

**NAVIER- STOKES DENKLEMLERİNİN  
ZAYIF ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI  
VE TEKLİĞİ ÜZERİNE**

**Rukiye ÇİL**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**HAZİRAN 2007  
ANKARA**

Rukiye İL tarafından hazırlanan NAVIER-STOKES DENKLEMLERİNİN ZAYIF ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI VE TEKLİĞİ üzerine adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Meryem KAYA  
Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: : Prof. Dr. Abdullah ALTIN

Üye : Prof. Dr. İbrahim Ethem ANAR

Üye : Prof. Dr. Baki İrfan YAŞAR

Üye : Doç. Dr. Ogün DOĞRU

Üye : Yrd. Doç. Dr. Meryem KAYA

Tarih : 20/06/2007

Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.

## **TEZ BİLDİRİMİ**

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Rukiye ÇİL

**NAVIER-STOKES DENKLEMLERİNİN ZAYIF ÇÖZÜMLERİNİN  
VARLIĞI VE TEKLİĞİ ÜZERİNE  
(Yüksek Lisans Tezi)**

**Rukiye ÇİL**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
Haziran 2007**

**ÖZET**

**Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.**

**Tezin birinci bölümünü oluşturan giriş kısmında türbülanslı akışların önemi ve bu akışların doğada ve çeşitli bilim dallarında karşılaşıldığı olaylar hakkında kısa bilgi verilecektir.**

**İkinci bölümde kullanılan notasyonlar ve temel kavramlar tanıtılacaktır.**

**Üçüncü ve dördüncü bölümlerde şu ana kadar Navier- Stokes denklemleri ile ilgili olarak literatürde bilinen bazı sonuçlar çalışılmıştır. Üçüncü bölümde lineerleştirilmiş Navier-Stokes denklemlerinin yani Stokes denklemlerinin, dördüncü bölümde ise Navier- Stokes denklemlerinin zayıf çözümlerinin varlık ve teklifi üzerine sonuçlar verilecektir.**

**Bilim Kodu : 204.1.138**  
**Anahtar Kelimeler : Navier-Stokes denklemleri, Faedo Galerkin metodu, zayıf çözüm**  
**Sayfa Adedi : 41**  
**Tez Yöneticisi :Yrd. Doç. Dr. Meryem KAYA**

**ON THE EXISTENCE AND UNIQUENESS OF THE WEAK SOLUTION OF  
THE NAVIER-STOKES EQUATIONS**

**(M.Sc. Thesis)**

**Rukiye ÇİL**

**GAZİ UNIVERSITY  
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY**

**June 2007**

**ABSTRACT**

**This thesis consists of four chapters.**

**In the introduction part of the first section, information about the importance of the turbulent flows and the events that those flows encountered in nature will be given.**

**In the second part, notations and basic terms will be introduced.**

**In the third and fourth parts, some results in literature about Navier-Stokes equations known so far are studied. In the third part, results on linearized Navier-Stokes equations, namely Stokes equations; and in the fourth part, results on the existence and uniqueness of the weak solutions of the Navier-Stokes equations will be given.**

**Science Code : 204.1.138**

**Key Words : Navier-Stokes equations, Faedo Galerkin method, weak solutions**

**Page Number: 41**

**Adviser : Asist. Prof. Dr. Meryem KAYA**

## TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren hocam Yrd. Doç. Dr. Meryem KAYA'ya ayrıca çalışma arkadaşlarıma, aileme teşekkürü bir borç bilirim.

## İÇİNDEKİLER

|                                                                                              | <b>Sayfa</b> |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
| ÖZET .....                                                                                   | iv           |
| ABSTRACT .....                                                                               | v            |
| TEŞEKKÜR .....                                                                               | vi           |
| İÇİNDEKİLER .....                                                                            | vii          |
| 1. GİRİŞ .....                                                                               | 1            |
| 2. NOTASYON VE TEMEL KAVRAMLAR .....                                                         | 3            |
| 3. LİNEERLEŞTİRİLMİŞ NAVIER- STOKES DENKLEMİ.....                                            | 7            |
| 3.1. Lineerleştirilmiş Navier-Stokes Denkleminin Zayıf Çözümlerinin Varlığı<br>Üzerine ..... | 7            |
| 3.2. Lineerleştirilmiş Navier-Stokes Denkleminin Zayıf Çözümlerinin Tekliği<br>Üzerine ..... | 16           |
| 4. NAVIER- STOKES DENKLEMİ .....                                                             | 20           |
| 4.1. Navier- Stokes Denkleminin Zayıf Çözümlerinin Varlığı Üzerine .....                     | 20           |
| 4.2. Navier-Stokes Denkleminin Zayıf Çözümlerinin Tekliği Üzerine .....                      | 34           |
| KAYNAKLAR.....                                                                               | 40           |
| ÖZGEÇMİŞ.....                                                                                | 41           |

## 1. GİRİŞ

Türbülans günlük hayatın bir parçasıdır. Türbülanslı akışlar, mühendislik uygulamalarında, okyanus biliminde, meteorolojide, havacılıkta, su bilimlerinde, doğada pek çok olayda meydana gelir. Örneğin atmosferik hareketler; okyanus ve nehirlerin su hareketleri; arabaların, gemilerin, uçakların etrafındaki oluşan akışlar türbülanstır.

Sıkıştırılmaz Newtonian akışların hareketleri Navier- Stokes denklemleri ile belirlenebilir. Bu denklemler Navier tarafından 1822 yılında önerilmiştir ve daha sonra aynı denklemler Stokes tarafından 1845’de yeniden incelenmiştir. Ancak Poueisille ve Couette akışları gibi basit durumlar dışında bu problemlerin analitik çözümleri bilinmemektedir. Sınırlı bir bölgede Navier-Stokes denklemi için tanımlanan problemin bir çözümünün varlık ve tekliği iki boyutlu uzayda ispatlanmıştır. Ancak üç boyutlu uzayda Navier - Stokes denklemlerinin çözümlerinin tekliği veriler üzerinde herhangi bir kısıtlama olmadan ispatlanamamıştır.

Leray (1934 a - 1934 b) ve Hopf (1951 / 1952) tarafından da bu denklemlerin zayıf çözümlerinin tanımı yapılmış ve ilgili özellikler incelenmiştir.

Navier- Stokes denklemleri;  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  sınırlı bir bölge ve  $t \in [0, T]$  olmak üzere;

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u - \nu \Delta u + \nabla p = f, \quad \Omega \text{ da} \quad (1.1)$$

$$\nabla u = 0, \quad \Omega \text{ da} \quad (1.2)$$

biçiminde ifade edilir. Burada  $u = u(x, t)$  akışın hızını,  $p$  basıncını,  $f$  dış kuvveti,  $\nu > 0$  viskosite katsayısını belirtir.

Navier- Stokes denklemleri koruma kanunlarından elde edilir. Eş.1.1 momentum korunumundan, Eş.1.2 kütlenin korunumundan elde edilir. Momentum korunumu Newton’un  $F=ma$  kuralından hareketle bulunur. Kütlenin korunumu



$\frac{\partial g}{\partial t} + \nabla \cdot (gu) = 0$  süreklilik denklemi ile ifade edilir. Burada  $g$  kütle yoğunluğunu gösterir. Sıkıştırılmaz bir akışkan için  $g$  yoğunluk değişmez kabul edilir. Böylece yukarıdaki süreklilik denklemi  $\nabla \cdot u = 0$  şekline dönüşür. Eş.1.1 ve Eş.1.2 ve bu denklemlerin çeşitli başlangıç ve sınır şartları altında çözümleri pek çok bilim adamı tarafından çalıştırılmıştır ve düşünülen başlangıç ve sınır değer problemlerinin çözümleri var mıdır; varsa bu problemlerin çözümleri tek midir; bu tip problemlerin çözümleri gerçek akışlar ne kadar belirliyor soruları bilim adamlarının ilgisini çeken önemli sorular olmuştur. Bu kısımda belirtilen konularla ilgili detaylı bilgi için [1-5, 9-12] nolu kaynaklara bakılabilir.

## 2. NOTASYON VE TEMEL KAVRAMLAR

$\mathfrak{R}^n$ ,  $n$  boyutlu Öklid uzayı,  $\Omega \subset \mathfrak{R}^n$  de bir bölge olsun.  $u : \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$  türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$\nabla u(x_1, \dots, x_n) = (u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n})$$

$$u \cdot \nabla u = \sum_{i=1}^n u_i D_i u_i, \quad 1 \leq i \leq n \text{ dir.}$$

$$\text{Burada } D_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad 1 \leq i \leq n \text{ dir.}$$

$$|\nabla u|^2 = \left( \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right) \text{ olarak alınacaktır.}$$

### 2.1. Matris Vektör Operasyonları İçin Notasyonlar

$x = (x_i)_{i=1}^d$ ,  $y = (y_i)_{i=1}^d$  vektörler ve  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^d$ ,  $B = (b_{ij})_{i,j=1}^d$   $d \times d$  matrisler olsun.

Bu durumda aşağıdaki notasyonlar kullanılır. İki vektörün nokta (skaler) çarpımı

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^d x_i y_i \quad d \text{ boyutu göstermek üzere bu uzaydan iki vektörün diyalik çarpımı}$$

$xy = (x_i y_i)_{i,j=1}^d$  bir  $d \times d$  matristir. İki matrisin nokta çarpımı

$$A \cdot B = \sum_{i,j=1}^d a_{ij} b_{ij} = \text{tr}(AB^T)$$

A matrisi için  $\|A\|_{L^p}$ ,

$$\|A\|_{L^p} = \left( \sum_{i,j=1}^d |a_{ij}|^p \right)^{1/p}$$

$\text{tr}(\cdot)$  ile bir matrisin izi gösterilir.

Bir matrisin diverjensi  $d=2$  için

$$\nabla.A = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial a_{12}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial a_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial a_{22}}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

## 2.2. Young Eşitsizliği

$$\forall a, b, \varepsilon > 0$$

$$ab \leq \frac{\varepsilon}{p} a^p + \frac{1}{p' \varepsilon^{p'/p}} b^{p'}, \quad \forall a, b, \varepsilon > 0, \quad \forall p \ 1 < p < \infty, \quad p' = p/(p-1)$$

## 2.3. Hölder Eşitsiliği

$$\left| \int_{\Omega} u.v dx \right| \leq \left( \int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{1/p} \left( \int_{\Omega} |v|^{p'} dx \right)^{1/p'} \quad \text{her } p > 1 \text{ ve } \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

## 2.4. Fonksiyon Uzayları

$\Omega$  üzerinde  $k \in \mathbb{N}$  olmak üzere  $k$  ve  $k$  dan küçük her mertebeden sürekli türevlere sahip fonksiyonların uzayını  $C^k(\Omega)$  ile;  $k = \infty$  olması halinde  $C^\infty(\Omega)$  ile gösterilecektir. Eğer,  $\Omega$  üzerinde  $C^\infty$  sınıfından fonksiyonlar  $\Omega$  'da kompakt desteğe sahip ise bu fonksiyonların uzayı  $C_0^\infty(\Omega)$  veya  $D(\Omega)$  ile gösterilecektir.

Eğer  $p \geq 1$  için  $\int_{\Omega} |u(x)|^p dx$  integrali sonlu ise;  $\mathbb{R}^n$  nin bir  $\Omega$  alt cümlesi üzerinde

tanımlı  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ölçülebilir fonksiyonuna  $L^p(\Omega)$  uzayındadır denir.  $p \rightarrow \infty$  için  $\Omega$  üzerinde hemen hemen her yerde (h.h.h.) sınırlı, ölçülebilir fonksiyonlar uzayı  $L^\infty(\Omega)$  ile gösterilecektir.

$$L^\infty(\Omega) = \{u : |u(x)| \leq k ; \Omega \text{ 'da hhh} \}$$

$p \geq 1$  olmak üzere bu uzaylar arasında  $L^\infty(\Omega) \subset \dots \subset L^p(\Omega) \dots \subset L^1(\Omega)$  biçiminde bir bağıntı vardır.

## 2.5. Sobolev Uzayı

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$  de bir bölge,  $\alpha \leq m$  olmak üzere  $m$  den küçük ve  $m$  ye eşit her mertebeden  $D^\alpha u$  türevleri  $L^p(\Omega)$  uzayına ait olan fonksiyonların uzayı  $w^{m,p}(\Omega)$  ile gösterilir ve Sobolev uzayı olarak adlandırılır.

Özel olarak  $p=2$  olması halinde  $w^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$  ile de gösterilir. Bu uzay;  $(\nabla u, \nabla v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)$  iç çarpımıyla birlikte bir Hilbert uzayıdır. Burada

$\alpha_1, \dots, \alpha_m$  negatif olmayan tam sayılar olmak üzere

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \quad \text{ve} \quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad \text{türev}$$

operatörüdür.

$w_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$  uzayı  $\Omega$  üzerinde kompakt desteğe sahip her mertebeden türevlenebilir fonksiyonların  $w^{1,2}(\Omega)$  uzayında bir kapanışıdır.

$\Omega$  üzerinde tanımlı bir fonksiyon  $u$  olsun.  $K \subset \Omega$ ,  $\bar{K} = \overline{\{x; u(x) \neq 0, x \in \Omega\}}$  olmak üzere eğer  $\bar{K} \subset \Omega$  ise  $u$  ya  $\Omega$  da kompakt desteğe sahiptir denir.

## 2.6. Zayıf (Genelleştirilmiş ) Türev

$u \in L^2(\Omega)$  olmak üzere

$$\int_{\Omega} u D^\alpha u = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u^{(\alpha)} \varphi, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

eşitliği sağlanıyorsa  $u^{(\alpha)}$  ya  $u$  nun  $\alpha$ . genelleş-tirilmiş (zayıf) türevi denir. Burada;  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  çoklu indis  $\alpha_i$  ler negatif olmayan tamsayılar ve  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$   $1 \leq i \leq n$  dir.

$\frac{\partial}{\partial x_i}$ ,  $D_i$  ile gösterilmiştir ve  $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$  biçimindedir.

## 2.7. $L^p(0, T; X)$ Uzayı

$X$  bir Banach uzayı ve  $1 \leq p \leq \infty$  olsun  $L^p(0, T; X)$  ile

$$\|u\|_{L^p(0, T; X)} = \begin{cases} \left( \int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty \\ \text{ess sup}_{t \in (0, T)} \|u(t)\|_X, & p = \infty \end{cases}$$

sonlu olacak şekilde;

$u : t \in (0, T) \rightarrow u(t) \in X$  ölçülebilir fonksiyonların uzayıdır.

### 3. LİNEERLEŞTİRİLMİŞ NAVIER-STOKES DENKLEMİ

#### 3.1. Lineerleştirilmiş Navier- Stokes Denkleminin Zayıf Çözümlerinin Varlığı Üzerine

Bu bölümde lineerleştirilmiş Navier-Stokes denklemlerinin zayıf çözümleri çalışılmıştır. Çalışmalarda [11] nolu kaynaktan yararlanılmıştır. Öncelikle bu denklemlere karşılık gelen varyasyonel formüller elde edilip daha sonra bu denklemlere karşılık gelen problemlerin çözümlerinin varlık sonuçları ifade ve ispat edilecektir. Sonuçlar verilmeden önce konu ile ilgili notasyon çalışılan uzaylar tanıtılacaktır.

Kabul edelim ki  $\Omega, \mathbb{R}^n$  de bir açık Lipschitz sınırlı cümle ve  $V$ ;  $V = \{u \in D(\Omega) ; \operatorname{div} u = 0\}$  olsun.  $V$  nin  $L^2(\Omega)$  ve  $H_0^1(\Omega)$  uzaylarında kapanışları sırasıyla  $H$  ve  $V$  olsun. Burada  $D(\Omega)$   $\Omega$  da kompakt desteğe sahip olan her mertebeden türetilen fonksiyonların uzayı olsun.  $H$  uzayı üzerindeki iç çarpım  $L^2(\Omega)$  dan indirgenmiş  $(u, v) = \int_{\Omega} u \cdot v dx$  ile tanımlanan iç çarpım;  $V$  uzayı üzerindeki

iç çarpım ise  $(\nabla u, \nabla v) = \sum_{i=1}^n (D_i u, D_i v)$  şeklinde tanımlanmıştır ve  $H, V$  birer Hilbert

uzayıdır ayrıca  $V \subset H \equiv H' \subset V'$  olarak alınır. Burada  $H'$  ve  $V'$  sırasıyla  $H$  ve  $V$  uzaylarının dual uzaylarıdır. Ayrıca her bir uzay bir sonraki uzayda yoğundur. Burada birebir dönüşümler süreklidir. Böylece;  $f \in H$  ve  $u \in V$  nin  $H$  deki skaler çarpımı;  $f \in V'$  ve  $u \in V$  olmak üzere  $f$  ve  $u$  nun skaler çarpımı ile aynıdır. Yani;

$$\langle f, u \rangle = (f, u) \quad \forall f \in H, \forall u \in V \text{ yazılabilir.}$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$  de açık Lipschitz sınırlı bir cümle ve  $T > 0$  bir sabit olsun. Lineerleştirilmiş Navier-Stokes denklemi, Stokes problemine karşılık gelen oluşum denklemidir. Bu denklemlere karşılık gelen problem

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + \text{grad } p = f \quad ; \quad \Omega \times (0, T) \quad ; \quad T > 0 \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot u = 0 \quad ; \quad \Omega \times (0, T) \quad (3.2)$$

$$u = 0 \quad ; \quad \Gamma \text{ (burada } \Gamma, \Omega \text{ nın sınırındır.)} \quad (3.3)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad ; \quad \Omega \text{ da} \quad (3.4)$$

denklemlerini sağlayan akışın hızını gösteren

$$u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathfrak{R}^n ;$$

vektör fonksiyonu ile akışın basıncını gösteren

$$p : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathfrak{R}$$

skaler fonksiyonun bulunması problemidir. Burada  $f$  ve  $u_0$  verilen fonksiyonlardır.  $f$  fonksiyonunu  $\Omega \times [0, T]$  de  $u_0$  fonksiyonu da  $\Omega$  'da tanımlanır. Son iki denklem sırasıyla sınır ve başlangıç koşullarını verir.

Öncelikle yukarıda Eş.3.1 – Eş.3.4 ile verilen bir lineerleştirilmiş Navier- Stokes denkleminin varlık sonuçları incelenecektir.

Literatürde zayıf çözümlerin pek çok farklı tanımları bulunabilir. [2] nolu kaynakta ifade edilen aşağıdaki zayıf çözümün tanımı esas alınacaktır.

### 3.1. Tanım

$u_0 \in H(\Omega)$  ,  $f \in L^2(\Omega_T)$  olsun. Eğer ölçülebilir bir

$$u : \Omega_T \rightarrow \mathfrak{R}^n$$

aşağıdaki iki özelliği sağlayacak şekilde varsa  $u$  ya Navier-Stokes denklemleri için verilen problemlerin bir zayıf çözümü denir.

$$a) u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H),$$

$$b) \int_0^t \{-v(\nabla u, \nabla \psi) - (u \cdot \nabla u, \psi)\} ds = - \int_0^t (f, \psi) ds + (u(t), \psi_r) - (u_0, \psi_r).$$

Eş.3.1- Eş.3.4'de verilen probleminin varyasyonel formunu elde etmek için Eş.3.1'i denklemini  $v \in V$  ile skaler çarparak kısmi integrasyon kullanılırsa ve

$$(\nabla p, v) = 0$$

$$v(\Delta u, v) = -v(\nabla u, \nabla v)$$

olduğu dikkate alınır;

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, v\right) + v(\nabla u, \nabla v) = (f, v) \quad (3.5)$$

elde edilir.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, v\right) = \frac{d}{dt}(u, v)$$

olduğundan ve  $f \in L^2(0, T; V')$ ,  $u_0 \in H$  için Eş.3.5'deki; süreklilik denklemi gözönüne alındığında her  $v \in V$  için

$$\frac{d}{dt}(u, v) + v(\nabla u, \nabla v) = \langle f, v \rangle \quad (3.6)$$

$$u(0) = u_0 \quad (3.7)$$



denklemleri ile ifade edilir.

### 3.1. Teorem [11]

$$f \in L^2(0, T; V')$$

$$u_0 \in H$$

olsun. Bu durumda Eş.3.1. – Eş.3.4 probleminin  $u$  zayıf çözümü vardır ve

$$u \in (C[0, T]; H) \text{ dir.}$$

#### *İspat*

Teoremin ispatı için Faedo – Galerkin metodu kullanılacaktır.  $V$  ayrılabilir uzay olduğundan  $V$  nin  $w_1, \dots, w_n, \dots$  lineer bağımsız elemanlarının bir dizisi vardır. Her  $m$  için bir

$$u_m = \sum_{i=1}^m g_{im}(t) w_i \quad (3.8)$$

yaklaşık çözümü vardır. Bu  $u_m$  çözümü Eş.3.6 varyasyonel formunda yerine yazılırsa;

$$(u'_m, w_j) + \nu(\nabla u_m, \nabla w_j) = \langle f, w_j \rangle \quad j = 1, \dots, m \quad (3.9)$$

$$u_m(0) = u_{0m} \quad (3.10)$$

elde edilir. Burada  $u_{0m}, w_1, \dots, w_m$  tarafından gerilen uzay üzerinde  $u_0$  ın  $H$  da dik izdüşümüdür.  $g_{im}, 1 \leq i \leq m$  fonksiyonları  $[0, T]$  üzerinde tanımlı skaler fonksiyonlardır. Eş.3.9 eşitliğinde gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\sum_{i=1}^m (w_i, w_j) g'_{im}(t) + \nu \sum_{i=1}^m (\nabla w_i, \nabla w_j) g_{im}(t) = \langle f(t), w_j \rangle \quad j = 1, \dots, m \quad (3.11)$$

elde edilir.

Eş.3.11 sistemindeki  $(w_i, w_j)$   $(1 \leq i, j \leq m)$  elemanlarından oluşan matris tersi alınabilir olduğundan; bu matrisin tersiyle Eş.3.11 çarpılırsa;

$$g'_{im}(t) + \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} g_{im}(t) = \sum_{j=1}^m \beta_{ij} \langle f(t), w_j \rangle \quad 1 \leq i \leq m \quad (3.12)$$

sabit katsayılı lineer denklem sistemi elde edilir. Burada  $\alpha_{i,j} \in \mathfrak{R}$  ve  $\beta_{i,j} \in \mathfrak{R}$  Eş.3.10'dan dolayı  $g_{im}(0), u_{0m}$  in  $i$ . bileşenidir.

$$g_{im}(0) = u_{0m} \quad 1 \leq i \leq m \quad (3.13)$$

Böylece Eş.3.12'nin çözümleri Eş.3.13'ün koşulları ile birlikte  $[0, T]$  üzerinde tek olarak belirlenir. Böylece

$$u_m \in L^2(0, T; V), \quad u'_m \in L^2(0, T; V) \quad (3.14)$$

yazılacaktır. Şimdi  $u_m$  ler  $m$  den bağımsız bazı sınırlar elde edeceğiz ve böylece limite geçilebileceğini göstereceğiz. Eş.3.9,  $g_{im}$ ,  $1 \leq i \leq m$  ile çarpılır ve elde edilen denklemler  $j=1, \dots, m$  için toplanırsa;

$$(u'_m(t), u_m(t)) + \nu \|\nabla u_m(t)\|^2 = \langle f, u_m(t) \rangle \quad (3.15)$$

eşitliği elde edilir. Eş.3.15'den

$$2(u'_m(t), u_m(t)) = \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|^2 \quad (3.16)$$

yazılır. Eş.3.15'de Eş.3.16 kullanılırsa

$$\frac{d}{dt} \|u_m(t)\|^2 + 2\nu \|\nabla u_m(t)\|^2 = 2 \langle f(t), u_m(t) \rangle \quad (3.17)$$

elde edilir.

Young eşitsizliğinden;

$$2\|f(t)\| \|\nabla u_m(t)\| \leq \nu \|\nabla u_m(t)\|^2 + \frac{1}{\nu} \|f(t)\|_{v'}^2, \text{ olduğundan ve Eş.3.17'den}$$

$$\frac{d}{dt} \|u_m(t)\|^2 + \nu \|\nabla u_m(t)\|^2 \leq \frac{1}{\nu} \|f(t)\|_{v'}^2 \quad (3.18)$$

elde edilir. Eş.3.18'in eşitsizliğinin 0'dan  $s$  ye  $0 < s < T$  olmak üzere integrali alınırsa

$$\|u_m(s)\|^2 \leq \|u_{0m}\|^2 + \frac{1}{\nu} \int_0^s \|f(t)\|_{v'}^2 dt$$

elde edilir. Böylece

$$\|u_m(s)\|^2 \leq \|u_0\|^2 + \frac{1}{\nu} \int_0^T \|f(t)\|_{v'}^2 dt \quad (3.19)$$

yazılabilir.  $s \in [0, T]$  alındığından dolayı

$$\sup_{s \in [0, T]} \|u_m(s)\|^2 \leq \|u_0\|^2 + \frac{1}{\nu} \int_0^T \|f(t)\|_{v'}^2 dt \quad (3.20)$$

elde edilir. Bu eşitliğin sağ tarafı sonlu ve  $m$  den bağımsız olduğundan:

$$u_m \in L^\infty(0, T; H) \quad (3.21)$$

elde edilir.

Eş.3.18'in 0 dan  $T$  ye integrali alınır;

$$\begin{aligned} \|u_m(T)\|^2 + \nu \int_0^T \|\nabla u_m(t)\|^2 dt &\leq \|u_{0m}\|^2 + \frac{1}{\nu} \int_0^T \|f(t)\|_{V'}^2 dt \text{ olduğundan;} \\ \|u_m(T)\|^2 &\leq \|u_0\|^2 + \frac{1}{\nu} \int_0^T \|f\|_{V'}^2 dt \text{ elde edilir; yani;} \end{aligned}$$

$$u_m \in L^2(0, T; V) \quad (3.22)$$

yazılır.

Eş.3.21'den ve zayıf yıldız topolojisine göre  $m' \rightarrow \infty$   $u'_m \rightarrow u \in L^\infty(0, T; H)$  olacak şekilde  $u_m$  nin  $u'_m$  alt dizisi vardır. Yani  $\forall v \in L^1(0, T; H)$  için

$$\int_0^T (u'_m(t) - u(t), v(t)) dt \rightarrow 0 ; m' \rightarrow \infty \quad (3.23)$$

elde edilir. Diğer yandan Eş.3.22'den zayıf topolojiye göre

$$m' \rightarrow \infty \text{ iken } u'_m \rightarrow u^* \in L^2(0, T, V) \quad (3.24)$$

olacak şekilde  $u_m$  nin bir  $u'_m$  alt dizisi vardır.

Yani;

$\forall v \in L^2(0, T; V')$  için

$$\int_0^T \langle u'_m(t) - u_*(t), v(t) \rangle dt \rightarrow 0 \quad (3.25)$$

yazılır.

$\langle f, u \rangle = (f, u)$  olduğundan

$$v \in L^2(0, T; H) \text{ için } \int_0^T (u'_m(t), v(t)) dt \rightarrow \int_0^T (u_*(t), v(t)) dt \quad (3.26)$$

elde edilir. Eş.3.26, Eş.3.23 ile karşılaştırılırsa; her  $v \in L^2(0, T; H)$  için

$$\int_0^T (u(t) - u_*(t), v(t)) dt = 0 \quad (3.27)$$

olduğundan

$$u = u_* \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H) \quad (3.28)$$

yazılır.

Eş.3.9 ve Eş.3.10 denklemlerinden limite geçmek için  $[0, T]$  üzerinde sürekli olarak türetilen  $\psi(T) = 0$  olacak şekilde bir  $\psi$  fonksiyonu düşünelim. Eş.3.9  $\psi(t)$  ile çarpılır ve  $t$  ye göre integrali alınırsa;

$$\int_0^T (u'_m(t), w_j) \psi(t) dt = - \int_0^T (u_m(t) \psi'(t), w_j) dt - (u_m(0), w_j) \psi(0)$$

bulunur. Böylece;

$$\begin{aligned} - \int_0^T (u_m(t), \psi'(t) w_j) dt + \nu \int_0^T (\nabla u_m(t), \psi(t) \nabla w_j) dt &= (u_{0m}, w_j) \psi(0) \\ &+ \int_0^T \langle f(t), w_j \rangle \psi(t) dt \end{aligned} \quad (3.29)$$

bulunur. Bu eşitlikte Eş.3.23, Eş.3.26, Eş.3.28 kullanılırsa ve  $m = m' \rightarrow \infty$  limit alınıp ve  $H$  da;  $u_{0m} \rightarrow u_0$  a güçlü yakınsak olduğu da gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} - \int_0^T (u(t), \psi'(t) w_j) dt + \nu \int_0^T (\nabla u(t), \psi(t) \nabla w_j) dt &= (u_0, w_j) \psi(0) \\ &+ \int_0^T \langle f(t), w_j \rangle \psi(t) dt \end{aligned} \quad (3.30)$$

yazılır. Bu eşitlik her  $j$  için sağlandığından;  $w_j$  lerin sonlu bir lineer kombinasyonu olan her bir  $v$  için

$$- \int_0^T (u(t), v) \psi'(t) dt + \nu \int_0^T (\nabla u(t), \nabla v) \psi(t) dt = (u_0, v) \psi(0) + \int_0^T \langle f(t), v \rangle \psi(t) dt \quad (3.31)$$

sağlanır.

Eş.3.31'de  $\psi = \phi \in D(0, T)$  yazılırsa;

$$\frac{d}{dt} (u, v) + \nu (\nabla u, \nabla v) = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in V; \quad (3.32)$$

eşitliği  $(0, T)$  üzerinde genelleştirilmiş anlamda sağlanır. Sonuç olarak Teorem 3.1'in ispatı tamamlanmış olur.

### 3.2. Lineerleştirilmiş Navier-Stokes Denkleminin Zayıf Çözümlerinin Tekliği

Bu bölümde lineerleştirilmiş Navier- Stokes denkleminin tekliği incelenecektir. Çalışmalarımızın bu kısmında [11] nolu kaynaktan yararlanılmıştır. Teklik için gerekli olan aşağıdaki lemma ispatsız olarak verilecektir.

#### 3.1. Lemma [11]

$V, H, V'$  Hilbert uzaylarını göz önüne alalım.  $V'$  uzayı  $V$  uzayının,  $H'$  de  $H$  uzayının dual uzayı olmak üzere  $V \subset H \equiv H' \subset V'$  olduğundan  $u \in L^2(0, T; V)$  ve  $u$  nun türevi  $u'$  olmak üzere  $u' \in L^2(0, T; V')$  ise bu durumda  $u$  fonksiyonu  $[0, T] \rightarrow H$  'ya hemen hemen her yerde sürekli bir fonksiyona eşit olur. ve

$$\frac{d}{dt} |u|^2 = 2 \langle u', u \rangle \quad (3.33)$$

eşitliği  $(0, T)$  üzerinde genelleştirilmiş anlamda sağlanır.

Yani;

$$(i) t \rightarrow |u(t)|^2$$

$$(ii) t \rightarrow (u'(t), u(t))$$

(i) ve (ii),  $[0, T]$  üzerinde integrallenebilir olduğundan Eş.3.33 anlamlıdır.

Problemin çözümünün tekliği için bu lemmadan yararlanılacaktır. Navier – Stokes denkleminin karşılık gelen zayıf problemin bir başka ifadesi aşağıdaki formda yazılabilir. Yani Eş.3.1 – Eş.3.4 ile verilen problem aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

### 3.1. Problem

$f \in L^2(0, T; V')$   $u_0 \in H$  verilsin.

$$u \in L^2(0, T; V) \quad , \quad u' \in L^2(0, T; V') \quad (3.34)$$

$$u' + \nu Au = f \quad (0, T) \text{ de} \quad (3.35)$$

$$u(0) = u_0 \quad (3.36)$$

eşitliklerini sağlayan bir tek  $u$  çözümü vardır.

Burada  $A$  operatörü aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$$-\Delta = A : V \rightarrow V'$$

### 3.2. Teorem [11]

Problem 3.1’de verilen Eş.3.35’in bir tek  $u$  çözümü vardır.

*İspat* [11]

Eş.3.34 – Eş.3.36’daki probleminin iki çözümü  $u$  ve  $v$  olsun. Buna göre

$$\begin{aligned} u' - \nu \Delta u &= f \\ v' - \nu \Delta v &= f \end{aligned}$$



eşitlikleri sağlanır. Bu denklemler taraf tarafa çıkarılır ve  $w = u - v$  alınırsa

$$(u' - v') - \nu(\Delta(u - v)) = 0 \text{ olduğundan}$$

$$w' + \nu Aw = 0 \quad (3.37)$$

elde edilir. Diğer taraftan başlangıç koşulları dikkate alınır;

$$w(0) = 0 \quad (3.38)$$

olur.

Eş.3.37'deki denklemin  $w(t)$  skaler çarpımı alınır;

$$\begin{aligned} \langle w'(t), w(t) \rangle + \nu(Aw, w(t)) &= 0 \\ \langle w'(t), w(t) \rangle + \nu(-\Delta w, w) &= 0 \\ \langle w'(t), w(t) \rangle + \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla w dx &= 0 \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. İç çarpım ve norm özelliklerinden;

$$\frac{d}{dt} \|w(t)\|^2 + 2\nu \|\nabla w\|^2 = 0$$

olur. 0 dan  $T$  ye integral alınır;

$$\int_0^T \frac{d}{dt} \|w(t)\|^2 + 2\nu \int_0^T \|\nabla w\|^2 = 0$$

$$\|w(t)\|^2 - \|w(0)\|^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla w\|^2 = 0$$

$$\|w(t)\|^2 - \|w(0)\|^2 \leq 0$$

$$0 \leq \|w(t)\|^2 \leq \|w(0)\|^2$$

olur. Burada Eş.3.38 göz önüne alınırsa;

$$0 \leq \|w(t)\|^2 \leq 0 \text{ bulunur.}$$

O halde;

$$\|w(t)\| = 0 \tag{3.39}$$

olacağından

$$u(t) = v(t) \tag{3.40}$$

yazılabilir. Böylece Eş.3.40'dan dolayı problem 3.1'in  $u$  çözümü tektir.

#### 4. NAVIER-STOKES DENKLEMİNİN ZAYIF ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI VE TEKLİĞİ ÜZERİNE

Bir önceki bölümde Stokes probleminin zayıf çözümlerinin varlık ve teklik sonuçları elde edilmiştir. Bu bölümde ise lineer olmayan terimlerinde bulunduğu;

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u = f - \nabla p + \nu \Delta u \quad (4.1)$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad (4.2)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \quad (4.3)$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad (4.4)$$

Navier- Stokes denklemlerine karşılık gelen yukarıda belirtilen başlangıç ve sınır değer probleminin zayıf çözümleriyle ilgili varlık ve teklik sonuçları incelenecektir. Bu kısımda çalışmalarımızda [2, 11] kaynaklarından yararlanılmıştır.

##### 4.1. Navier- Stokes Denkleminin Zayıf Çözümlerinin Varlığı Üzerine

Teorem ifade edilmeden önce ispat için gerekli olan aşağıdaki lemmalar ispatsız olarak ifade edilecektir. İspat için M.Mohanna Rama Rao'nun Ordinary Differential Equations kitabından bakılabilir.

##### 4.1. Lemma (Ascoli-Arzelà)

$\Omega \subset R^n$  kompakt cümlesi üzerinde  $(f_n(x))$ ,  $n = 1, 2, \dots$  fonksiyonlar dizisi sınırlı ve eşsüreklili olsun. Bu durumda  $\Omega$  üzerinde düzgün yakınsak bir  $(f_{n_k}(x))$  alt dizisi vardır.

#### 4.2. Lemma (Picard Lindelöf)

$f(t, x)$ ,  $B_0 : t_0 \leq t \leq t_0 + a, \|x - x_0\| \leq b$  üzerinde sürekli ve Lipschitz koşulunu sağlasın. Bu durumda

$$x' = f(t, x), x(t_0) = x_0$$

Başlangıç değer problemi  $[t_0, t_0 + \alpha]$  üzerinde bir tek  $x(t)$  çözümüne sahiptir. Burada  $a$  ve  $b$  pozitif reel sayılar ve

$$\alpha = \min\left(a, \frac{b}{\mu}\right), \mu = \max_{(t, x) \in B_0} \|f(t, x)\| \text{ dir.}$$

#### 4.1. Teorem [2]

$\Omega, \mathbb{R}^n$ 'de açık Lipschitz sınırlı bir cümle ve  $V = \{u \in D(\Omega); \operatorname{div} u = 0\}$  olsun.  $V$  nin  $L^2(\Omega)$ 'daki kapanışı  $H$ ,  $H_0^1$  uzayındaki kapanışı  $V$  olsun.  $u_0 \in H(\Omega), f \in L^2(\Omega_T)$  ve  $T > 0$  olmak üzere Eş.4.1 – Eş.4.4'deki denklemler  $\Omega_T$  üzerinde zayıf çözümleri vardır.

*İspat* [2]

İspat için “ Faedo – Galerkin “ metodu kullanılacaktır. Eş.4.1 – Eş.4.4'deki probleminin varyasyonel formunu elde etmek için Eş.4.1'deki denklemi  $\varphi \in V$  ile skaler çarparak  $\Omega_T$  üzerinden integral alınırsa

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \varphi\right) + ((u \cdot \nabla)u, \varphi) = (f, \varphi) - (\nabla p, \varphi) + \nu(\Delta u, \varphi) \quad (4.5)$$

denklemi elde edilir.

Bu denklemde gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\frac{d}{dt}(u, \varphi) + (u \cdot \nabla u, \varphi) + \nu(\nabla u, \nabla \varphi) = (f, \varphi) \quad (4.6)$$

eşitliği bulunur.  $\{\psi_r\} \subset D(\Omega), H(\Omega)$  uzayı üzerinde bir baz olsun. Böylece her

$$k \in N \text{ için; } u_k(x, t) = \sum_{i=1}^k c_{ki}(t) \psi_i(x) \text{ yaklaşık çözümü tanımlanırsa; ve } u_k(x, t)$$

Eş.4.6'da yerine yazılırsa;

$$\frac{d}{dt}(u_k, \psi_r) + (u_k \cdot \nabla u_k, \psi_r) + \nu(\nabla u_k, \nabla \psi_r) = (f, \psi_r) \quad i = 1, \dots, k \quad (4.7)$$

bulunur.

Buradan da;

$$\sum_{i=1}^k (\psi_i, \psi_r) c'_{ki}(t) + \nu \sum_{i=1}^k (\nabla \psi_i, \nabla \psi_r) c_{ki}(t) + \sum_{i,s=1}^k (\psi_i \nabla \psi_s, \nabla \psi_r) c_{ki} c_{ks} = (f, \psi_r)$$

$i=1, \dots, k$  denklem sistemi elde edilir.  $\psi_1, \dots, \psi_k$  lar lineer bağımsızdır.

$(\psi_i, \psi_r)$  ( $1 \leq i, r \leq k$ ) elemanlarının oluşturduğu matris singüler olmayan matristir; dolayısıyla tersi vardır. Bu matrisin tersi ile yukarıdaki sistem çarpılırsa

$$\frac{dc_{ki}}{dt} + \sum_{i=1}^k a_{ir} c_{ki} + \sum_{i,s=1}^k a_{isr} c_{ki} c_{ks} = f_r \quad i = 1, \dots, k \quad (4.8)$$

sabit katsayılı diferansiyel denklem sistemi elde edilir.

$u_{ok}$ ,  $H$  da  $u_0$  'ın  $\psi_1, \dots, \psi_k$  tarafından gerilen uzayda dik izdüşümüdür. Böylece Eş.4.8'deki sistem;

$$c_{ki}(0) = c_{0r} = (u_0, \psi_r) \quad (4.9)$$

başlangıç şartıyla birlikte düşünülür.

Burada;

$$\begin{aligned} f_r &= (f, \psi_r) \\ a_{ir} &= v(\nabla \psi_i, \nabla \psi_r) \\ a_{isr} &= (\psi_i(x) \cdot \nabla \psi_s, \psi_r) \end{aligned}$$

olarak alınmıştır.  $f_r \in L^2(0, T)$  ve daha sonra elde edileceği üzere  $c_{ki}$  ler sınırlı  $a_{ir}$  ler reel sabitler olduğundan Picard Lindelöf teoreminden dolayı Eş.4.8 ve Eş.4.9'daki sisteminin bir tek  $c_{ki} \in W^{1,2}(0, T_k)$  çözümü vardır. Burada

$$T_k \leq T \text{ dir.}$$

Eş.4.8'deki denklemi  $c_{ki}$  lerle çarpıp  $i = 1, \dots, k$  'ya toplam alınır ve  $\{\psi_r\}$  lerinde ortonormal özelliği kullanılırsa ve her  $\psi \in D(\Omega)$  için

$$\left(\frac{\partial u_k}{\partial t}, u_k\right) + (u_k \cdot \nabla u_k, u_k) = (f, u_k) - v(\nabla u_k, \nabla u_k) \quad (4.10)$$

denklemi elde edilir.

$$\frac{d}{dt}(u_k, u_k) = \left(\frac{\partial u_k}{\partial t}, u_k\right) + \left(u_k, \frac{\partial u_k}{\partial t}\right) = 2\left(\frac{\partial u_k}{\partial t}, u_k\right)$$

olduğu göz önünde bulundurularak.

$$\left(\frac{\partial u_k}{\partial t}, u_k\right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (u_k, u_k) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_k\|_2^2 \quad (4.11)$$

yazılabilir. Eş.4.11'i Eş.4.10'daki denklemde yerine yazılırsa ve  $(u_k, \nabla u_k, u_k) = 0$  olduğu dikkate alınır;

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_k\|^2 = -\nu \|\nabla u_k\|^2 + (f, u_k) \quad (4.12)$$

denklemini elde edilir.

Bu denklem  $t \in [0, T]$  olduğundan 0'dan  $t$  ye integrali alınır;

$$\frac{1}{2} (\|u_k(t)\|^2 - \|u_{0k}\|^2) \leq \int_0^t (f, u_k) dt - \nu \int_0^t \|\nabla u_k\|^2 dt \text{ olur.}$$

Gerekli işlemler yapılırsa

$$\frac{1}{2} (\|u_k(t)\|^2 + \nu \int_0^t \|\nabla u_k\|^2 dt) \leq \int_0^t \|f\| \|u_k\| dt + \frac{1}{2} \|u_k(0)\|^2$$

elde edilir.

Bulunan son denklemde Young eşitsizliği kullanırsa;

$$\frac{1}{2} \|u_k\|^2 + \nu \int_0^t \|\nabla u_k\|^2 dt \leq \int_0^t \left( \frac{\varepsilon}{2} \|u_k\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|f\|^2 \right) dt + \frac{1}{2} \|u_k(0)\|_2^2 \text{ bulunur.}$$

Bu denklemde Poincare-Friederic eşitsizliği kullanılırsa;

$$\frac{1}{2}\|u_k\|^2 + \nu \int_0^t \|\nabla u_k\|^2 dt \leq \int_0^t \left( \frac{\varepsilon}{2} c \|\nabla u_k\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|f\|^2 \right) dt + \frac{1}{2}\|u_k(0)\|^2$$

elde edilir. Düzenlemeler yapılırsa;

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|u_k\|^2 + \left( \frac{2\nu - \varepsilon c}{2} \right) \int_0^t \|\nabla u_k\|^2 dt &\leq \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t \|f\|^2 dt + \frac{1}{2}\|u_k(0)\|^2 \\ \|u_k\|^2 + (2\nu - \varepsilon c) \int_0^t \|\nabla u_k\|^2 dt &\leq \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \|f\|^2 dt + \|u_k(0)\|^2 \end{aligned}$$

eşitsizliğinde her  $\varepsilon > 0$  için özel olarak  $\varepsilon = \frac{\nu}{c}$  alınır;

$$\|u_k\|^2 + \nu \int_0^t \|\nabla u_k\|^2 dt \leq \frac{c}{\nu} \int_0^t \|f\|^2 dt + \|u_k(0)\|^2 \quad \text{eşitsizliği elde edilir.} \quad \|u_k(0)\| \leq \|u_0\| \text{ ve}$$

$f \in L^2(\Omega_T)$  olduğu dikkate alınır;

$$\|u_k\|^2 + \nu \int_0^t \|\nabla u_k\|^2 dt \leq M \quad \forall t \in [0, T] \quad (4.13)$$

$$\|u_k\|^2 \leq M \quad (4.14)$$

elde edilir.

$$\|u_k(x, t)\|^2 = \sum_{r=1}^k c_{ki}^2(t) \leq M \text{ olacağından } \forall i = 1, \dots, k \text{ için}$$

$$c_{ki}^2(t) \leq c_{k1}^2(t) + \dots + c_{kk}^2(t) \leq M \text{ yani } |c_{ki}| \leq M^{1/2} \text{ olur.}$$

Eş.4.8 ve Eş.4.9 denklemlerine geri dönülürse

$$\text{her } k \in N \text{ için } T_k = T \quad (4.15)$$



olur.

Şimdi  $k \rightarrow \infty$  iken  $\{u_k\}$  dizisinin yakınsaklığı araştırılacaktır. Bunun için

$$G_k^{(r)}(t) = (u_k(t), \psi_r); \quad (r \in N \text{ herhangi bir sabit})$$

fonksiyonlar dizisi alınsın.  $\{G_k^{(r)}(t)\}$  fonksiyonlar dizisinin düzgün sınırlı ve düzgün sürekli olduğu gösterilecektir.  $\{G_k^{(r)}(t)\}$  dizisinin düzgün sınırlı olduğu Eş.4.14'den kolayca görülür.

Düzgün sürekliliğini göstermek için Eş.4.7'deki denklemin  $s$  den  $t$  ye integrali alınır;

$$\int_s^t \frac{d}{dt} (u_k, \psi_r) dt = -v \int_s^t (\nabla u_k, \nabla \psi_r) dt - \int_s^t (u_k \nabla u_k, \psi_r) dt + \int_s^t (f, \psi_r) dt$$

eşitliğinden;

$$|(u_k(t), \psi_r) - (u_k(s), \psi_r)| = \left| -v \int_s^t (\nabla u_k, \nabla \psi_r) dt - \int_s^t (u_k \nabla u_k, \psi_r) dt + \int_s^t (f, \psi_r) dt \right|$$

elde edilir.

Gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\begin{aligned} |(u_k(t), \psi_r) - (u_k(s), \psi_r)| &\leq v \int_s^t \|\nabla u_k\| \cdot \|\nabla \psi_r\| dt \\ &\quad + \int_s^t \|u_k\| \|\nabla u_k\| \max_{x \in \Omega} |\psi_r(x)| dt + \int_s^t \|f\| \cdot \|\psi_r\| dt \end{aligned} \quad (4.16)$$

eşitsizliği elde edilir.

Burada;

$$\|\psi_r\|_2 = S_1 \quad ; \quad \max_{x \in \Omega} |\psi_r(x)| = S_2 \quad (4.17)$$

ile gösterilirse ve Poincare eşitsizliği kullanılırsa ayrıca Eş.4.14 dikkate alınır;

$$\begin{aligned} |(u_k(t), \psi_r) - (u_k(s), \psi_r)| &\leq \nu \cdot S_1 \int_s^t \|\nabla u_k\| dt + S_2 \cdot M^{1/2} \int_s^t \|\nabla u_k\| dt + S_1 \int_s^t \|f\| dt \\ &\leq S_1 \int_s^t (\nu \cdot \|\nabla u_k\| + \|f\|) dt + S_2 M^{1/2} \int_s^t \|\nabla u_k\| dt \end{aligned}$$

bulunur. Cauchy - Schwarz eşitsizliği kullanılırsa;

$$\begin{aligned} |(u_k(t), \psi_r) - (u_k(s), \psi_r)| &\leq \nu \cdot S_1 \sqrt{t-s} \left( \int_s^t \|\nabla u_k\|^2 dt \right)^{1/2} + S_1 \sqrt{t-s} \left( \int_s^t \|f\|^2 dt \right)^{1/2} \\ &\quad + S_2 \cdot M^{1/2} \sqrt{t-s} \cdot \left( \int_s^t \|\nabla u_k\|^2 d\psi \right)^{1/2} \\ &\leq (\nu \cdot S_1 M^{1/2} + S_2 \cdot M + S_1 M^{1/2}) \sqrt{t-s} \end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece

$$t \rightarrow s \text{ iken } |(u_k(t), \psi_r) - (u_k(s), \psi_r)| \rightarrow 0 \quad (4.18)$$

Buradan  $\{G_k^{(r)}(t)\}$  nin düzgün sürekli olduğu görülür. Ascoli-Arzelà teoreminden  $\{G_k^{(r)}(t)\}_{k \in N}$  dizisinden yakınsak bir alt dizisi seçebiliriz. Bu alt diziyi Cantor'un diogonalleştirme metodundan  $\{G_k^{(r)}(t)\}_{k \in N}$  olarak alırsak; bu dizi düzgün olarak sürekli bir  $G^{(r)}(t)$  fonksiyonuna yakınsaktır.  $H$  uzayının zayıf kompaktlığından

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (u_k(t) - u(t), \psi_r) = 0 \quad (4.19)$$

düzgün olarak  $t \in [0, T]$  ve  $\forall r \in N$  olacak şekilde  $u(t) \in H(\Omega)$  vardır. Şimdi  $u_k(t)$  nin  $u(t)$  ye  $L^2$  de zayıf yakınsak yani;

$\lim_{k \rightarrow \infty} (u_k(t) - u(t), v) = 0$  ;  $t \in [0, T]$  ;  $\forall v \in L^2(\Omega)$  olduğu gösterilecektir. Helmholtz ayrışımından sadece  $v \in H(\Omega)$  için göstermek yeter.  $u_k - u \in H$  olduğundan  $v \in H$  olursa  $(u_k - u, v) = 0$  olur.

$$v = \sum_{r=1}^{\infty} v_r \psi_r = \sum_{r=1}^N v_r \psi_r + v^{(N)} \quad (4.20)$$

olarak yazılır.

$$\begin{aligned} |(u_k(t) - u(t), v)| &\leq \sum_{r=1}^N |(u_k(t) - u(t), v_r \psi_r)| + |(u_k(t) - u(t), v^{(N)})| \\ &\leq \sum_{r=1}^N \|v\| |(u_k(t) - u(t), \psi_r)| + 2M^{1/2} \|v^{(N)}\| \end{aligned}$$

$u_k(t)$ ,  $u(t)$  ye zayıf yakınsak olduğundan

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |(u_k(t) - u(t), \psi_r)| = 0 \text{ ve}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > k \in N \text{ için } \|v^{(N)}\| < \varepsilon \text{ olur.}$$

Buradan

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (u_k(t) - u(t), v) = 0 \quad (4.21)$$

elde edilir.

Eş.4.14'den  $\text{ess sup} \|u_k\|^2 \leq M$  olduğundan;

$$u_k \in L^\infty(0, T; H) \quad (4.22)$$

yazılabilir.

Buda bize  $k \rightarrow \infty$  iken  $L^\infty(0, T; H)$  da bir  $u$  elemanın varlığını gösterir. Eş.4.22'den  $\{u_k\}$  dizisi  $L^\infty(0, T; H)$  da sınırlıdır. Ve  $L^\infty(0, T; H)$  uzayı zayıf kompakttır. Bu ikisinden  $u_k$  dizisi  $L^\infty(0, T; H)$  da zayıf yıldız topolojisine göre  $u$ 'ya yakınsar.

Yani

$$k \rightarrow \infty \text{ iken } \int_0^T (u_k - u, v) ds \rightarrow 0 \quad \forall v \in L^1(0, T; H) \quad (4.23)$$

sonucunu verir. Eş.4.13'den  $\int_0^T \|\nabla u_k\|_2^2 \leq M$  olduğundan;

$$u_k \in L^2(0, T; V) \quad (4.24)$$

yazılabildiğinden  $\{u_k\}$  dizisi  $L^2(0, T; V)$  de sınırlıdır ve  $L^2(0, T; V)$  uzayı zayıf kompakttır. Bu ikisinden

$$u_k \rightarrow u^* \in L^2(0, T; V)$$

yazılabilir. Yani;  $u_k$   $L^2(0, T; V)$  de  $u^*$ 'a zayıf yakınsar.

Böylece;

$$\int_0^T \langle u_k - u^*, v \rangle ds \rightarrow 0 \quad \forall v \in L^2(0, T; V') \quad (4.25)$$

yazılabilir.

$$V \subset H \equiv H' \subset V' \quad (4.26)$$

$V$  uzayı  $H$  da yoğun olacak şekilde,  $H'$  uzayı  $V'$  de yoğun olacak şekilde içerilmektedir.

Buradaki birebir dönüşümler süreklidir.  $H'$  ve  $V'$  uzayları sırasıyla  $H$  ve  $V$  uzaylarının dualidir.

Yukarıdaki açıklamalardan  $f \in H$  ve  $u \in V$  olmak üzere  $H$  daki  $(f, u)$  skaler çarpımı  $V'$  ve  $V$  arasındaki dualiteye göre  $f$  ve  $u$  nun skaler çarpımı  $\langle f, u \rangle$  ile gösterilirse

$$\langle f, u \rangle = (f, u) \quad (4.27)$$

eşitliği yazılır.

Burada  $\{u_k\}$  dizisinin limitinin tekliğinden

$$u^* = u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H) \quad (4.28)$$

yazılır.

$u_k$   $u$  ya  $L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$  de yakınsaktır. Şimdi Eş.4.7'de limite geçileceği gösterilecektir.

Eş.4.21, Eş.4.23, Eş.4.25 dikkate alınır,  $\{u_k\}$  dizisinin  $u$  ya güçlü yakınsadığı gösterilecektir. Bunun için Friederichs eşitsizliği kullanacaktır.

#### 4.3. Lemma (Friederichs eşitsizliği) [1]

$C$ ,  $\mathbb{R}^n$  de bir küp olsun. Bu durumda herhangi  $\eta > 0$  için  $w_i \in L^\infty(C)$   $i = 1, \dots, k$  olmak üzere

$$\int_0^T \|w(t)\|_{2,C}^2 dt \leq \sum_{i=1}^k \int_0^T (w(t), w_i)_C^2 dt + \eta \int_0^T \|\nabla w(t)\|_{2,C}^2 dt \quad (4.29)$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir  $K(\eta, C) \in \mathbb{N}$  fonksiyonu vardır.

Friederichs eşitsizliğinde  $w = u_k - u$  alınır

$$\int_0^T \|u_k - u\|_{2,C}^2 dt \leq \sum_{i=1}^k \int_0^T (u_k - u(t), w_i)_C^2 dt + \eta \int_0^T \|\nabla u_k - \nabla u\|_{2,C}^2 dt \quad \text{elde edilir.}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T (u_k - u(t), \psi_r) = 0 \text{ ve Eş.4.13'den}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T \|u_k - u\|_{2,C}^2 dt = 0 \quad (4.30)$$

elde edilir. Dolayısıyla;

$u_k \rightarrow u$  ya güçlü yakınsar.

Eş.4.7 göz önüne alınsın.  $0 < t \leq T$  olmak üzere

$$\frac{d}{dt} (u_k, \psi_r) = -v(\nabla u_k, \nabla \psi_r) - (u_k, \nabla u_k, \psi_r) + (f, \psi_r)$$

eşitliğinin  $0 \leq t \leq T$  değişkenine göre integrali alınırsa;

$$\begin{aligned} \int_0^t \{ -v(\nabla u_k, \nabla \psi_r) - (u_k \cdot \nabla u_k, \psi_r) \} ds &= - \int_0^t (f, \psi_r) ds + \int_0^t \frac{d}{dt} (u_k(t), \psi_r) \\ \int_0^t \{ -v(\nabla u_k, \nabla \psi_r) - (u_k \cdot \nabla u_k, \psi_r) \} ds &= - \int_0^t (f, \psi_r) ds + (u_k(t), \psi_r) - (u_0, \psi_r) \end{aligned} \quad (4.31)$$

elde edilir.

$u_k \rightarrow u$  ya ve  $\nabla u_k \rightarrow \nabla u$  zayıf yakınsadığından yani;

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (u_k(t) - u(t), \psi_r) = 0 \quad (4.32)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t (\nabla u_k(s) - \nabla u(s), \psi_r) ds = 0 \quad (4.33)$$

yazılabilir.

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t (u_k \cdot \nabla u_k, \psi_r) - (u \cdot \nabla u, \psi_r) ds \right| &= \left| \int_0^t (u_k \cdot \nabla u_k - u \cdot \nabla u_k + u \cdot \nabla u_k - u \cdot \nabla u, \psi_r) ds \right| \\ \left| \int_0^t (u_k \cdot \nabla u_k, \psi_r) - (u \cdot \nabla u, \psi_r) ds \right| &\leq \left| \int_0^t (u_k - u) \cdot \nabla u_k, \psi_r ds \right| + \left| \int_0^t u \cdot \nabla (u_k - u), \psi_r ds \right| \\ \left| \int_0^t (u_k - u) \cdot \nabla u_k, \psi_r ds \right| &\leq S \left( \int_0^t \|u_k - u\|_{2,C}^2 dt \right)^{1/2} \left( \int_0^t \|\nabla u_k\|_2^2 dt \right)^{1/2} \\ \left| \int_0^t (u_k - u) \cdot \nabla u_k, \psi_r ds \right| &\leq S M^{1/2} \left( \int_0^t \|u_k - u\|_{2,C}^2 dt \right)^{1/2} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada  $S = \max_{x \in C} |\psi(x)|$  dir.

Eş.4.30'dan dolayı

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \int_0^t (u_k - u) \nabla u_k, \psi_r \right| = 0 \quad (4.34)$$

yazılır.

Bunun yanında  $u \cdot \nabla u = u_i \partial_i u_j = \sum_{i=1}^2 u_i \partial_i u_j$  olduğundan

$u \cdot \nabla (u_k - u) = \sum_{m=1}^n u_m \partial_m (u_k - u)$  eşitliği dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t (u \cdot \nabla (u_k - u), \psi_r) ds \right| &\leq \left| \int_0^t \sum_{m=1}^n u_m \partial_m (u_k - u), \psi_r ds \right| \\ \left| \int_0^t (u \cdot \nabla (u_k - u), \psi_r) ds \right| &\leq \sum_{m=1}^n \int_0^t (\partial_m (u_k - u), u_m \psi_r) ds \end{aligned}$$

olduğundan ve Eş.4.33'den

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \int_0^t (u \cdot \nabla (u_k - u), \psi_r) ds \right| = 0 \quad (4.35)$$

elde edilir.

Böylece;

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t [(u_k \cdot \nabla u_k, \psi_r) - (u \cdot \nabla u, \psi_r)] ds \rightarrow 0 \quad (4.36)$$

Buradan  $k \rightarrow \infty$  için Eş.4.31'de Eş.4.32, Eş.4.33, Eş.4.36 eşitlikleri kullanılarak limite geçilebilir.



Böylece;

$$\int_0^t \{-\nu(\nabla u, \nabla \psi_r) - (u \cdot \nabla u, \psi_r)\} ds = -\int_0^t (f, \psi_r) ds + (u(t), \psi_r) - (u_0, \psi_r) \quad (4.37)$$

elde edilir.

Yani zayıf çözümün tanımında dikkate alındığında Eş.4.1 – Eş.4.4 denkleminin bir zayıf çözümü  $u$ 'dur.

#### 4.2. Navier - Stokes Denkleminin Zayıf Çözümlerinin Tekliği

Bu bölümde Navier - Stokes denkleminin zayıf çözümünün tekliği incelenecektir. Teklik teoremini ispat etmeden önce;

$$b(u, v, w) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} u_i (D_i v_j) w_j dx$$

üç lineer formuyla ilgili olarak aşağıdaki lemmalar verilecektir.

#### 4.4. Lemma [11]

$$b(u, v, w) = -b(u, w, v) \quad ; \quad \forall u \in V, \quad w, v \in H_0^1(\Omega) \cap L^n(\Omega)$$

$$b(u, v, v) = 0 \quad ; \quad \forall u \in V, \quad v \in H_0^1(\Omega) \cap L^n(\Omega)$$

eşitlikleri sağlanır.

*İspat* [11]

$$b(u, v, w) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} (u_i (D_i v_j) v_j) dx = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} (v_i D_i (v_j)^2) dx$$

$$b(u, v, v) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} D_i (u_i \frac{v_j^2}{2}) dx - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{v_j^2}{2} D_i u_i dx$$

$$b(u, v, v) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\partial\Omega} u_i v_j^2 n_i ds - \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} v_j^2 \nabla u dx$$

eşitsizliği elde edilir. Sınır koşulu ve  $\nabla u = 0$  olduğu dikkate alınırsa  $b(u, v, v) = 0$  bulunur.

$$b(u, v, w) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} u_i (D_i v_j) w_j dx \text{ tanımından hareketle devam edilirse;}$$

$$b(u, v, w) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} D_i (u_i v_j w_j) dx - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} (D_i u_i) v_j w_j dx - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} u_i v_j D_i w_j dx$$

$$b(u, v, w) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\partial\Omega} u_i v_j w_j ds - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} u_i D_i w_j v_j dx$$

$$b(u, v, w) = -b(u, w, v)$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

#### 4.5. Lemma [11]

$$|b(u, v, w)| \leq 2^{1/2} \|u\|^{1/2} \|\nabla u\|^{1/2} \|\nabla v\|^{1/2} \|w\|^{1/2} \quad \forall u, v, w \in H_0^1(\Omega)$$

Ayrıca;  $u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$  alınırsa;

$Bu = u \cdot \nabla u$  ve  $B(u, v) = u \cdot \nabla v$  olmak üzere

$Bu \in L^2(0, T; V')$  olur.

Böylece  $\|Bu\|_{L^2(0, T; V')} \leq 2^{1/2} \|u\|_{L^\infty(0, T; H)} \cdot \|\nabla u\|_{L^2(0, T; V')}$  yazılabilir.

*İspat* [11]

#### 4.1. Problem [11]

$$f \in L^2(0, T; V')$$

$$u_0 \in H$$

verilsin.  $V$  nin dual uzayı  $V'$  olmak üzere

$$u \in L^2(0, T; V) \quad u' \in L^1(0, T; V') \quad (4.38)$$

$$u' + \nu Au + Bu = f \quad (0, T) \text{ de} \quad (4.39)$$

$$u(0) = u_0 \quad (4.40)$$

eşitliklerini sağlayan bir tek  $u$  çözümü vardır.

#### 4.2. Teorem [11]

Problem 4.1'in 2 boyutlu uzayda bir tek  $u$  çözümü vardır. Bunun yanında  $u$   $[0, T]$  den  $H$  ya hemen hemen her yerde sürekli bir fonksiyona eşittir ve  $t \rightarrow 0$  iken  $H$  'da  $u(t) \rightarrow u_0$  dır.

*İspat* [11]

Eş.4.39 ve Lemma 4.5 göz önüne alınırsa;  $u' = f - \nu Au - Bu$  eşitliğinin sağ tarafındaki her bir terim  $L^2(0, T; V')$  ye aittir. Böylece  $u' \in L^2(0, T; V')$  dür. Lemma 3.1'den  $[0, T]$  den  $H$  ya hemen hemen her yerde sürekli bir fonksiyona eşittir. Böylece  $u \in C([0, T]; H.)$  dir ve  $H$  da  $t \rightarrow 0$  için  $u(t) \rightarrow u_0$  sağlanır. Aynı zamanda Lemma 3.1'den  $u \in L^2(0, T; V)$  ,  $u' \in L^2(0, T; V')$  olduğundan

$$\frac{d}{dt} |u(t)|^2 = 2 \langle u'(t), u(t) \rangle \text{ eşitliği sağlanır.}$$

Şimdi problem 4.1'in tekliği gösterilecektir. Kabul edelim ki Eş.4.39'un iki çözümü  $u_1$  ve  $u_2$  olsun. O zaman

$$\begin{aligned}\frac{du_1}{dt} &= f + v\Delta u_1 - u_1 \cdot \nabla u_1 \\ \frac{du_2}{dt} &= f + v\Delta u_2 - u_2 \cdot \nabla u_2\end{aligned}$$

denklemleri taraf tarafa çıkarılır ve  $u = u_1 - u_2$  alınırsa;

$$\begin{aligned}\frac{du_1}{dt} - \frac{du_2}{dt} &= v(\Delta u_1 - \Delta u_2) - u_1 \cdot \nabla u_1 + u_2 \cdot \nabla u_2 \\ \frac{du_1}{dt} - \frac{du_2}{dt} + vAu &= -Bu_1 + Bu_2\end{aligned}$$

olduğundan ;

$$u' + vAu = -Bu_1 + Bu_2 \quad (4.41)$$

elde edilir.

Eş.4.41'in  $u(t)$  ile iç çarpımı yapılırsa;

$$\begin{aligned}(u', u) + v(Au, u) &= (Bu_2 - Bu_1, u) \\ (u', u) + v(Au, u) &= (u_2 \cdot \nabla u_2, u) - (u_1 \cdot \nabla u_1, u)\end{aligned}$$

elde edilir.

Eş.4.39'dan ve Lemma 4.5'den ;

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|^2 + 2v \|\nabla u(t)\|^2 = 2b(u_2, u_2, u) - 2b(u_1, u_1, u) \quad (4.42)$$

denkleminin sağ tarafındaki elemanları incelenirse;

$$\begin{aligned} b(u, u_2, u) &= \int u \cdot \nabla u_2 \cdot u = \int (u_1 - u_2) \nabla u_2 (u_1 - u_2) \\ b(u, u_2, u) &= \int u_1 \cdot \nabla u_2 (u_1 - u_2) - \int u_2 \cdot \nabla u_2 (u_1 - u_2) \\ b(u, u_2, u) &= b(u_1, u_2, u) - b(u_2, u_2, u) \end{aligned}$$

eşitliğinin sağ tarafına  $b(u_1, u_1, u)$  eklenip çıkarılırsa

$$\begin{aligned} b(u, u_2, u) &= -b(u_2, u_2, u) + b(u_1, u_2, u) - b(u_1, u_1, u) + b(u_1, u_1, u) \\ b(u, u_2, u) &= -b(u_2, u_2, u) + b(u_1, u_1, u) \end{aligned}$$

olduğundan Eş.4.42'den

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|^2 + 2\nu \|\nabla u(t)\|^2 = 2b(u, u_2, u) \quad (4.43)$$

elde edilir. Ve

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|^2 + 2\nu \|\nabla u(t)\|^2 \leq 2|b(u, u_2, u)| \text{ eşitsizliği yazılır.}$$

Lemma 4.5'den

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|u(t)\|^2 + 2\nu \|\nabla u(t)\|^2 &\leq 2.2^{1/2} \|u\|^{1/2} \|\nabla u\|^{1/2} \|\nabla u_2\| \|u\|^{1/2} \|\nabla u\|^{1/2} \\ &\leq 2^{3/2} \|u\| \|\nabla u\| \|\nabla u_2\| \\ &\leq 2 \|\nabla u\| 2^{1/2} \|u\| \|\nabla u_2\| \end{aligned}$$

Young eşitsizliği kullanılırsa;

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \|u(t)\|^2 + 2\nu \|\nabla u(t)\|^2 &\leq \frac{\nu}{2} 2^2 \|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2\nu} 2 \|u\|^2 \|\nabla u_2\|^2 \\ \frac{d}{dt} \|u(t)\|^2 + 2\nu \|\nabla u(t)\|^2 &\leq 2\nu \|\nabla u\|^2 + \frac{1}{\nu} \|u\|^2 \|\nabla u_2\|^2\end{aligned}$$

olduğundan;

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|^2 \leq \frac{1}{\nu} \|u\|^2 \|\nabla u_2\|^2 \quad (4.44)$$

elde edilir.

$t \rightarrow \|\nabla u_2(t)\|^2$  integrallenebilir olduğundan yukarıdaki eşitsizlikten integral alınırsa;

$$\frac{d}{dt} \left\{ \exp\left(-\frac{1}{\nu} \int_0^t \|\nabla u_2(s)\|^2 ds\right) \|u(t)\|^2 \right\} \leq 0 \quad (4.45)$$

elde edilir. İntegral alınırsa  $u(0) = 0 \quad \forall t \in [0, T]$  için  $\|u(t)\|^2 \leq 0$  elde edilir. Böylece

$$u_1 = u_2 \quad (4.46)$$

bulunur yani  $n = 2$  durumunda Bölüm 4.1’de verilen Eş.4.1 – Eş.4.4’de verilen denklemlerinin  $u$  çözümü tektir.

## KAYNAKLAR

- 1 Galdi, G.P., "An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations, Vol. I.", **Springer-Verlag**, New York, 1-451 (1994).
- 2 Galdi, G.P., "Lectures in Mathematical Fluid Dynamics", Ed; G. P., Galdi, J.G. Heywood and R. Rannacher, **Birkhauser Verlag**, Boston-Berlin, 17-21 (2000).
- 3 Iliescu, T., "Large Eddy Simulation for Turbulent Flows", Ph.d., **University of Pittsburgh. Faculty of Arts and Sciences**, Pittsburgh, 1-90 (2000).
- 4 John, V., "Large Eddy Simulation of Turbulent Incompressible Flows Analytical and Numerical Results for a Class of LES Models", Ph.d., **Otto-Von-Guericke-Universitat**, Magdeburg, 1-28 (2002).
- 5 Ladyzhenskaya, O.A., "The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow 2<sup>nd</sup> ed.", **Gordon and Brech**, New York, 173-179 (1969).
- 6 Leray, J., "Essai Sur Les Mouvements Plans d'un Liquide Visqueux que Limitent des Parais", **J. Math. Pures Appl**, 13: 331-418 (1934).
- 7 Leray, J., "Sur Les Mouvements d'un Liquide Visqueux Emplissant l'Escape", **Acta Math**, 63: 193-248 (1934).
- 8 Lions, J.L., "Quelques Methodes de Resolution des Problemes and Limites Non Lineaires", **Dunod, Gauthier-Villars**, Paris, 1-554 (1969).
- 9 Marsden, J. E., Chorin, A., "A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics 2<sup>nd</sup> ed.", **Springer-Verlag**, New York, 1-32 (1990).
- 10 Masuda, K., "Weak Solutions of the Navier-Stokes Equations", **Tohoku Math. Journal**, 36: 623-646 (1984).
- 11 Temam, R., "Navier-Stokes Equations Theory and Numerical Analysis, Revised ed.", **North-Holland Publishing Company - Amsterdam**, New York, 1-13, 157-173, 247-264, 278-318 (1997).
- 12 Temam, R., "Navier-Stokes Equations and Nonlinear Functional Analysis 1<sup>st</sup> ed.", **SIAM**, Philadelphia 1-25 (1983).

## ÖZGEÇMİŞ

### Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : ÇİL, Rukiye  
 Uyruğu : T.C.  
 Doğum tarihi ve yeri : 01.01.1982 Çankırı  
 Medeni hali : Evli  
 e-mail : rukiyea@mynet.com.

| Eğitim Derecesi      | Eğitim Birimi                           | Mezuniyet Tarihi |
|----------------------|-----------------------------------------|------------------|
| Tezsiz Yüksek lisans | Başkent Üniversitesi / Eğitim Bilimleri | 2006             |
| Lisans               | Gazi Üniversitesi / Fen Edebiyat        | 2004             |
| Lise                 | İbn-i Sina Lisesi                       | 2000             |

### İş Deneyimi

| Yıl       | Yer                              | Görev               |
|-----------|----------------------------------|---------------------|
| 2004-2007 | Maltepe Dershaneleri Kızılay Şb. | Matematik Öğretmeni |

### Yabancı Dil

İngilizce