlı bütün kompleks değerli fonksiyonları göstere sin. $F(P \times X)$ yi vektör uzayı olarak düşünebiliriz [13].

4.1. Tanım

P nin incidence cebiri $I(P)$ $F(P \times X)$ vektör uzayına soldan etkisi aşağıdaki gibi tanımlanır;

$\xi \in I(P)$ ve $f \in F(P \times X)$ olmak üzere

$$D_{\xi}f(a, x) = \xi f(a, x) = \sum_{a \leq b} \xi(a, b) f(b, x).$$

Benzer şekilde sağdan etki aşağıdaki gibi tanımlanabilir;

$\xi \in I(P)$ ve $g \in F(X \times P)$ olmak üzere

$$D_{\xi}g(x, b) = g\xi(x, b) = \sum_{a \leq b} g(x, a)\xi(a, b)$$

dir [13].

Çalışmada uygun olması için tüm kısmi sıralı kümeleri sonlu veya sayılabilir sonlu ve tüm sonsuz toplamları mutlak yakınsak kabul edeceğiz.

4.1. Teorem

$\xi \in I(P)$ ve $f \in F(P \times X)$ için eğer ξ nin tersi var ve

$$g(a, x) = \sum_{a \leq b} \xi(a, b)f(b, x) \quad (4.1)$$

mutlak yakınsak ise o zaman

$$f(a, x) = \sum_{a \leq b} \xi^{-1}(a, b)g(b, x) \quad (4.2)$$

dir [13].

İspat

Eş.4.1. denklemi Eş.4.2. de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{a \leq b} \xi^{-1}(a, b)g(b, x) &= \sum_{a \leq b} \xi^{-1}(a, b) \sum_{b \leq c} \xi(b, c)f(c, x) \\ &= \sum_{a \leq b \leq c} \xi^{-1}(a, b) \xi(b, c) f(c, x) \\ &= \sum_{a \leq b \leq c} \left(\sum_{a \leq b \leq c} \xi^{-1}(a, b) \xi(b, c) \right) f(c, x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{a \leq c} \delta(a, c) f(c, x) \\
&= f(a, x)
\end{aligned}$$

Eğer Teorem 4.1. deki ξ yerine *zeta fonksiyonu* alınırsa ξ nın tersi Möbius fonksiyonu olur. Bu durumda Eş.4.1. ve Eş.4.2. denklemleri aşağıdaki Möbius inversiyon formülüne dönüşür.

$$g(a, x) = \sum_{a \leq b} f(b, x),$$

$$f(a, x) = \sum_{a \leq b} \mu(a, b) g(b, x)$$

4.1. Sonuç

$P = \mathbb{N}^+$ pozitif tamsayılar ve $X = \mathbb{C}$ kompleks sayılar olarak alalım. Eğer $\mathbb{N}^+$ üzerindeki kısmi sıralama bağıntısı bölünebilme bağıntısı olarak alınırsa o zaman $\mu(m, n)$ Möbius fonksiyonu sayılar teorisindeki $\mu\left(\frac{n}{m}\right)$ e dönüşür [13].

Bu durumda sonsuz toplam içeren aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

4.2. Teorem

$\xi \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$ latisi üzerinde tanımlansın. $f \mathbb{N}^+ \times \mathbb{C}$ üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall k \in \mathbb{N}^+$ için $\xi(k, k) \neq 0$ ve

$$g(k, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi(n, kn) f(kn, x)$$

mutlak yakınsak ise, o zaman

$$f(n, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi^{-1}(n, kn) g(kn, x)$$

dir [13].

Teorem 4.2. deki f fonksiyonu $\frac{x}{k} = \frac{y}{l}$ olduğu durumlarda $f(k, x) = f(l, y)$

koşulunu sağlayan bir fonksiyon ise o zaman f yi $\mathbb{C}$ üzerinde $f(\frac{x}{k}) = f(k, x)$ olarak tanımlayabiliriz. Bu durumda Teorem 4.2. ü aşağıdaki önerme şeklinde ifade edebiliriz.

4.1. Önerme

$f(x)$ ve $g(x)$ birer fonksiyon olmak üzere;

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f(k, x) \Leftrightarrow f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(k) g(\frac{x}{k})$$

dir [13].

Eğer f fonksiyonu $kx = ly$ iken $f(k, x) = f(l, y)$ koşulunu sağlayan bir fonksiyon ise o zaman f $\mathbb{C}$ üzerinde $f(kx) = f(k, x)$ şekline indirgenebilir. Bu durumda Teorem 4.2. yi aşağıdaki önerme şeklinde ifade edebiliriz.

4.2. Önerme

$f(x)$ ve $g(x)$ iki fonksiyon olmak üzere;

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f(kx) \Leftrightarrow f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(k, x) g(kx)$$

dir [13].

Eğer $f(x \pm k) = y \pm l$ olması durumunda $f(k, x) = f(l, y)$ koşulunu sağlayan bir fonksiyon ise o zaman $\mathbb{C}$ üzerinde f fonksiyonu $f(x \pm k) = f(k, x)$ şeklinde indirgenebilir. Bu durumda aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

4.3. Önerme

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f(x \pm k) \Leftrightarrow f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(k) g(x \pm l)$$

dir [13].

Şimdi bir seride Möbius inversiyon formülünün uygulamasını gösteren bir örnek verelim.

4.1. Örnek

$g(n, x) \in \mathbb{N}^+ \times \mathbb{C}$ üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. ω kompleks sayılarda birimin n . mertebeden kökü olmak üzere

$$g(n, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{kn}}{(kn)!} = \sum_{n|i} \frac{x^i}{i!} = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=0}^{n-1} e^{\omega^i x} - n \right)$$

ise o zaman

$$x^n = n! \sum_{k=1}^{\infty} \mu(n, kn) \left(\sum_{i=0}^{kn-1} \frac{e^{\omega^i x}}{kn} - 1 \right)$$

$$\begin{aligned}
&= n! \sum_{k=1}^{\infty} \mu(k) \left(\sum_{i=0}^{kn-1} \frac{e^{\omega^i x}}{kn} - 1 \right) \\
&= (n-1)! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} \left(\sum_{i=0}^{kn-1} e^{\omega^i x} - kn \right)
\end{aligned}$$

dir [13].

4.2. Soyut Möbius İncidence Formülü

Bu bölümde verilen bir kısmi sıralı kümenin bir A alt kümesi üzerinde Möbius incidence formülünün uygulaması verilecektir. $(S, \leq)$ lokal sonlu kısmi sıralı bir küme olsun. $\subseteq S$ üzerinde başka bir lokal sonlu kısmi bir sıralama bağıntısı olsun. O zaman $(S \times S, \subseteq \leq)$ lokal sonlu kısmi sıralı bir kümedir. Bu küme üzerindeki sıralama

$$(u, x) \subseteq \leq (v, y) \Leftrightarrow u \subseteq v, x \leq y$$

şeklindedir.

4.2. Tanım

$(S \times S) \times (S \times S)$ üzerinde tanımlanan f fonksiyonu $(u, x) \subseteq \leq (v, y)$ olmaması durumunda $f((u, x), (v, y)) = 0$ şartını sağlıyor ise bu fonksiyona $(S \times S, \subseteq \leq)$ in bir incidence fonksiyonu denir. $(S \times S, \subseteq \leq)$ in bütün incidence fonksiyonlarının kümesi $I(S \times S, \subseteq \leq)$ ile gösterilir [14].

4.3. Teorem

$(S, \subseteq)$ ve $(S, \leq)$ kısmi sıralı kümeleri $x \leq y \Rightarrow x \subseteq y$ şartını sağlayan birer lokal sonlu kısmi sıralı küme olsun. Kabul edelim ki $f, g \in I(S \times S, \subseteq \leq)$ ve $h \in I(S, \leq)$ olsun. Öyle ki $\forall x \in S$ için $h(x, x) \neq 0$ olsun. O zaman $\forall v, x, y \in S$ için

$$f((x, x), (v, y)) = \sum_{\substack{x \leq z \leq y \\ z \subseteq v}} h(x, z) g((z, z), (v, y)) \quad (4.3)$$

olması için gerek ve yeter şart

$$g((x, x), (v, y)) = \sum_{\substack{x \leq z \leq y \\ z \subseteq v}} h^{-1}(x, z) f((z, z), (v, y)) \quad (4.4)$$

olmasıdır. Burada h^{-1} , h in $I(S, \leq)$ deki tersidir [14].

İspat

Kabul edelim ki Eş.4.3. sağlansın. O zaman

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{x \leq z \leq y \\ z \subseteq v}} h^{-1}(x, z) f((z, z), (v, y)) &= \sum_{\substack{x \leq z \leq y \\ z \subseteq v}} h^{-1}(x, z) \sum_{\substack{z \leq w \leq y \\ w \subseteq v}} h(z, w) g((w, w), (v, y)) \\ &= \sum_{\substack{x \leq w \leq y \\ w \subseteq v}} \left(\sum_{x \leq z \leq w} h^{-1}(x, z) h(z, w) \right) g((w, w), (v, y)) \\ &= \sum_{\substack{x \leq w \leq y \\ w \subseteq v}} \delta(x, w) g((w, w), (v, y)) \\ &= g((x, x), (v, y)). \end{aligned}$$

Bundan dolayı Eş.4.4. sağlanır. Terside benzer şekilde ispatlanır.

Bu teoremdede $h = \zeta$ zeta fonksiyonu olarak alınırse aşağıdaki sonuca ulaşılır.

4.2. Sonuç

$(S, \subseteq)$ ve $(S, \leq)$ kısmi sıralı kümeleri $x \leq y \Rightarrow x \subseteq y$ şartını sağlayan birer lokal sonlu kısmi sıralı küme olsun.

Kabul edelim ki $f, g \in I(S \times S, \subseteq \leq)$ olsun. O zaman $\forall v, x, y \in S$ için

$$f((x, x), (v, y)) = \sum_{\substack{x \leq z \leq y \\ z \subseteq v}} g((z, z), (v, y))$$

olması için gerek ve yeter şart

$$g((x, x), (v, y)) = \sum_{\substack{x \leq z \leq y \\ z \subseteq v}} \mu(x, z) f((z, z), (v, y))$$

olmasıdır. μ $I(S, \leq)$ in Möbius fonksiyonudur [14].

4.3. Tanım

Her bir n pozitif tamsayısı için $A(n)$ n in pozitif bölenlerinin kümesinin bir alt kümesi olsun. $A(n)$ in elemanlarına n in A –bölenleri denir [14, 23].

4.4. Tanım

f ve g aritmetik fonksiyonunun A –konvülasyonu,

$$(f *_A g)(n) = \sum_{d \in A(n)} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right)$$

şeklinde tanımlanır [14].

4.4. Teorem

Aşağıdaki üç şart sağlanıyor ise A –konvüstasyonu regülerdir denir;

- a) bildiğimiz anlamda fonksiyonların toplama işlemi ve A –konvüstasyonu işlemlerine göre aritmetik fonksiyonların kümesi değişmeli ve birimli bir halkadır,
- b) A –konvüstasyonu çarpımsallığı korur ve
- c) A –konvüstasyonuna göre 1 e denk olan fonksiyonun bir tersi μ_A var ve n bir asal sayının kuvveti iken $\mu_A(n) = 0$ veya -1 dir [14].

4.5. Tanım (A -Konvulasyonuna Göre Bir f fonksiyonunun Tersi)

$f(1) \neq 0$ şartını sağlayan f aritmetik fonksiyonunun A –konvüstasyonuna göre tersi $\delta(1) = 0$ ve $n > 1$ için $\delta(n) = 0$ olmak üzere ;

$$f *_{\mathcal{A}} f^{-1} = f^{-1} * f = \delta$$

şeklinde tanımlanır [14].

4.5. Teorem

A –konvüstasyonu regüler olması için gerek ve yeter şart

- i) $(m, n) = 1$ için $A(mn) = \{de : d \in A(m), e \in A(n)\}$
- ii) her bir asal sayının kuvveti $p^a > 1$ için $t = \tau_{\mathcal{A}}(p^a)$ olacak şekilde a nın bir t böleni vardır öyleki

$$A(p^a) = \{1, p^t, p^{2t}, \dots, p^{rt}\} \quad (rt = a) \text{ ve } 0 \leq i < r, \text{ için } A(p^{it}) = \{1, p^t, p^{2t}, \dots, p^{it}\}$$

koşullarının sağlanmasıdır [14].

4.2. Örnek

n in bütün bölenlerinden oluşan D_n kısmi sıralı kümesinin Dirichlet çarpımı ve $U(n) = \left\{ d > 0 : d \mid n, (d, \frac{n}{d}) = 1 \right\}$ birimsel konvülyasyonu regülerdir.

4.6. Tanım

Bir n pozitif tamsayısı için $A(n) = \{1, n\}$ oluyorsa n e A -ilkeli denir [14].

4.3. Örnek

Dirichlet çarpımlarında ilkel sayılar asal sayılardır. Birimli konvülyasyonda bir asal sayının kuvveti olan sayılar ilkel sayılardır.

4.4. Örnek

Genelleştirilmiş Möbius fonksiyonu μ_A çarpımsal bir fonksiyondur ve

$$\mu_A(p^a) = \begin{cases} -1, & (p^a > 1) \text{ } A\text{-ilkeli ise} \\ 0, & p^a \text{ } A\text{-ilkeli değil ise} \end{cases}$$

şeklinde verilir. Özel olarak $\mu_{D_n} = \mu$ ve $\mu_U = \mu^*$ dır.

4.7. Tanım

$(m, n)_A$ sembolü $A(n)$ e ait olan m in en büyük bölenini gösterir [14].

Özel olarak $(m, n)_{D_n} = (m, n)$ ve $(m, n)_U = (m, n)_*$ dır.

4.6. Teorem

A ve B birer regüler dönüşüm ve $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ üzerinde $\subseteq \leq$ bağıntısı

$$(u, x) \subseteq \leq (v, y) \Leftrightarrow u \in B(v), x \in A(y)$$

şeklinde tanımlansın. $f(m, n)$ iki değişkenli bir aritmetik fonksiyon olsun. O zaman $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \subseteq \leq)$ in bir f' fonksiyonu ile f i $u \in B(v)$ ve $x \in A(y)$ olmak üzere

$$f'((u, x), (v, y)) = f\left(\frac{v}{u}, \frac{y}{x}\right), \text{ diğer durumlarda } = 0 \text{ şeklinde tanımlayarak bağıntılı hale}$$

getirebiliriz. Üstelik $f \rightarrow f'$ dönüşümü bire-birdir [14].

4.7. Teorem

A ve B birer regüler dönüşüm öyle ki $\forall n \in \mathbb{N}$ için, $A(n)$ $B(n)$ in bir alt kümesi olsun. $h(n)$ $h(1) \neq 0$ olan bir aritmetik fonksiyon olsun. O zaman

$$f(m, n) = \sum_{\substack{d \in B(m) \\ d \in A(n)}} h(d) g\left(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}\right) \quad (\forall m, n \in \mathbb{N})$$

ancak ve ancak

$$g(m, n) = \sum_{\substack{d \in B(m) \\ d \in A(n)}} h^{-1}(d) f\left(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}\right) \quad (\forall m, n \in \mathbb{N})$$

ve burada h^{-1} , h in A -konvülasyonuna göre tersidir [14].

Şimdi bu teoremin sayılar teorisindeki bazı uygulamalarına örnek verelim. Bu örneklerde $B(m) = D_m$ olarak alacağız.

4.5. Örnek

Ramanujan toplamı $C_A(m, n)$;

$$C_A(m, n) = \sum_{\substack{x \pmod{n} \\ (x, n)_A = 1}} \exp(2\pi i m x / n)$$

şeklinde tanımlanır. Aynı zamanda

$$C_A(m, n) = \sum_{\substack{d \in A(n) \\ d|m}} d \mu_A\left(\frac{n}{d}\right)$$

olduğunu biliyoruz. Teorem 4.7. deki $h(n) = n$ ve $g(m, n) = \mu_A(n)$ alınırsa

$$\mu_A(n) = \sum_{\substack{d \in A(n) \\ d|m}} \mu_A(d) d C_A\left(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}\right)$$

elde edilir. Özel olarak birimsel-konvülyasyonda;

$$\mu^*(n) = \sum_{\substack{d|n \\ d|m}} \mu^*(d) d C^*\left(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}\right)$$

elde edilir. Burada $C^*(m, n) = \sum_{\substack{d|m \\ d|n}} d \mu^*\left(\frac{n}{d}\right)$ dir. Dirichlet konvülyasyonunda;

$$\mu(n) = \sum_{d|(m, n)} \mu(d) d C\left(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}\right)$$

elde edilir.

4.3. Selberg-Çarpımsal Fonksiyonlar İçin Genelleştirilmiş Möbius İncersiyon Formülü

Bu bölümde sayılar teorisi ve kombinatorikte kullanılan Möbius incersiyon formülünün genel bir tipini elde etmeye çalışacağız.

$F \neq 0$ olmak üzere $F : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu aralarında asal olan her m, n pozitif tamsayı çifti için $F(mn) = F(m)F(n)$ eşitliğini sağlıyorsa F fonksiyonunun çarpımsal olduğunu söylemiştik. M ile tüm çarpımsal aritmetik fonksiyonların kümesini gösterelim. $M - \{0\}$, kümesinin Dirichlet çarpımı ile bir abelyan grup oluşturduğunu 2. bölümde göstermiştik. Bu grubun birim elemanı $\varepsilon(1) := 1$ ve $n > 1$ için $\varepsilon(n) = 0$ ile tanımlanan ε çarpımsal fonksiyonudur. Şimdi çarpımsallığın çok daha genel bir hali olan *Selberg çarpımsallığı* ifade edeceğiz.

4.8. Tanım

F bir aritmetik fonksiyon olsun. $e_p(n)$; n in asal çarpanlarının çarpımı şeklinde yazıldığında p nin kuvvetini göstermek üzere n i bölebilen p asalları için

$$F(n) = \prod_p f_p(e_p(n))$$

ve n in bölüneni olmayan p asallar için $f_p(0) = 1$ olacak şekilde bir $f_p : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu varsa F fonksiyonuna *Selberg-çarpımsal* denir [15].

4.6. Örnek

$$\begin{aligned} F(12) &= \prod_{p|12} f_p(e_p(12)) \\ &= f_2(e_2(12))f_3(e_3(12)) \end{aligned}$$

$$= f_2(2)f_3(1)$$

Selberg çarpımsallık bize çok değişkenli çarpımsal fonksiyonu tanımlamak için değişiklik olmadan bu gösterimi kullanmamızı sağlar.

Şimdi Selberg-çarpımsal fonksiyonların özel bir S alt sınıfını ele alalım. S kümesinin elemanları aşağıdaki şartları sağlayan F fonksiyonlarının kümesi olsun. $F: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ için $f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{C}$ ve $f(0) = 1$ olmak üzere

$$F(n) = \prod_p f(e_p(n)) \quad (4.5)$$

şartlarını sağlayan bir evrensel f fonksiyonu var olsun.

Açıkça her $F \in S$ için alışılmış anlamda çarpımsal ve $F(1) = 1$ diyebiliriz. Bu $S \subset M - \{0\}$ anlamına gelir. Açık olarak klasik Möbius fonksiyonu μ S ye aittir.

4.7. Örnek

Fleck'in genelleştirmesi; $z \in \mathbb{C}$ için μ_z

$$\mu_z(n) = \prod_p (-1)^{e_p(n)} \binom{z}{e_p(n)} \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (4.6)$$

ile tanımlıdır [15].

$\mu_0 = \varepsilon$ ve $\mu_1 = \mu$ olduğu açıktır. Ayrıca $\mu_{-1} = 1$ (özdeş olarak 1 e eşit olan fonksiyon), $\mu_{-2} = \tau$ (klasik bölen fonksiyon) dur.

Bu örnekteki düşünceden yola çıkarak Möbius inversiyon formülünün bir genelleştirilmesi inşa edilebilir. Bunun için aşağıdaki probleme çözüm aranacaktır.

$F \in S$ verilsin. α, β sayı teorik fonksiyonları için

$$\beta(n) = \sum_{d|n} F\left(\frac{n}{d}\right) \alpha(d) \Leftrightarrow \alpha(n) = \sum_{d|n} G\left(\frac{n}{d}\right) \beta(d) \quad (4.7)$$

Möbius tipi inversiyon gerçekleştirilecek biçimde $G \in S$ bulabilir miyiz? [15].

İşte bu bölümün amacı; bu problemi önce teorik olarak ve daha sonra yapısal ve açık olarak çözmektir [15].

Verilen bir F fonksiyonu için G nin bir tek biçimde belirlenebileceği gösterilecektir. Bu durumda $\{F, G\}$; genelleştirilmiş Möbius fonksiyonlarının bir çarpımsal ters çifti olarak adlandırılır [15].

$F \in M - \{0\}$ fonksiyonunun $*$ konvülasyonuna göre tersi $\tilde{F}$ ile gösterilir. $F \in S$ in $\tilde{F} \in S$ i gerektirdiğini gösterdiğimizde yukarıdaki problemin bir tek çözüme sahip olduğu açıktır. Aşağıdaki önerme ihtiyacıdan biraz fazlasını verir.

4.4. Önerme

$\langle S, * \rangle$ kümesi $\langle M - \{0\}, * \rangle$ in bir alt grubudur [15].

İspat

Bunun için $F, G \in S \Rightarrow H = F * G \in S$ ve $\tilde{F} \in S$ olduğunu göstermeliyiz.

$f, g : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{C}$ birer fonksiyon olsun öyle ki $f(0) = g(0) = 1$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$F(n) = \prod_p f(e_p(n)) \text{ ve } G(n) = \prod_p g(e_p(n)) \quad (4.8)$$

şartları sağlansın. Noktasal olarak $h : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonunu $r \in \mathbb{N}_0$ için

$$h(r) := \sum_{\rho=0}^r f(\rho)g(r-\rho) \quad (4.9)$$

ile tanımlayalım. $h(0)=1$ olduğu aşıkardır. Üstelik $H = F * G \in M$ olduğundan

$$\begin{aligned} H(n) &= \prod_{p|n} H(p^{e_p(n)}) \\ &= \prod_{p|n} \sum_{\rho=0}^r F(p^\rho)G(p^{e_p(n)-\rho}) \\ &= \prod_p \sum_{\rho=0}^r f(\rho)g(e_p(n)-\rho) \\ &= \prod_p h(e_p(n)) \end{aligned}$$

$F \in S \Rightarrow \tilde{F} \in S$ olduğunu ispatlamak için $\psi : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonunu noktasal olarak

$$\psi(0)=1 \text{ ve } \sum_{\rho=0}^r f(\rho)\psi(r-\rho)=0 \quad (r=1,2,\dots) \quad (4.10)$$

şeklinde tanımlayalım. $f(0)=1$ olduğundan bu bir tek şekilde mümkündür.

$F * \tilde{F} = \varepsilon$ ve Eş.4.5. denkleminde her bir p asal ve $r \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} 0 &= \varepsilon(p^r) \\ &= \prod_{\rho=0}^r F(p^\rho)\tilde{F}(p^{r-\rho}) \\ &= \sum_{\rho=0}^r f(\rho)\tilde{F}(p^{r-\rho}) \end{aligned}$$

dir. O zaman $\tilde{F}(1) = 1 = \psi(0)$ ve tümevarım yöntemiyle her bir p asalı ve $r \in \mathbb{N}$ için $\tilde{F}(p^r) = \psi(r)$ olduğunu görebiliriz. Sonuç olarak

$$\begin{aligned}\tilde{F}(n) &= \prod_p \tilde{F}(p^{e_p(n)}) \\ &= \prod_p \psi(e_p(n))\end{aligned}$$

olduğundan $\tilde{F} \in S$ elde edilir.

4.1. Lemma (Yapıyı inşa etme yöntemi)

Eğer $F \in M$ ise, o zaman $s \in \mathbb{C}$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} F(n)n^{-s} = \prod_p \sum_{r=0}^{\infty} F(p^r)p^{-rs}$$

biçimsel denklemi gerçekleşir [15].

Şimdi yukarıdaki problemde olduğu gibi $F \in S$ olduğunu kabul edelim. Eş.4.5. ve Lemma 4.1. göz önüne alınırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty} F(n)n^{-s} = \prod_p \sum_{r=0}^{\infty} f(r)p^{-rs} \quad (4.11)$$

eşitliğini buluruz. Üstelik Eş.4.11. in sağ tarafındaki toplamda $x = p^{-s}$ alınarak biçimsel bir kuvvet serisi olarak düşünebiliriz. O zaman bu biçimsel kuvvet serisinin bir tersi vardır;

$g(0) = 1$ olmak üzere;

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} f(r)x^r \right)^{-1} = \sum_{r=0}^{\infty} g(r)x^r \quad (4.12)$$

ile gösterebiliriz. O zaman $G(n) = \prod_p g(e_p(n))$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) şeklinde bir sayı-teorik G fonksiyonunu inşa edebiliriz. Bu $G \in S$ olduğunu gösterir. Böylece Lemma 4.1. den

$$\sum_{n=1}^{\infty} G(n)n^{-s} = \prod_p \sum_{r=0}^{\infty} g(r)p^{-rs} \quad (4.13)$$

eşitliğine sahip oluruz. Eş.4.11. in sol tarafını $\tilde{f}(s)$ ve Eş.4.13. in sol tarafını $\tilde{g}(s)$ ile gösterirsek o zaman Eş.4.12. yi

$$\tilde{g}(s) = \frac{1}{\tilde{f}(s)}$$

ile gösterebiliriz. Eş.4.12 açıkça

$$\sum_{\rho=0}^r f(\rho)g(r-\rho) = 0 \quad (r = 1, 2, \dots)$$

eşitliğine denktir. Bunu Eş.4.10. ile karşılaştırsak $g = \psi$ olduğunu buluruz.

Gerçekten, $\tilde{g}(s) = \frac{1}{\tilde{f}(s)}$ eşitliği Dirichlet serilerinin çarpımı için benzer bir kuralıyla birlikte Möbius inversiyonun genel bir tipi anlamına gelir.

4.8. Teorem

$F \in S$ olsun. O zaman $F(n) = \prod_p f(e_p(n))$, $G(n) = \prod_p g(e_p(n))$ ve Eş.4.12.

eşitliklerini kullanarak Möbius inversiyonun genelleştirilmiş tipinin geçerli olacağı

$G \in S$ i inşaa edebiliriz. Başka bir deyişle $\alpha, \beta: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ şeklinde tanımlanan α, β fonksiyonlarının herhangi biri keyfi olarak verildiğinde

$$\beta(n) = \sum_{d|n} F\left(\frac{n}{d}\right) \alpha(d) \Leftrightarrow \alpha(n) = \sum_{d|n} G\left(\frac{n}{d}\right) \beta(d)$$

eşitliği sağlanır [15].

Gerçekten, eğer U, V teorik-sayı fonksiyonu ve Dirichlet serileri diliyle

$$\tilde{u}(s) := \sum_{n=1}^{\infty} U(n)n^{-s}, \quad \tilde{v}(s) := \sum_{n=1}^{\infty} V(n)n^{-s}$$

veya kısaca

$$\tilde{u}(s) \xleftrightarrow{Dir} (U(n))_{n \in \mathbb{N}}, \quad \tilde{v}(s) \xleftrightarrow{Dir} (V(n))_{n \in \mathbb{N}}$$

şeklinde gösteriliyorsa o zaman Dirichlet serilerinin çarpımı ile (aslında Dirichlet konvülasyonu ile)

$$\tilde{u}(s)\tilde{v}(s) \xleftrightarrow{Dir} \left(\sum_{d|n} U\left(\frac{n}{d}\right)V(d) \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

elde edilir. Sonuç olarak, $\tilde{a}(s) \xleftrightarrow{Dir} (\alpha(n))_{n \in \mathbb{N}}, \tilde{b}(s) \xleftrightarrow{Dir} (\beta(n))_{n \in \mathbb{N}}$ olduğunu kabul edersek Eş.4.7. deki iki eşitliğin

$$\tilde{b}(s) = \tilde{f}(s)\tilde{a}(s), \quad \tilde{a}(s) = \tilde{g}(s)\tilde{b}(s)$$

bağıntılarına karşılık geldiğini görürüz. Açıkça $\tilde{g}(s) = \frac{1}{\tilde{f}(s)}$ gereğince bu iki denklem birbirine denktir. Böylece teorem ispatlanmış olur [15].

4.8. Örnek

$f(r) := (-1)^r \binom{z}{r}$ ($r \in \mathbb{N}_0, z \in \mathbb{C}$) olarak alınırsa

$$\begin{aligned} \left(\sum_{r=0}^{\infty} f(r)x^r \right)^{-1} &= (1-x)^{-z} \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-z}{r} (-x)^r \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$g(r) = (-1)^r \binom{-z}{r} \quad (r \in \mathbb{N}_0)$$

olarak gösterebiliriz [15].

4.3. Sonuç

$\forall z \in \mathbb{C}$ için $\{\mu_z, \mu_{-z}\}$ genelleştirilmiş Möbius fonksiyonlarının bir çarpımsal ters çiftidir [15].

Bu sonuçtan hareketle Eş.4.7.

$$\beta(n) = \sum_{d|n} \mu_z \left(\frac{n}{d} \right) \alpha(d) \Leftrightarrow \alpha(n) = \sum_{d|n} \mu_{-z} \left(\frac{n}{d} \right) \beta(d)$$

olarak alınırsa genelleştirilmiş Möbius inversiyon formülü anlamına gelir. Açıkça bu son eşitlikte $z=1$ veya $z=-1$ alınırsa klasik Möbius inversiyon formülüne dönüşür.

Üstelik Eş.4.11. de $F = \mu_z$ ve $f(r) := (-1)^r \binom{z}{r}$ ($r \in \mathbb{N}_0, z \in \mathbb{C}$) olarak alınırsa ζ klasik Riemann zeta fonksiyonu olmak üzere;

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_z(n) n^{-s} &= \prod_p (1 - p^{-s}) \\ &= \zeta(s)^{-z} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu son eşitlik aynı zamanda iyi bilinen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) n^{-s} = \zeta(s)^{-1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) n^{-s} = \zeta(s)^2$$

bağıntıları anlamına da gelir.

4.9. Örnek

e^x ve e^{-x} in Taylor seri açılımı bize $r \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere $f(r) := \frac{1}{r!}$ ve $g(r) := \frac{(-1)^r}{r!}$ almamızı önerir. Buna göre

$$\lambda(n) := \prod_p \frac{1}{e_p(n)!}, \quad \nu(n) := \prod_p \frac{(-1)^{e_p(n)}}{e_p(n)!}$$

tanımlayalım. Burada $\lambda(n)$, $\nu(n)$ sırasıyla Eş.4.8. denklemlerindeki $F(n)$ $G(n)$ e karşılık gelmektedir. O zaman Eş.4.7. den

$$\beta(n) = \sum_{d|n} \lambda\left(\frac{n}{d}\right) \alpha(d) \Leftrightarrow \alpha(n) = \sum_{d|n} \nu\left(\frac{n}{d}\right) \beta(d)$$

çarpımsal tersi bağıntısını elde ederiz. Üstelik Eş.4.11. ve Eş.4.13. den aşağıdaki denklemleri elde ederiz;

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(n) n^{-s} &= \prod_p \exp(p^{-s}), \\ &= \exp\left(\sum_p p^{-s}\right),\end{aligned}$$

ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} \nu(n) n^{-s} = \exp\left(-\sum_p p^{-s}\right).$$

4.4. Kombinatorik Analizde Möbius İncersiyon Uygulaması

Bu bölümde $[n] = \{1, \dots, n\}$ kümesinin parçalanışları ile oluşturulan kısmi sıralı kümelerle ilgili bazı temel tanım ve teoremler verildikten sonra Stirling sayıları ile Möbius fonksiyonu arasında oluşturulan ilişkiden bahsedilecektir.

4.9. Tanım

$[n] = \{1, \dots, n\}$ kümesini alalım. $A_1, A_2, \dots, A_k$ $[n]$ nin boştan farklı alt kümeleri olsun.

i) $i \neq j$ için $A_i \cap A_j = \emptyset$ ve

$$ii) \bigcup_{i=1}^n A_i = [n]$$

şartları sağlanıyor ise $A_1, A_2, \dots, A_k$ kümelerine $[n]$ kümesinin bir *parçalanışı* denir ve her bir A_i kümesine parçalanışın *blokları* adı verilir.

4.10. Örnek

$A_1 = \{1, 3, 7\}, A_2 = \{2\}, A_3 = \{4, 5, 6, 8, 9\}$ $[9]$ un bir parçalanışdır. Kısılalığın hatırına bu parçalanışı $\sigma = 137, 2, 45689$ ile gösterelim.

4.10. Tanım

Sadece bir bloktan oluşan parçalanmayı **1** ile ve blokları bir tek elemandan oluşan parçalanmayı **0** ile göstereceğiz [12, 24].

4.11. Tanım

$\pi, \sigma \in \Pi_n$ olsun. Eğer π nin her bloğu σ nın bir bloğu içerisinde bulunuyor ise $\pi \leq \sigma$ bu durumda π ; σ nin bir *inceltirilmiş*idir denir [12, 24].

$[n] = \{1, \dots, n\}$ kümesinin bütün parçalanışlarının oluşturduğu küme Π_n , *inceltirme* (*refinement*) *bağıntısı*yla bir kısmi sıralı küme oluşturur.

4.11. Örnek

$n = [9]$ ve π nin blokları 137,2,46,58,9 ve σ nın blokları 13467,2589, ise o zaman $\pi \leq \sigma$ dır.bu durumda π σ nın bir inceltirilmişidir.

4.12. Tanım

$S(n, k)$ ile $[n]$ in veya n elemanlı bir kümenin k tane bloğa parçalanışlarının sayısını gösterebilir. $S(n, k)$ ya *ikinci tip Stirling sayısı* denir. [12, 24].

4.13. Tanım

$B_n = \sum_{k=1}^n S(n, k)$ ya *Bell Sayıları* denir.

Parçalanışların sayısının hesaplanmasında Stirling ve Bell sayılarından yola çıkmak genel bir yöntem sunsa da birtakım zorluklar ortaya çıkmaktadır. Diğer yandan bu hesaplamalarda Möbius inversiyon formülünün kullanılması hesaplamalarda kolaylık sağlamaktadır. Biz şimdi Möbius inversiyon ile bu hesaplamaların nasıl yapılabileceğini göstereceğiz. $P = \Pi_n$ olmak üzere $\pi, \sigma \in P$ için $\mu(\pi, \sigma)$ yı hesaplayalım.

4.9. Teorem

Σ lokal sonlu bir kısmi sıralı küme olsun. Eğer Σ kümesinde $x \leq y \leq z \leq w$ ise o zaman Σ daki $\mu(y, z)$ ile $[x, w]$ aralığındaki $\mu(y, z)$ değerleri birbirine eşittir [12, 24].

Teorem 4.8. den dolayı $\mu(\pi, \sigma)$ yı hesaplamak için $[x, w]$ aralığında çalışmak yeterlidir. σ π nin bloklarının birleştirilmesiyle elde edildiğinden bizim burada ilgilenmemiz gereken bloklar σ ve π nin ortak olmayan π nin bir elemanlı bloklarıdır. Yani bu parçalanışlarda ortak blokları sildiğimizde $\pi = 0$ ve $\sigma = 1$ olarak görünmektedir. Örneğin, S_6 için $\sigma = 123/45/6$ ve $\pi = 1/2/3/45/6$ olsun. π nin $1/2/3$ blokları bizim için esastır.

4.10. Teorem

$\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k\}$ (σ_i ler bloklar) olsun. σ nın her inceltiilmiş her bir σ_i nin bir parçalanışından oluşacağı için σ nın bir ρ inceltiilmişini $(\rho_1, \dots, \rho_k)$ sıralı-k lısı olarak düşünebiliriz. Burada ρ_i ler σ_i nin inceltiilmişidir. Bundan dolayı

$$[0, \sigma] \cong [0, \sigma_1] \times [0, \sigma_2] \times \dots \times [0, \sigma_k]$$

dır [12, 24].

Çarpım teoreminden dolayı w bir elemanlı blok olmak üzere μ yü $[0, w]$ üzerinde hesaplamamız yeterlidir.

4.4. Sonuç

$\sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ $\pi = \{\pi_1, \dots, \pi_n\}$ ve σ_i ler n_i tane π_j birleşmesiyle elde edilsin. Bu durumda $\mu(\pi, \sigma) = \prod_{i=1}^m \mu_{n_i}$ dir [12, 24].

Şimdi $\mu(0,1)$ i hesaplayalım. Bunu yapmak için parçalanışlarla fonksiyonları bağıntılı hale getireceğiz. S_n n elemanlı bir küme ve X x elemanlı keyfi bir küme olsun. S_n nin parçalanışları ile fonksiyonlar arasında bir bağıntı kuracağız.

4.14. Tanım (Bir fonksiyonun çekirdeği)

S_n in herhangi bir π parçalanışı ve bir $f : S_n \rightarrow X$ fonksiyonu verilsin. Eğer X in her bir elemanının f altındaki ters görüntüsü π nin bir bloğu ise π parçalanışına f fonksiyonunun çekirdeği denir [24].

$N_=(\pi)$ ile çekirdeği π olan S_n den X e tanımlı fonksiyonların sayısını ve

$N_\geq(\pi)$ ile çekirdeği π ve π den büyük olan S_n den X e tanımlı fonksiyonların sayısını gösteren ifadelerdir. Açıkça anlaşılacağı üzere

$$N_\geq(\pi) = \sum_{\sigma \geq \pi} N_=(\sigma) \quad (4.14)$$

dir. Eş.4.14. de Möbius inversiyon formülü uygulanırsa

$$N_{\leq}(\pi) = \sum_{\sigma \geq \pi} \mu(\pi, \sigma) N_{\geq}(\sigma) \quad (4.15)$$

elde edilir. Burada $\pi = 0$ alınırsa Eş.4.15.

$$N_{\leq}(0) = \sum_{\sigma \in \Pi_n} \mu(0, \sigma) N_{\geq}(\sigma) \quad (4.16)$$

haline dönüşür. $N_{\leq}(0)$ birebir fonksiyonların sayısıdır. Çünkü X in her bir elemanının ters görüntüsü sadece bir elemanlıdır. Bundan dolayı

$$N_{\leq}(0) = x.(x-1)\dots(x-n+1) = (x)_n$$

σ nın $r(\sigma)$ tane bloğu var olsun. $N_{\geq}(\sigma)$ ile sayılan fonksiyonlar σ nın aynı bloğundaki elemanları bir noktayla eşleyen fonksiyonlardır. Farklı blokları aynı noktaya dönüştürebilir. Bizim burada istediğimiz, çekirdeğin sadece σ dan büyük veya eşit olmasıdır. Bundan dolayı $N_{\geq}(\sigma) = x^{r(\sigma)}$ dır. O zaman Eş.4.16. denklemi

$$x.(x-1)\dots(x-n+1) = \sum \mu(0, \sigma) x^{r(\sigma)} \quad (4.17)$$

haline gelir. Eş.4.17. her x için sağlandığından bir polinom eşitliğidir. Açıkça anlaşılacağı üzere $r(\sigma) = 1$ alınırsa $\sigma = 1$ olur. Bu değer Eş.4.17. de yerine yazılır ve x katsayıları her iki tarafta eşitlenirse

$$\mu_n = (-1)^{n-1}.(n-1)! \quad (4.18)$$

elde edilir. Buradan $\mu(\pi, \sigma) = \prod_{i=1}^m \mu_{n_i}$ denkleminde Eş.4.18. yazılırsa

$$\mu(\pi, \sigma) = \prod_i (-1)^{n_i-1} (n_i - 1)! = (-1)^{r(\pi)-r(\sigma)} \prod_i (n_i - 1)! \quad (4.19)$$

elde edilir. Burada σ nın i . bloğu π nin n_i tane bloğunun birleşmesiyle oluşmuştur.

$s(n, k)$ I. tip Stirling sayısı olmak üzere $s(n, k) = \sum_{r(\sigma)=k} \mu(0, \sigma)$ alınırsa o zaman

$$(x)_n = \sum_{k=1}^n s(n, k) \cdot x^k$$

elde edilir. Burada $s(n, k)$ yı Möbius fonksiyonunun değerlerinin toplamı olarak yazabildik.

5. SONUÇ

Çalışmamızda öncelikle Möbius inversiyon formülünün bugüne değin yapılan genelleştirmelerini derlemeye çalıştık. Ayrıca aşağıda verilen anlamda genelleştirmelerin mümkün olup olmadığını araştırdık.

Teorem 3.1. de f ve g bir yerel sonlu P kısmi sıralı kümesinden $\mathbb{C}$ içine tanımlanan fonksiyonlar olmak üzere Möbius inversiyon formülü $\forall x \in P$ için

$$g(x) = \sum_{y \leq x} f(y) \Leftrightarrow f(x) = \sum_{y \leq x} g(y) \mu(y, x).$$

Burada toplamalar x in $\downarrow x$ aşağı kümesindeki P nin elemanları üzerinden alınmaktadır. Yani kısaca

$$g(x) = \sum_{y \in \downarrow x} f(y) \Leftrightarrow f(x) = \sum_{y \in \downarrow x} g(y) \mu(y, x)$$

yazabiliriz. Çalışmamızda, Narkiewicz ve Haukkanen'in genelleştirmeleri yönünde genelleştirmeler yapmaya çaba sarfettik.

A_x , $\downarrow x$ esas aşağı kümesinin bir alt kümesi olsun. Çalışmamızda aşağıdaki anlamda inversiyon formülleri elde edip edemeyeceğimizi araştırdık. x , yerel sonlu bir P kısmi sıralı kümesinin verilen bir elemanı ve $A_x \subseteq \downarrow x$ olsun.

1) Verilen bir $g : P \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu için

$$g(x) = \sum_{y \in A_x} F(y)$$

olacak şekilde bir $F : P \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu bulabilir miyiz?

2) Genel olarak böyle bir fonksiyon bulunamaz ise özel olarak P nin hangi x elemanları ve hangi A_x kümeleri için böyle bir F fonksiyonu bulabiliriz?

Yine yerel sonlu bir P kısmi sıralı kümesinin bir x elemanı, bir $A_x \subseteq \downarrow x$ alt kümesi ve bir $F : P \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu verilsin. Buradan

$$G(x) = \sum_{y \in A_x} F(y)$$

ile bir $G : P \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu tanımlayalım.

3) Bu şekilde verilen F ve G fonksiyonları için nasıl bir inversiyon formülü elde ederiz?

4) Yukarıda verilen f ile F ve g ile G fonksiyonları arasında genel olarak bir ilişki var mıdır?

Yukarıdaki sorulara P kısmi sıralı kümesi; bir latis, bir dağılmalı latis, bir Boole cebiri olması durumlarında da yanıtlar aradık.

Bu sorulara kayda değer yanıtlar bulamadık ancak bu konudaki çalışmalarımız devam etmektedir. Hazırladığımız bu çalışmanın bu konu ile ilgilenenler için faydalı bir kaynak teşkil etmesini ümit ederiz.

KAYNAKLAR

1. Euler, L., “Introductio in analysis infinitorum”, vol. I (Lausanne), Çeviri: J. D. Blanton, **Springer-Verlag**, New York, 110-114 (1988).
2. Möbius, A. F., “Über einer besondere Art von Umkehrung der Reihen”, **J. Reine Angew. Math.**, 9: 105-123 (1832).
3. Sándor, J. and Crstici, B., “Handbook of number theory”, vol.2, **Kluwer Acad. Publ.**, Dordrecht, (2004).
4. Mertens, F., “Über einige asymptotische Gesetze der Zahlentheorie”, **Crelle’s Journal**, 77 :289–338 (1874).
5. Hile, E., “The inversion problem of Möbius”, **Duke Math. J.**, 3: 549-569 (1937).
6. Hile, E. and Szász, O., On the completeness of Lambert functions, **Bull. Amer. Math. Soc.**, **42** 411-418 (1936).
7. Dedekind, R., “Abrifs einer Theorie der höhern Congruenzen in Bezug auf einer reellen Primzahl-Modulu”s, **J. Reine Angew. Math.**, 54 1-26 (1857).
8. Liouville, J., “Sur l’expression $\phi(n)$, qui marque combien la suite 1, 2, 3,...,n contient de nombres premiers à n”, **J. de Math.**, 2: 110-112 (1857).
9. Weisner, L., “Abstract theory of inversion of finite series”, **Trans. Amer. Math. Soc.**, 38: 474-484 (1935).
10. Hall, P., “A contribution to the theory of groups of prime power order”, **Proc. London Math. Soc.**, 36: 24-80 (1934).
11. Rota, G. C., “On the foundations of combinatorial theory I. Theory of Möbius functions”, **Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verv. Gebiete**, 2: 340-368 (1964).
12. Stanley, R. P., “Enumerative combinatorics”, vol. 1, **Cambridge University Press**, Cambridge, (1997).
13. Chen, B., “Parametric Möbius inversion formulas”, **Discrete Math.**, 169 (1997).
14. Haukkanen, P., An abstract Möbius inversion formula with number-theoretic applications, **Discrete Math.** 142: 87-96 (1995).
15. Bundschuh, P., Hsu, L. C., Wang J., Shiue P. J. S., “Generalized Möbius inversion – theoretical and computational aspects”, **Fibonacci Quart.**, 44: 109-116 (2006).
16. Daykin, D. E., “Generalized Möbius inversion formulae”, **Quart. J. Math. Oxford Ser.** 2(15): 349-354 (1964).

17. Apostol, T.M. , “Introduction to Analytic Number Theory”, 5th. Ed., **Springer-Verlag**, New York, 24-39,53-56, 229, 233 (1998).
18. Jones, G. A. and Jones, J. M., “Elementary number theory”, **Springer**, London, (2003).
19. Sivaramakrishnan, R., “Classical theory of arithmetic functions”, **Marcel Dekker**, (1989).
20. McCarthy, P. J., “Introduction to arithmetical functions”, **Springer Verlag**, 1986.
21. Hardy, G. H. and Wright, E. M., “An introduction to the theory of numbers”, **Oxford, Clarendon Press**, (1979).
22. Niven,I., Zuckerman H. S., Montgomery H. L., “An introduction to the theory of numbers”, **Wiley**, New York, 1991.
23. Narkiewicz, W., “On a class of arithmetical convolutions”, **Colloq. Math.**, 10: 81-94 (1965).
24. Bender, E. A. and Goldman J. R., “On the application of Möbius inversion in combinatorial analysis”, **Amer. Math. Monthly**, 82: 789-803 (1975).

ÖZGEÇMİŞ**Kişisel Bilgiler**

Soyadı, Adı : YILDIZ Mehmet
Uyruğu : T.C.
Doğum Tarihi ve Yeri : 02.06.1978 Adana
Medeni Hali : Evli
Telefon : 0 505 6688857
e-mail : yildizm78@mynet.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Lisans	Gazi Üniversitesi Gazi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümü	2001
Lise	Düziçi Anadolu Öğretmen Lisesi	1997

Yabancı Dil

İngilizce