



**DUAL UZAYDA EĞRİLER VE YÜZEYLERLE İLGİLİ BAZI
KARAKTERİZASYONLAR**

Emel KARACA

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

ARALIK 2020

Emel KARACA tarafından hazırlanan “DUAL UZAYDA EĞRİLER VE YÜZEYLERLE İLGİLİ BAZI KARAKTERİZASYONLAR” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalında DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Mustafa ÇALIŞKAN

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum.

Başkan: Unvanı Adı SOYADI

Ana Bilim Dalı, Üniversite Adı

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum.

Üye: Unvanı Adı SOYADI

Ana Bilim Dalı, Üniversite Adı

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum.

Üye: Unvanı Adı SOYADI

Ana Bilim Dalı, Üniversite Adı

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum.

Üye: Unvanı Adı SOYADI

Ana Bilim Dalı, Üniversite Adı

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum.

Tez Savunma Tarihi: 01/12/2020

Jüri tarafından kabul edilen bu çalışmanın Doktora Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum

.....

Prof. Dr. Sena YAŞYERLİ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Emel KARACA

01/12/2020

DUAL UZAYDA EĞRİLER VE YÜZEYLERLE İLGİLİ BAZI KARAKTERİZASYONLAR

(Doktora Tezi)

Emel KARACA

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Aralık 2020

ÖZET

Bu tez çalışması yedi bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, giriş kısmı verilmiştir. İkinci bölümde, ileriki konularda kullanılacak olan temel tanımlar ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde, birim dual küre DS^2 ve birim 2-kürenin tanjant demetinin alt kümesi $T\bar{M}$ arasındaki izomorfizm verilmiştir. E. Study dönüşümünden yararlanarak, $T\bar{M}$ üzerindeki tabii lift eğrisine $\mathbb{R}^3$ te regle yüzey karşılık getirilmiştir. Dördüncü bölümde, ilk olarak, Lorentz birim küresinin tanjant demetinin alt kümesi $T\tilde{M}$ ve Lorentz birim küresi S_1^2 arasındaki izomorfizm verilmiştir. İkinci olarak, hiperbolik birim kürenin tanjant demetinin alt kümesi $T\hat{M}$ ve hiperbolik birim küre $\mathbb{H}^2$ arasındaki izomorfizm verilmiştir. Kurulan bu izomorfizm yardımıyla, $T\tilde{M}$ ve $T\hat{M}$ üzerindeki herhangi bir tabii lift eğrisine $\mathbb{R}_1^3$ te bir regle yüzey karşılık getirilmiştir. Beşinci bölümde, birim dual küre DS^2 ve birim 2- kürenin alt kümesi $T\bar{M}$ arasındaki izomorfizm ve E. Study dönüşümü yardımıyla $\mathbb{R}^3$ te tabii lift eğrisinin striksiyon eğrisinin ürettiği slant regle yüzeyler tanımlanmıştır. Bu tanımlardan yola çıkarak, bazı teoremler ve sonuçlar verilmiştir. Altıncı bölümde, $\mathbb{R}^3$ te tabii lift eğrisinin striksiyon eğrisinin ürettiği Darboux slant regle yüzeyler tanımlanmıştır. Daha sonra, bu slant regle yüzeyle ile ilgili bazı teoremler verilmiştir. Son olarak, yedinci bölümde, sonuç ve öneriler verilmiştir.

Bilim Kodu : 20402
Anahtar Kelimeler : Tabii lift eğrisi, regle yüzey, slant regle yüzey, tanjant demeti, E. Study dönüşümü
Sayfa Adedi : 93
Danışman : Prof. Dr. Mustafa ÇALIŞKAN

SOME CHARACTERIZATIONS FOR CURVES AND SURFACES IN DUAL SPACE

(Ph. D. Thesis)

Emel KARACA

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

December 2020

ABSTRACT

This thesis consists of seven main sections. In first section, the introduction is given. In second section, some basic definitions and theorems that will be used in future topics are stated. In third section, the isomorphism between unit dual sphere, DS^2 and the subset of unit tangent bundle of unit 2-sphere, $T\bar{M}$ is given. Using E. Study mapping, natural lift curve of a given curve on $T\bar{M}$ is corresponded to the ruled surface in $\mathbb{R}^3$. In fourth section, firstly, the isomorphism between the subset of tangent bundle of Lorentzian unit sphere, $T\tilde{M}$ and Lorentzian unit sphere, S_1^2 is given. Secondly, the isomorphism between the subset of the tangent bundle of hyperbolic unit sphere, $T\hat{M}$ and hyperbolic unit sphere, $\mathbb{H}^2$ is given. Using these isomorphism, the natural lift curve of the curve on $T\tilde{M}$ and $T\hat{M}$ is corresponded to ruled surface in $\mathbb{R}_1^3$. In fifth section, using the the isomorphism between unit dual sphere, DS^2 and the subset of unit tangent bundle of unit 2-sphere, $T\bar{M}$ and E. Study mapping, the striction curve of natural lift curve is corresponded to slant ruled surfaces. Some theorems are proved about slant ruled surfaces. In sixth section, Darboux slant ruled surfaces generated by the striction curve of the natural lift curve is introduced. Moreover, some theorems about this slant ruled surface are discussed. In seventh section, conclusions and comments are denoted.

Science Code : 20402
 Key Words : Natural lift curve, ruled surface, slant ruled surface, tangent bundle, E. Study mapping
 Page Number : 93
 Supervisor : Prof. Mustafa ÇALIŞKAN

TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim boyunca ve bu tezin ortaya çıkmasında bilgisi, desteği ve yardımlarından yararlandığım, insani ve ahlaki değerleri ile de örnek aldığım, yanında çalışmaktan onur duyduğum ve ayrıca tecrübelerinden yararlanırken göstermiş olduğu hoşgörü ve sabırdan dolayı en önemli teşekkürü hak eden değerli hocam, danışmanım Prof. Dr. Mustafa ÇALIŞKAN'a, çalışmam boyunca kıymetli bakış açılarıyla katkılarda bulunan ve çalışmama yeni ufuklar açan Prof. Dr. F. Nejat EKMEKÇİ ve Doç. Dr. Mustafa ÖZKAN'a, doktora eğitimimde bana destek veren ve tecrübelerinden yararlandığım Doç. Dr. Sibel PAŞALI ATMACA'ya, manevi desteğiyle ve bilgileriyle her zaman yanımda olan Doç. Dr. Ummahan TOPUZ ACAR'a, Ankara Hacı Bayram Veli Üniversitesi ve Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi matematik bölümündeki bütün hocalarıma ve çalışma arkadaşlarıma, aynı danışman hocada çalışmalarımda fikirlerinden yararlandığım Arş. Gör. Anıl ALTINKAYA'ya, bilgi ve birikimlerini benimle paylaşan Arş. Gör. Dr. Şule Yüksel GÜNGÖR, Araş. Gör. Dr. Melek SOFYALIOĞLU, Öğr. Gör. Dr. Burcu AYHAN ve Arş. Gör. Emre ÇİFTLİKLİ'ye ve manevi varlıklarını hep hissettiğim, bana güvenen tüm arkadaşlarıma teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Bütün hayatım boyunca benden maddi manevi desteklerini esirgemeyen, ideallerimi gerçekleştirme yolunda her daim yanımda olan, bu günlere gelmemi sağlayan aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Doktora eğitimim boyunca "2211 Yurt İçi Doktora Bursu" ile destekleyen TÜBİTAK'a da en içten teşekkürlerimi sunarım. |

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ.....	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	x
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	5
2.1. Öklid Uzayında Temel Tanım ve Kavramlar	5
2.2. Lorentz Uzayında Temel Tanım ve Kavramlar.....	11
2.3. Öklid Uzayında Regle Yüzeylerle İlgili Temel Tanım ve Kavramlar	17
2.4. Minkowski Uzayda Regle Yüzeylerle İlgili Temel Tanım ve Kavramlar	20
2.5. Slant Regle Yüzeylerle İlgili Temel Tanım ve Kavramlar	21
2.6. Dual Uzayla İlgili Temel Tanım ve Kavramlar	31
2.7. Dual Lorentz Uzayla İlgili Temel Tanım ve Kavramlar	38
3. REGLE YÜZEYLER VE BİRİM 2-KÜRENİN TANJANT DEMETİ..	41
4. REGLE YÜZEYLER VE PSEUDO-KÜRELERİN TANJANT DEMETİ.....	51
5. SLANT REGLE YÜZEYLER VE BİRİM 2-KÜRENİN TANJANT DEMETİ.....	63
5.1. Birim 2-Kürenin Tanjant Demeti ve $\vec{q}$ – Slant Regle Yüzeyler	64
5.2. Birim 2-Kürenin Tanjant Demeti ve $\vec{h}$ – Slant Regle Yüzeyler	69
5.3. Birim 2-Kürenin Tanjant Demeti ve $\vec{a}$ – Slant Regle Yüzeyler	75
6. DARBOUX SLANT REGLE YÜZEYLER VE BİRİM 2-KÜRENİN TANJANT DEMETİ.....	79

	Sayfa
7. SONUÇ VE ÖNERİLER	85
KAYNAKLAR	87
ÖZGEÇMİŞ	91

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.1. Lorentz birim küresi $\mathbb{S}_1^2$, hiperbolik birim küre $\mathbb{H}^2 = \mathbb{H}^{2+} \cup \mathbb{H}^{2-}$, lightlike koni Λ	16
Şekil 3.1. Γ_s tabii lift eğrisi	43
Şekil 3.2. Γ_s tabii lift eğrisi ve bu eğri tarafından üretilen regle yüzey	47
Şekil 4.1. Γ_s tabii lift eğrisi tarafından üretilen timelike regle yüzey	58
Şekil 4.2. Γ_s tabii lift eğrisi tarafından üretilen timelike regle yüzey	60
Şekil 5.1. Γ_u striksiyon eğrisi tarafından üretilen $\phi u, v$ slant regle yüzey	77

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
Φ	Regle Yüzey
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_1^3$	Lorentz uzay
$\mathbb{R}^n$	n- boyutlu Reel uzay
$\alpha(s)$	Eğrinin parametrik gösterimi
$\bar{\alpha}(s)$	Tabii lift eğrisi
S^2	Birim 2- küre
TS^2	Birim 2- kürenin tanjant demeti
$\mathbb{S}_1^2$	Lorentz birim küre
$\mathbb{H}^2$	Hiperbolik birim küre
$T\mathbb{S}_1^2$	Lorentz birim kürenin tanjant demeti
$T\mathbb{H}^2$	Hiperbolik birim kürenin tanjant demeti
H^2	Dual hiperbolik birim küre
S_1^2	Dual Lorentz birim küre
DS^2	Birim dual küre
ID^3	ID-Modül
ID_1^3	Dual Lorentz uzay
$T\bar{M}$	Birim 2-kürenin tanjant demetinin alt kümesi
$T\tilde{M}$	Lorentz birim küresinin tanjant demetinin alt kümesi
$T\hat{M}$	Hiperbolik birim kürenin tanjant demetinin alt kümesi

1. GİRİŞ

Diferensiyel geometride, eğri ve yüzeyler teorisi önemli bir rol oynar [1-4]. Eğri ve yüzey uygulamaları, başta geometri olmak üzere mühendislik, bilgisayar programlama, fizik gibi pek çok alanda kullanılmaktadır [5].

Tabii lift eğrisi tanımına, ilk olarak, Thorpe'un kitabında rastlanmıştır [6]. Tabii lift eğrisi, verilen bir eğrinin her noktasındaki birim tanjant vektörlerinin uç noktalarının çizdiği eğri olarak tanımlanır. Literatürde, tabii lift eğrisinin karakterizasyonları ve Frenet çatıları ile ilgili pek çok çalışma bulunmaktadır [7-9].

Yüzeyler teorisi, eğrilerde olduğu gibi pek çok uygulama alanına sahiptir. Yüzeylerin diferensiyel geometrisi üzerine pek çok çalışma bulunmaktadır [10-13]. Yüzeyler teorisi kapsamında bazı özel yüzeyler özellikle günlük hayatta birçok alanda kullanılmaktadır. Bu özel yüzeylerden bir tanesi regle yüzeylerdir. Regle yüzeyler, en genel anlamda, bir doğrunun bir eğri boyunca hareketi sonucu oluşan yüzeyler olarak tanımlanır. Literatürde, regle yüzeylerin teorisi ve karakterizasyonları pek çok yazar tarafından aktif olarak çalışılmıştır [14-24].

Verilen bir regüler eğrinin, eğriliği ve burulması arasındaki ilişki özellikle geometride önemli bir yer tutmaktadır. Bu eğrilerden bir tanesi helis eğrileridir. Helisler, birçok farklı bilim dalında çok geniş kullanım alanlarına ve uygulamalara sahiptirler. Tanım olarak bir genel helis, teğet vektörü sabit bir doğrultuyla sabit açı yapan bir eğri olarak verilir. Literatürde helisler ile ilgili pek çok çalışma mevcuttur [25-29]. Helisin bu tanımına benzer olarak slant helis, asli normal vektörü sabit bir doğrultuyla sabit açı yapan eğri olarak tanımlanmıştır. Slant helisler de helislere benzer olarak yaygın şekilde farklı matematikçiler tarafından çalışılmıştır [30-34].

Dual sayılar, 1873 yılında Clifford tarafından tanımlanmıştır [35]. Daha sonra, E. Study kendi adını verdiği teoremden çizgiler uzayı ve birim dual kürenin noktaları arasında bağlantı kurmuştur [36]. E. Study dönüşümüne göre birim dual kürenin noktalarına $\mathbb{R}^3$ te yönlü doğrular karşılık gelir. Dual uzayla ilgili tanım ve teoremleri kullanarak elde edilen pek çok çalışma mevcuttur [37-40].

Regle yüzeyler, birim 2- kürenin tanjant demeti ve birim dual küre arasında izomorfizm ilk olarak Karakaş ve Gündoğan tarafından verilmiştir [41]. Daha sonra, regle yüzeyler ve birim 2- kürenin tanjant demeti ile ilgili çalışmalar Bekar, Yaylı ve Hathout tarafından yapılmıştır [42]. Bu çalışmada, birim 2- kürenin tanjant demeti ve birim dual küre arasında izomorfizm kurularak tanjant demeti üzerinde alınan eğrinin $\mathbb{R}^3$ te ürettiği regle yüzey ile ilgili karakterizasyonlar verilmiştir. Öklid uzayında regle yüzeyin açılabilirlik şartıyla ilgili sonuçlardan bahsedilmiştir. Aynı yazarlar, Pseudo-kürelerin tanjant demetleri ve dual Lorentz küresi, dual hiperbolik küre arasında izomorfizm kurularak tanjant demeti üzerinde alınan eğrinin $\mathbb{R}_1^3$ te ürettiği regle yüzey ile ilgili karakterizasyonlar vermiştir [43]. Minkowski uzayında regle yüzeyin açılabilirlik şartıyla ilgili sonuçlar verilmiştir.

Regle yüzeylerin farklı bir sınıflandırması ve bu sınıflandırmaya bağlı karakterizasyonlar ilkin Önder tarafından tanımlanmıştır [44]. Aynı zamanda, slant helis kavramından esinlenerek bu yeni regle yüzeyleri slant regle yüzeyler olarak adlandırmış ve slant regle yüzeylerin farklı türlerini tanımlayarak bu yüzeylerin karakterizasyonlarını hem Öklid uzayında hem de Minkowski uzayında vermiştir. Daha sonra Önder ve Kaya tarafından slant regle yüzeylerinin yeni bir türü olarak Darboux slant regle yüzeyler tanımlanmış ve bu yüzeylerin diğer slant regle yüzeylerle olan ilişkileri ortaya konulmuştur [45].

Bu tez, yedi bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm, giriş kısmı için ayrılmıştır.

İkinci bölümde, her bir alt başlık altında ileriki konularda kullanılacak olan temel tanımlar ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, birim dual küre DS^2 ve birim 2-kürenin tanjant demetinin alt cümlesi $\overline{TM}$ arasındaki izomorfizm verilmiştir. E. Study dönüşümüne göre; birim dual kürenin noktalarına $\mathbb{R}^3$ te yönlü doğrular karşılık gelir. Bu dönüşümden yararlanarak, $\overline{TM}$ üzerindeki tabii lift eğrisine $\mathbb{R}^3$ te bir regle yüzey karşılık getirilmiştir. Elde edilen regle yüzeyin; striksiyon eğrisi, şekil operatörü, ortalama ve Gauss eğriliği hesaplanmıştır. Bunlara ek olarak, regle yüzeyin açılabilirlik şartı incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, ilk olarak, Lorentz birim küresinin tanjant demetinin alt cümlesi $\tilde{TM}$ ve Lorentz birim küresi S_1^2 arasındaki izomorfizm verilmiştir. İkinci olarak, hiperbolik birim kürenin tanjant demetinin alt cümlesi $\hat{TM}$ ve hiperbolik birim küre $\mathbb{H}^2$ arasındaki izomorfizm verilmiştir. E. Study dönüşümüne göre S_1^2 veya $\mathbb{H}^2$ üzerindeki herhangi bir eğriye $\mathbb{R}_1^3$ ’te regle yüzey karşılık gelir. Kurulan bu izomorfizm yardımıyla, $\tilde{TM}$ ve $\hat{TM}$ üzerindeki herhangi bir tabii lift eğrisine $\mathbb{R}_1^3$ ’te bir regle yüzey karşılık getirilmiştir. Elde edilen regle yüzeyin; striksiyon eğrisi, şekil operatörü, ortalama ve Gauss eğriliği hesaplanmıştır. Bunlara ek olarak, regle yüzeyin açılabilirlik şartı incelenmiştir.

Beşinci bölümde, birim dual küre DS^2 ve birim 2- kürenin alt cümlesi $\bar{TM}$ arasındaki izomorfizm ve E. Study dönüşümü yardımıyla $\mathbb{R}^3$ ’te tabii lift eğrisinin striksiyon eğrisinin ürettiği slant regle yüzeyler tanımlanmıştır. Daha sonra, alınan bir regle yüzeyin slant regle yüzey olma şartı verilmiştir. Daha sonra, $\mathbb{R}^3$ ’te $\bar{q}-, \bar{h}-$ ve $\bar{a}-$ slant regle yüzeyleri tanımlanmıştır. Bu tanımlardan yola çıkarak, bazı teoremler ve sonuçlar verilmiştir.

Altıncı bölümde, birim dual küre DS^2 ve birim 2- kürenin alt cümlesi $\bar{TM}$ arasındaki izomorfizm ve E. Study dönüşümü yardımıyla $\mathbb{R}^3$ ’te tabii lift eğrisinin striksiyon eğrisinin ürettiği Darboux slant regle yüzeyler tanımlanmıştır. En sonunda, bu slant regle yüzeyle ilgili bazı teoremler verilmiştir.

Son olarak, yedinci bölümde, sonuç ve öneriler verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, ileriki bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verilmiştir.

2.1. Öklid Uzayında Temel Tanım ve Kavramlar

2.1. Tanım

$\mathbb{R}^n$, n - boyutlu Öklid uzayında $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ için $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ şeklinde tanımlanan fonksiyona *standart iç çarpım* veya *Öklid iç çarpım* denir [1].

2.2. Tanım

$\mathbb{R}^n$ de bir $x \in \mathbb{R}^n$ vektörü için, $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ şeklinde tanımlanan fonksiyona x vektörünün *normu* denir [1].

2.3. Tanım

$\forall \vec{x} = (x_1, x_2, x_3), \vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ için vektörel çarpım

$$\vec{x} \times \vec{y} = (x_2 y_3 - y_2 x_3, x_3 y_1 - y_3 x_1, x_1 y_2 - y_1 x_2) \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanır [1].

2.4. Tanım

$M \subseteq \mathbb{R}^n$ eğrisi (I, γ) koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu durumda, $\psi = \{\gamma', \gamma'', \dots, \gamma^{(r)}\}$ sistemi lineer bağımsız ve $\forall \gamma^{(k)}, k < r$ için; $\gamma^{(k)} \in Sp\{\psi\}$ olmak üzere, ψ den elde edilen $\{T, N_1, \dots, N_{r-1}\}$ ortonormal sistemine, γ eğrisinin *Serret-Frenet r - ayaklı alanı* ve $s \in M$

için $\{T(s), N_1(s), \dots, N_{r-1}(s)\}$ ye ise $s \in M$ noktasındaki *Serret-Frenet r - ayaklısı* denir. Her bir T ve N_i , $1 \leq i \leq r-1$, vektörlerine de *Serret-Frenet vektör alanı* denir [1].

2.5. Teorem

$M \subseteq \mathbb{R}^n$ eğrisi (I, γ) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ yay parametresi olmak üzere, $\gamma(s)$ noktasındaki i – yinci eğriliği $k_i(s)$ ve Frenet $(n+1)$ – ayaklısı $\{\vec{T}(s), \vec{N}_1(s), \dots, \vec{N}_{r-1}(s)\}$ ise;

$$\begin{cases} \vec{T}'(s) = k_1(s) \vec{N}_1(s), \\ \vec{N}_i'(s) = -k_i(s) \vec{N}_i(s) + k_{i+1}(s) \vec{N}_{i+1}(s), 1 \leq i \leq n+1, \\ \vec{N}_n'(s) = -k_n(s) \vec{N}_{n-1}(s) \end{cases} \quad (2.2)$$

dir.

Burada $k_i(s) = \langle \vec{N}_{i-1}'(s), \vec{N}_i(s) \rangle$ fonksiyonuna $\gamma(s)$ noktasındaki M nin i – yinci eğriliği denir [1].

$n=2$ özel halinde 2- boyutlu Öklid uzayında Frenet 2- ayaklısı elde edilebilir.

$\gamma(t) = (x(t), y(t))$ olmak üzere $\vec{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} (x'(t), y'(t))$ ve

$\vec{N}(t) = \frac{1}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} (-y'(t), x'(t))$ vektörleri, sırasıyla, γ eğrisinin birim teğet ve

birim normal vektörleridir.

Bu düzlemsel γ eğrisinin Serret-Frenet çatı elemanları $\{\vec{T}, \vec{N}, \kappa\}$ olmak üzere, Frenet

formülleri $\vec{T}'(t) = \kappa(t) \vec{N}(t)$ ve $\vec{N}'(t) = -\kappa(t) \vec{T}(t)$ olarak tanımlanır ve burada

$\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{\frac{3}{2}}}$ ile γ eğrisinin eğriliği gösterilmektedir.

$n=3$ özel halinde, yani 3- boyutlu Öklid uzayında Frenet 3- ayaklısı elde edilebilir. Bu özel halde; M eğrisi (I, γ) koordinat komşuluğu ile verilmiş ise $s \in I$ yay parametresi olmak üzere, $\gamma(s)$ noktasında, M eğrisinin Frenet 3-ayaklısı $\vec{T}(s) = \gamma'(s)$, $\vec{N}(s) = \frac{\gamma''(s)}{|\gamma''(s)|}$ ve $\vec{B}(s) = \vec{T}(s) \times \vec{N}(s)$ şeklindedir. M eğrisinin $k_1(s) = \kappa(s)$ eğriliği ve $k_2(s) = \tau(s)$ burulması olmak üzere,

$$\begin{cases} \vec{T}'(s) = \kappa(s)\vec{N}(s), \\ \vec{N}'(s) = -\kappa(s)\vec{T}(s) + \tau(s)\vec{B}(s), \\ \vec{B}'(s) = -\tau(s)\vec{N}(s) \end{cases} \quad (2.3)$$

şeklindedir ve burada $\kappa(s) = \langle \vec{T}'(s), \vec{N}(s) \rangle$ ve $\tau(s) = \langle \vec{N}'(s), \vec{B}(s) \rangle$ dir [1].

2.6. Tanım

Bir eğrinin $\{T, N, B\}$ üç ayaklısının her s anında, bir eksen etrafında, bir ani helis yaptığı kabul edilir. Bu eksene eğrinin s parametresine karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki *Darboux eksen*i denir. Bu eksenin yön ve doğrultusunu veren $W = \tau T + \kappa B = N \times N'$ vektörüne eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki *Darboux vektörü* denir [1].

B ile W arasındaki açı θ ile gösterilirse

$$\begin{cases} \kappa = |W| \cos \theta, \\ \tau = |W| \sin \theta \end{cases} \quad (2.4)$$

olacağı açıktır. C , Darboux vektörü yönündeki birim vektör ise

$$|W| = \sqrt{\tau^2 + \kappa^2} \quad (2.5)$$

olmak üzere

$$C = \frac{\tau}{|W|} T + \frac{\kappa}{|W|} B \quad (2.6)$$

dir. Buradan $C = \sin \theta.T + \cos \theta.B$ elde edilir [2].

2.7. Tanım

$\mathbb{R}^n$ de bir α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki hız vektörü $T(s)$ ve U da sabit bir birim vektör olsun. $\forall s \in I$ için $T(s)$ ve U arasındaki açı sabitse α ya bir *eğilim çizgisi (helis)* denir ve $Sp\{U\}$ ya da α eğilim çizgisinin *eğilim eksen*i denir [1].

2.8. Teorem

$\alpha, \mathbb{R}^3$ te birim hızlı eğri olsun. α eğrisinin bir doğru olması için gerek ve yeter şart $\kappa = 0$ olmasıdır [3].

2.9. Teorem

$\alpha, \mathbb{R}^3$ te eğriliği pozitif olan birim hızlı eğri olsun. α eğrisinin düzlemsel bir eğri olması için gerek ve yeter şart $\tau = 0$ olmasıdır [3].

2.10. Teorem

$\mathbb{R}^3$ te bir α eğrisinin helis olması için gerek ve yeter şart $\frac{\tau}{\kappa}$ nın sabit olmasıdır [3].

2.11. Tanım

$U, \mathbb{R}^n$ de bir açık alt cümle olsun.

$$U \times \mathbb{R}^n = \bigcup_{p \in M} T_p M = \chi(M) \quad (2.7)$$

ile tanımlanan cümleye $\mathbb{R}^n$ de U nun *tanjant bundle* 'ı denir [6].

2.12. Tanım

$M, \mathbb{R}^{n+1}$ de bir hiperyüzey ve α , M üzerinde bir parametrik eğri olsun. M üzerinde diferensiyellenebilir vektör alanı X olmak üzere, eğer her $s \in I$ için

$$\alpha'(s) = X(\alpha(s)) \quad (2.8)$$

ise α ya X in *integral eğrisi* denir [1].

2.13. Tanım

$\alpha : I \rightarrow M$ herhangi bir parametrik eğri olmak üzere

$$\bar{\alpha}(s) = (\alpha(s), \alpha'(s)) = \alpha'(s)_{\alpha(s)} \quad (2.9)$$

ile verilen $\bar{\alpha} : I \rightarrow TM$ parametrik eğrisine α nın TM deki *tabii lifti* denir [6].

Böylece $\mathbb{R}^n$ deki konneksiyon D olmak üzere,

$$\frac{d\bar{\alpha}}{dt} = \frac{d}{dt}(\alpha'(s)_{\alpha(s)}) = D_{\alpha'(s)}\alpha'(s) \quad (2.10)$$

yazılabilir.

2.14. Lemma

$\mathbb{R}^3$ te verilen bir α eğrisinin tabii lift eğrisi $\bar{\alpha}$ olsun. $\{T, N, B\}$ ve $\{\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}\}$, sırasıyla, α ve $\bar{\alpha}$ eğrilerinin Frenet çatıları olsunlar. Frenet vektör alanları arasındaki ilişki aşağıda verilmiştir:

$$\begin{cases} \bar{T}(s) = N(s), \\ \bar{N}(s) = -\cos \theta T(s) + \sin \theta B(s), \\ \bar{B}(s) = \sin \theta T(s) + \cos \theta B(s). \end{cases} \quad (2.11)$$

Burada θ açısı Darboux vektörü ve α eğrisinin binormal vektörü arasındaki açıdır [7].

2.15. Tanım

$U, \mathbb{R}^2$ uzayının irtibatlı bir açık alt cümlesi ve $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ düzgün ve regüler bir dönüşüm olsun. $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$ dönüşümü bir homeomorfizm ise $\varphi(U)$ kümesine, $\mathbb{R}^3$ uzayında bir *basit yüzey* denir [4].

2.16. Tanım

Z, M hiperyüzeyi üzerinde bir birim dik vektör alanı olmak üzere, M nin bir p noktasında,

$$S_p(v_p) = -D_{v_p} Z \quad (2.12)$$

eşitliğiyle tanımlı $S_p: T_p(M) \rightarrow T_p(M)$ fonksiyonuna, M hiperyüzeyinin p noktasındaki, Z birim dik vektör alanına bağlı *şekil operatörü* (*Weingarten dönüşümü*) denir [4].

M nin her bir p noktasına S_p fonksiyonunu karşılık getiren S dönüşümüne de, M hiperyüzeyinin, Z birim dik vektör alanına bağlı *şekil operatörü* (*Weingarten dönüşümü*) denir.

2.17. Tanım

S_p lineer dönüşümünün determinantına, M hiperyüzeyinin p noktasındaki *Gauss eğriliği* denir ve $K(p)$ ile gösterilir [4].

$$K(p) = \det(S_p) \quad (2.13)$$

2.18. Tanım

S_p lineer dönüşümünün izinin yarısına, M hiperyüzeyinin p noktasındaki *ortalama eğriliği* denir ve $H(p)$ ile gösterilir [4]. Yani;

$$H(p) = \frac{1}{2} \text{Iz}(S_p) \quad (2.14)$$

dir. M hiperyüzeyinin her bir p noktasına, $K(p)$ sayısını karşılık getiren K fonksiyonuna M hiperyüzeyinin *Gauss eğrilik fonksiyonu* denir.

M hiperyüzeyinin her bir p noktasına, $H(p)$ sayısını karşılık getiren H fonksiyonuna M hiperyüzeyinin *ortalama eğrilik fonksiyonu* denir.

2.2. Lorentz Uzayında Temel Tanım ve Kavramlar

2.19. Tanım

V bir reel vektör uzayı olsun. Bir

$$\langle, \rangle_L : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümü,

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \text{ ve } \forall u, v, w \in V \text{ için;}$$

$$(i) \langle u, v \rangle_L = \langle v, u \rangle_L,$$

$$(ii) \langle au + bv, w \rangle_L = a \langle u, w \rangle_L + b \langle v, w \rangle_L, \langle u, av + bw \rangle_L = a \langle u, v \rangle_L + b \langle u, w \rangle_L$$

özelliklerine sahip ise bu dönüşüme V vektör uzayı üzerinde bir *simetrik bilinear form* denir [3].

2.20. Tanım

V vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilinear form $\langle, \rangle_L$ olsun.

- (i) $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle_L > 0$ ise $\langle, \rangle_L$ simetrik bilinear formuna *pozitif tanımlı*,
- (ii) $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle_L < 0$ ise $\langle, \rangle_L$ simetrik bilinear formuna *negatif tanımlı*,
- (iii) $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle_L \geq 0$ ise $\langle, \rangle_L$ simetrik bilinear formuna *yarı-pozitif tanımlı*,
- (iv) $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle_L \leq 0$ ise $\langle, \rangle_L$ simetrik bilinear formuna *yarı-negatif tanımlı*,
- (v) $\forall v \in V$ için $\langle v, w \rangle_L = 0 \Rightarrow w = 0$ ise $\langle, \rangle_L$ simetrik bilinear formuna *non-dejeneredir* denir [3].

2.21. Tanım

V bir reel vektör uzayı ve

$$\langle, \rangle_L : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümü simetrik, bilinear ve non-dejenerer ise $\langle, \rangle_L$ ye V üzerinde bir *skaler çarpım*, bu durumda V vektör uzayına da *skaler çarpım uzayı* denir [3].

2.22. Tanım

V bir reel vektör uzayı ve $\langle, \rangle_L : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ simetrik bilinear form olsun.

$$(\langle, \rangle_L)_w : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$$

negatif tanımlı olacak şekilde en büyük boyutlu W alt uzayının boyutuna $\langle, \rangle_L$ simetrik bilinear formunun *indeksi* denir ve v ile gösterilir [3].

Burada, $0 \leq v \leq \text{boy}V$ dir.

2.23. Tanım

V nin indeksi 1 ve $\dim V \geq 2$ ise V skaler çarpım uzayına *Lorentz uzayı* denir [3].

2.24. Tanım

$\mathbb{R}^n$, n - boyutlu standart reel vektör uzayı olmak üzere

$\forall X = (x_1, x_2, \dots, x_n), Y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$\langle, \rangle_L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(X, Y) \mapsto \langle X, Y \rangle_L = -x_1 y_1 + \sum_{i=2}^n x_i y_i \quad (2.15)$$

skaler çarpımına $\mathbb{R}^n$ de *Lorentz metriği* denir [3].

2.25. Tanım

$\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı Lorentz metriği ile $\{\mathbb{R}^n, \langle, \rangle_L\}$ ikilisine indeksi 1 olan n - boyutlu *Lorentz uzayı* denir ve $\mathbb{R}_1^n$ veya L^n ile gösterilir [3].

2.26. Tanım

$\mathbb{R}_1^n$, n - boyutlu Lorentz uzayı olsun. Bir $X \in \mathbb{R}_1^n$ vektörü için;

- (i) $\langle X, X \rangle_L > 0$ veya $X = 0$ ise X e *spacelike (uzaysı) vektör*,
- (ii) $\langle X, X \rangle_L < 0$ ise X e *timelike (zamansı) vektör*,
- (iii) $\langle X, X \rangle_L = 0$ ise X e *null veya lightlike (ışık) vektör* denir [3].

2.27. Tanım

Bir $X \in \mathbb{R}^n$ vektörünün normu

$$|X|_L = \sqrt{|\langle X, X \rangle_L|} \quad (2.16)$$

ile tanımlanır [3].

2.28. Tanım

Bir $M \subset \mathbb{R}_1^n$ eğrisinin teğet vektör alanı T olmak üzere;

- (i) $\langle T, T \rangle_L > 0$ ise M eğrisine *spacelike eğri*,
- (ii) $\langle T, T \rangle_L < 0$ ise M eğrisine *timelike eğri*,
- (iii) $\langle T, T \rangle_L = 0$ ise M eğrisine *null eğri* denir [3].

2.29. Tanım

$M \subset \mathbb{R}_1^n$ de (I, α) koordinat komşuluğu ile verilen bir eğri olsun. M eğrisinin birim teğet vektör alanı T ve U da sabit birim vektör olmak üzere, $\forall s \in I$ için T ile U arasındaki açı sabit ise $M \subset \mathbb{R}_1^n$ eğrisine bir *eğilim çizgisi (helis)* denir [25].

2.30. Teorem

$M \subset \mathbb{R}_1^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. M nin $\alpha(s)$ noktasındaki eğriliği ve burulması, sırasıyla, κ ve τ olsun. M bir eğilim çizgisidir gerek ve yeter şart $\forall s \in I$ için $\frac{\kappa}{\tau}$ sabittir [25].

2.31. Tanım

$x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}_1^3$ olmak üzere

$$\times_L : \mathbb{R}_1^3 \times \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}_1^3;$$

$$x \times_L y = (x_3 y_2 - x_2 y_3, x_1 y_3 - x_3 y_1, x_1 y_2 - x_2 y_1) \quad (2.17)$$

çarpımına *Lorentz vektörel çarpım* denir [10].

2.32. Tanım

$\mathbb{R}_1^3$ te aşağıdaki koşulları sağlayan cümlelere, sırasıyla, *Lorentz (veya de Sitter) birim küre* ve *hiperbolik birim küre* denir [43]:

$$\mathbb{S}_1^2 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_1^3 : \langle x, x \rangle_L = 1\}, \quad (2.18)$$

$$\mathbb{H}^2 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_1^3 : \langle x, x \rangle_L = -1\}. \quad (2.19)$$

$\mathbb{S}_1^2$ ve $\mathbb{H}^2$ nin tanjant demetleri ve birim tanjant demetleri

$$T\mathbb{S}_1^2 = \{(\gamma, v) \in \mathbb{S}_1^2 \times \mathbb{R}_1^3 : \langle \gamma, v \rangle_L = 0\}, \quad (2.20)$$

$$T\mathbb{H}^2 = \{(\gamma, v) \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_1^3 : \langle \gamma, v \rangle_L = 0\}, \quad (2.21)$$

$$UT\mathbb{S}_1^2 = \{(\gamma, v) \in \mathbb{S}_1^2 \times \mathbb{R}_1^3 : \langle \gamma, v \rangle_L = 0, \langle \gamma, v \rangle_L = \mp 1\}, \quad (2.22)$$

$$UT\mathbb{H}^2 = \{(\gamma, v) \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_1^3 : \langle \gamma, v \rangle_L = 0, \langle \gamma, \gamma \rangle_L = 1\} \quad (2.23)$$

şeklindedir [43].

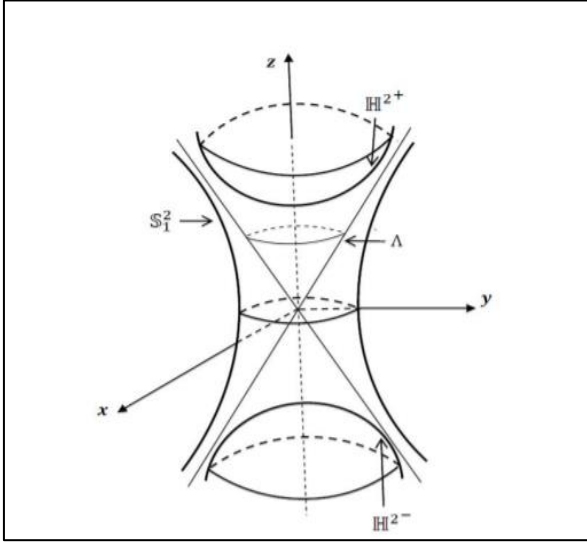
Eğer $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ eğrisinin s parametresine göre hız vektörü $\gamma'(s)$, sırasıyla, spacelike, timelike veya null ise γ eğrisine, sırasıyla, *spacelike*, *timelike* veya *null eğri* denir [43].

$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ eğrisinin Frenet operatörleri $\{T, N, B, \kappa, \tau\}$ olsun. γ eğrisi spacelike (veya timelike) eğri ise Frenet formülleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\varepsilon_1 \kappa & 0 & \tau \\ 0 & \varepsilon_1 \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}.$$

Burada, $\langle T, T \rangle_L = 1$ (veya $\langle T, T \rangle_L = -1$), $\langle N, N \rangle_L = \varepsilon_1 = \pm 1$ (veya $\langle N, N \rangle_L = 1$), $\langle B, B \rangle_L = -\varepsilon_1$ (veya $\langle B, B \rangle_L = 1$) dır [43].



Şekil 2.1. Lorentz birim küresi S_1^2 , hiperbolik birim küre $\mathbb{H}^2 = \mathbb{H}^{2+} \cup \mathbb{H}^{2-}$, lightlike koni Λ

Yukarıdaki şekilde $\mathbb{H}^{2+}$ ve $\mathbb{H}^{2-}$, sırasıyla, future-pointing hiperbolik birim küre ve past-pointing hiperbolik birim küreyi temsil etmektedir.

2.3. Öklid Uzayında Regle Yüzeylerle İlgili Temel Tanım ve Kavramlar

2.33. Tanım

$M \subset \mathbb{R}^3$ yüzeyi verilsin. $\forall p \in M$ noktasında $\mathbb{R}^3$ ün tamamen M de kalan bir doğrusu varsa M ye bir *regle yüzey* ve $\forall p \in M$ noktasından geçen M de kalan bu doğruya da *regle yüzeyin doğrultmanı* denir [11].

Regle yüzey aşağıdaki parametrizasyonla verilir:

$$\begin{aligned} \Phi: I \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (s, v) &\mapsto \Phi(s, v) = \alpha(s) + v a(s). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Burada, $\alpha(s)$ dayanak eğrisini ve $a(s)$ ise birim doğrultman vektörü göstermektedir.

2.34. Tanım

$$\begin{aligned} \Phi: I \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (s, v) &\mapsto \Phi(s, v) = \alpha(s) + v a(s) \end{aligned}$$

regle yüzeyi $\forall s \in I$ için

$$\Phi(s + 2\pi) = \Phi(s) \quad (2.25)$$

olacak şekilde periyodik ise regle yüzeye *kapalıdır* denir [11]. Kapalı regle yüzeylerin dayanak eğrileri ve ana doğrularının küresel göstergeleri kapalı eğrilerdir.

2.35. Tanım

Bir $\Phi(s, v)$ regle yüzeyinin ana doğrularının her birini dik olarak kesen eğriye regle yüzeyin *ortogonal yörüngesi* denir ve

$$\langle a, d\Phi \rangle = 0 \quad (2.26)$$

şeklinde gösterilir [11].

2.36. Tanım

Bir $\Phi(s, v)$ regle yüzeyinin komşu iki doğrultmanının orta dikmesinin doğrultmanlar üzerindeki ayaklarına *boğaz (striksiyon) noktası* denir [11].

2.37. Tanım

Bir $\Phi(s, v)$ regle yüzeyinin ana doğrusu dayanak eğrisi boyunca yüzeyi oluştururken boğaz noktalarının geometrik yerlerine regle yüzeyin *boğaz (striksiyon) çizgisi (eğrisi)* denir [11].

Striksiyon eğrisinin yer vektörü

$$\vec{\eta}(s) = \vec{\alpha}(s) - \frac{\langle \alpha'(s), \vec{a}'(s) \rangle}{|\vec{a}'(s)|^2} \vec{a}(s) \quad (2.27)$$

şeklindedir. Eğer $|\vec{a}'(s)| = 0$ ise regle yüzey striksiyon eğrisine sahip değildir. Bu hal regle yüzeyin silindir olmasını karakterize eder. Regle yüzeyler için striksiyon eğrisi dayanak eğrisi olarak alınabilir.

2.38. Tanım

Bir $\Phi(s, v)$ regle yüzeyinin bir ana doğrusunu kapsayan ve yüzey normaline dik olan düzleme *teğet düzlem* denir [11]. Bir $\Phi(s, v)$ regle yüzeyinin

$$\Phi(s, v) = \alpha(s) + v\alpha(s)$$

denkleminde s ve v ye göre türevi alınırsa

$$\Phi_s = \vec{T} + v\vec{a}',$$

$$\Phi_v = \vec{a}'$$

elde edilir. Buradan,

$$\Phi_s \times \Phi_v = (\vec{T} + v\vec{a}') \times \vec{a}'$$

olur. Ayrıca, yüzey normali

$$N = \frac{\Phi_s \times \Phi_v}{|\Phi_s \times \Phi_v|} = \frac{1}{|\Phi_s \times \Phi_v|} (T \times a + v a' \times a) \quad (2.28)$$

dır.

2.39. Tanım

Bir $\Phi(s,v)$ regle yüzeyinin ana doğruları boyunca teğet düzlemleri aynı kalıyorsa regle yüzeye *açılabilir* denir.

2.40. Tanım

Regle yüzeyin komşu iki ana doğrusu arasındaki en kısa uzaklığın ana doğrular arasındaki açıya oranına regle yüzeyin *dağılma parametresi (dral)* denir [11].

Böylece regle yüzeyin drali aşağıdaki gibi verilir:

$$P_a = \frac{\det\left(\frac{d\vec{a}}{ds}, \vec{a}, \vec{a}'\right)}{|\vec{a}'|^2}. \quad (2.29)$$

Regle yüzeyler için dral, koordinat değişimlerine göre en basit diferensiyel invarianttır.

2.41. Teorem

$\Phi(s, v)$ regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart dağılma parametresinin sıfır olmasıdır [11].

2.4. Minkowski Uzayda Regle Yüzeylerle İlgili Temel Tanım ve Kavramlar

2.42. Tanım

$\mathbb{R}_1^3$, 3- boyutlu Minkowski uzayında, verilen bir d doğrusunun, verilen bir α eğrisi boyunca hareket ettirilerek bir yüzey elde edilebiliyorsa, bu yüzeye 3- boyutlu Minkowski uzayında bir *regle yüzey* denir [12].

2.43. Tanım

$\mathbb{R}_1^3$ te bir regle yüzeyin ana doğruları boyunca teğet düzlemleri aynı ise regle yüzeye *açılabilir* denir [12].

2.44. Tanım

$\mathbb{R}_1^3$ te açılabilir olmayan bir regle yüzeyin ana doğrusu, dayanak eğrisi boyunca yüzeyi oluştururken boğaz noktalarının geometrik yerine regle yüzeyin *boğaz (striksiyon) çizgisi (eğrisi)* denir [12].

2.45. Tanım

$\mathbb{R}_1^3$ te bir regle yüzeyin ana doğrularının herbirini dik kesen bir eğri varsa, bu eğriye regle yüzeyin *ortogonal yörüngesi* denir [12].

2.5. Slant Regle Yüzeylerle İlgili Temel Tanım ve Kavramlar

2.46. Tanım

$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ regüler bir eğri olsun. α eğrisinin N asli normal vektörü sabit doğrultulu bir u birim vektörü ile sabit bir θ açısı yapıyorsa, yani

$$\langle \vec{N}, \vec{u} \rangle = \cos \theta = \text{sabit}, \quad \theta \neq \frac{\pi}{2} \quad (2.30)$$

şartı sağlanıyorsa, α eğrisine bir *slant helis* denir [12].

2.47. Teorem

$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ regüler bir eğri olsun. α eğrisinin eğrilik ve burulması, sırasıyla, κ ve τ olmak üzere α eğrisinin slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right) = \text{sabit} \quad (2.31)$$

olmasıdır [12].

$\alpha = \alpha(s)$, $\mathbb{R}^3$ te tanımlı regüler bir eğri ve bu eğriyi dayanak eğrisi olarak kabul eden Φ regle yüzeyinin parametrizasyonu aşağıdaki gibi verilir:

$$\Phi(s, v) = \alpha(s) + v q(s). \quad (2.32)$$

Özel olarak, q vektörü sabitse yüzeye silindirik regle yüzey, aksi takdirde silindirik olmayan regle yüzey adı verilir [37].

Bir Φ regle yüzeyinin birim normal vektörü

$$m = \frac{\Phi_s \times \Phi_v}{|\Phi_s \times \Phi_v|} = \frac{(\alpha' + vq') \times q}{|(\alpha' + vq') \times q|} \quad (2.33)$$

şeklindedir [12].

Yüzeyin aynı ana doğrusunun $v_1 \neq v_2$ gibi farklı iki noktasındaki normal vektörleri düşünülürse, bu vektörlerin vektörel çarpımından

$$[(\alpha' + v_1 q') \times q] \times [(\alpha' + v_2 q') \times q] = (v_1 - v_2) \det(\alpha', q, q') q \quad (2.34)$$

bulunur. Eğer $\det(\alpha', q, q') = 0$ ise aynı ana doğrunun her noktasında normal vektörleri aynı doğrultuda olup yüzeyin tekil olmayan noktalarında teğet düzlemleri aynıdır. Böyle bir ana doğruya torsal ana doğru adı verilir. Eğer $\det(\alpha', q, q') \neq 0$ ise aynı ana doğrunun her noktasında yüzeyin teğet düzlemleri farklı olur. Böyle bir ana doğruya da torsal olmayan ana doğru adı verilir [37].

2.48. Tanım

Bütün ana doğruları torsal olan bir regle yüzeye *açılabilir regle yüzey* denir. Aksi halde, regle yüzeye *aykırı regle yüzey* denir [37].

2.49. Teorem

Bir Φ regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart $\det(\alpha', q, q') = 0$ olmasıdır [37].

Aykırı bir regle yüzeyin birim normal vektörü $m(s, v)$, yüzeyin $s = s_0$ gibi torsal olmayan bir ana doğrusu üzerinde, $v \rightarrow \pm\infty$ için a ya yakınsasın. Buradan,

$$a = \lim_{v \rightarrow \pm\infty} m(s_0, v) = \frac{q \times q'}{|q'|} \quad (2.35)$$

elde edilir.

2.50. Tanım

Aykırı bir regle yüzeyin s_0 ana doğrusundan geçen ve a ya dik olan düzleme *asimptotik düzlem* denir. Yüzeyin s_0 ana doğrusundan geçen ve asimptotik düzleme dik olan düzleme *merkez düzlem* denir. Bu iki düzlemin değme noktası olan C noktasına s_0 ana doğrusunun *boğaz noktası* adı verilir. C noktasından geçen, asimptotik düzleme ve merkez düzleme dik olan doğrular ise, sırasıyla, *merkez teğet* ve *merkez normal doğruları* olarak adlandırılır [37].

q ya dik olan ve Eş. (2.31) kullanılmasıyla elde edilen h merkez normal vektörü

$$h = \frac{q'}{|q'|} \quad (2.36)$$

şeklinde tanımlanır. C boğaz noktasının v parametresi için $h \times m = 0$ olduğu göz önüne alınırsa

$$v = -\frac{\langle \alpha', q' \rangle}{\langle q', q' \rangle} \quad (2.37)$$

bulunur.

2.51. Tanım

Aykırı bir regle yüzeyin bütün ana doğruları üzerindeki boğaz noktalarının geometrik yerine *boğaz çizgisi (striksiyon eğrisi)* denir ve bu eğrinin denklemi

$$c(s) = \alpha(s) - \frac{\langle \alpha', q' \rangle}{\langle q', q' \rangle} q \quad (2.38)$$

ile verilir [37].

2.52. Teorem

Aykırı bir regle yüzeyin dayanak eğrisinin boğaz çizgisi olması için gerek ve yeter şart $\langle \alpha', q' \rangle = 0$ olmasıdır [37].

Aykırı bir regle yüzeyin dağılma parametresi

$$d = \frac{\langle \alpha' \times q, q' \rangle}{\langle q', q' \rangle} \quad (2.39)$$

olarak verilir.

2.53. Teorem

Bir Φ regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart dağılma parametresinin sıfır olmasıdır [37].

2.54. Tanım

Φ aykırı bir regle yüzey, C bu yüzeyin bir ana doğrusu üzerindeki boğaz noktası ve q, h ve a vektörleri, sırasıyla, ana doğrunun birim doğrultman vektörü, merkez normal ve merkez teğet vektörü olmak üzere, $\{C, q, h, a\}$ ortonormal çatısına Φ aykırı yüzeyinin *Frenet çatısı* denir [37].

Regüler bir Φ yüzeyinin boğaz çizgisi dayanak eğrisi olarak alınsın. Bu takdirde, boğaz çizgisinin yay uzunluğu parametresi s olmak üzere, Φ regle yüzeyinin parametrizasyonu

$$\Phi(s, v) = c(s) + v q(s) \quad |\vec{q}(s)| = 1 \quad (2.40)$$

ile verilir. Eğer Φ açılabilir bir regle yüzeyse boğaz çizgisinin teğet vektörleri ana doğrularla çakışır. Bu takdirde, boğaz çizgisinin teğet vektörü için

$$\frac{dc}{ds} = q \quad (2.41)$$

yazılabilir.

Eğer Φ regle yüzeyi üzerindeki bütün ana doğruların $q(s)$ vektörleri orijin noktasına bağlanırsa, bu doğrular bir koni oluşturur. Bu koniye Φ yüzeyinin *yönlü konisi* denir. Yönlü koni, bir uzay eğrisinin teğetler göstergesi düşüncesinin regle yüzeylere uyarlaması olarak düşünülebilir. Dolayısıyla, birim doğrultman vektörlerin uç noktaları birim küre üzerinde küresel bir eğri çizer. Bu eğriye yüzeyin *küresel eğrisi* denir ve k_1 ile gösterilir. k_1 eğrisinin yay uzunluğu parametresi s_1 ile ifade edilir [37].

Yüzeyin k_1 küresel göstergesinin s_1 yay parametresine göre h ve a vektörlerine göre türevlerini inceleyelim. h vektörü birim vektör olduğundan $\langle h, h \rangle = 1$ olup, bu ifadenin türevi alındığında $\langle h, h' \rangle = 0$ elde edilir. Dolayısıyla, $h' = \frac{dh}{ds_1}$ vektörünün q ve a vektörleri tarafından gerilen düzlemde kaldığı görülür. Buradan, $\xi = \xi(s_1)$ ve $\mu = \mu(s_1)$, s_1 yay uzunluğu parametresinin diferensiyellenebilir fonksiyonları olmak üzere

$$h' = \xi q + \mu a \quad (2.42)$$

yazılabilir. $\langle h, q \rangle = 0$ olduğundan, bu ifadenin türevi alındığında

$$\langle h', q \rangle + \langle h, q' \rangle = 0 \quad (2.43)$$

olup $q' = h$ yazılırsa h birim vektör olduğundan Eş. (2.43)

$$\langle h', q \rangle + 1 = 0 \quad (2.44)$$

halini alır. Diğer yandan, Eş. (2.42), q ile çarpılırsa q birim vektör olduğundan

$$\langle h', q \rangle = \xi \quad (2.45)$$

bulunur. Son olarak, Eş. (2.44) ve Eş. (2.45) den $\zeta = -1$ elde edilir. $\mu = \kappa(s_1)$ alınırsa Eş. (2.42) den

$$h' = -q + \kappa a \quad (2.46)$$

bulunur. $\kappa = \langle h', a \rangle$ ile tanımlı κ fonksiyonuna yüzeyin *konisel eğrilik fonksiyonu* denir.

Benzer şekilde, $\langle h, a \rangle = 0$ olduğundan

$$\langle h', a \rangle + \langle h, a' \rangle = \kappa + \langle h, a' \rangle = 0 \quad (2.47)$$

elde edilir ve böylece

$$\langle h, a' \rangle = -\kappa \quad (2.48)$$

bulunur. Öte yandan, $\eta = \eta(s_1)$, s_1 yay uzunluğu parametresinin diferensiyellenebilir fonksiyonu olmak üzere $a' = \eta h$ yazılabilir. Bu ifade h ile iç çarpılırsa,

$$\langle h, a' \rangle = \eta = -\kappa \quad (2.49)$$

Olacağından

$$a = -\kappa h \quad (2.50)$$

elde edilir.

Eğer Φ yüzeyinin Frenet çatısının $a(s)$ merkez teğet vektörleri orijin noktasına bağlanırsa, bu vektörlerin uç noktalarının birim küre üzerinde çizdiği eğrinin yay parametresi s_3 olmak üzere k_3 küresel eğrisini çizilsin. Buradan

$$s_3 = \int_0^{s_1} |a'| ds_1 = \int_0^{s_1} \kappa ds_1 \Rightarrow \frac{ds_3}{ds_1} = \kappa \quad (2.51)$$

eşitliğine ulaşılır.

2.55. Teorem

Φ bir aykırı regle yüzey olmak üzere, Φ yüzeyinin yönlü konisinin $\{O, q, h, a\}$ Frenet çatısının, k_1 küresel göstergesinin s_1 yay parametresine göre Frenet formülleri,

$$\begin{cases} q' = h, \\ h' = -q + \kappa a, \\ a' = -\kappa h \end{cases} \quad (2.52)$$

şeklindedir. Burada, $\frac{ds_3}{ds_1} = \kappa = |a'|$ yüzeyin konisel eğriliğidir [37].

2.56. Tanım

Frenet formülleri kinematik olarak şöyle yorumlanabilir: s zaman parametresi olarak alındığında, eğer q ana doğruları yönlü koniyi çiziyorsa, bu takdirde, $\{C, q, h, a\}$ hareketli çatısı Eş. (2.52) ile verilen çatıya göre hareket eder. Bu hareket, ani bir ötelemeden ziyade,

$$W = \kappa q + a \quad (2.53)$$

Darboux vektörüyle verilen açısal hızlı bir ani dönme içerir [37]. Darboux vektörünün yönü ani dönme ekseninin yönü ile aynıdır ve uzunluğu

$$|W| = \sqrt{1 + \kappa^2} \quad (2.54)$$

kadardır. Böylece, Eş. (2.52) ile verilen Frenet formülleri

$$q' = W \times q, \quad h' = W \times h, \quad a' = W \times a \quad (2.55)$$

ile de verilebilir.

Aykırı bir Φ regle yüzeyinin boğaz çizgisinin yay uzunluğu parametresi s olsun. Buradan,

$$\kappa = \frac{\kappa_2}{\kappa_1} = \frac{ds_3}{ds_1} = \frac{ds_3}{ds} \frac{ds}{ds_1} \quad (2.56)$$

olup $\kappa_2 = \frac{ds_3}{ds}$ ve $\kappa_1 = \frac{ds_1}{ds}$ alınırsa $\kappa = \frac{\kappa_2}{\kappa_1}$ olur. Burada, κ_1 ve κ_2 fonksiyonları, sırasıyla,

yüzeyin birinci ve ikinci eğrilikleri olarak adlandırılır [37].

2.57. Teorem

Φ aykırı bir regle yüzey olsun. $\kappa_1 = \frac{ds_1}{ds}$, $\kappa_2 = \frac{ds_3}{ds}$ ve s_1 ile s_3 , sırasıyla, q ve a vektörleri tarafından çizilen $\vec{k}_1$ ve $\vec{k}_3$ küresel eğrilerinin yay parametreleri olmak üzere, Φ yüzeyinin boğaz çizgisinin s parametresine göre Frenet formülleri,

$$\begin{cases} \frac{dq}{ds} = \kappa_1 h, \\ \frac{dh}{ds} = -\kappa_1 q + \kappa_2 a, \\ \frac{da}{ds} = -\kappa_2 h \end{cases} \quad (2.57)$$

ile verilir [37].

2.58. Tanım

Φ yüzeyi, $\mathbb{R}^3$ uzayında tanımlı bir regle yüzey olsun. $c(s)$, Φ yüzeyinin boğaz çizgisi ve s , boğaz çizgisinin yay parametresi olmak üzere; Φ yüzeyi

$$\Phi(s, v) = c(s) + v q(s), \quad |q(s)| = 1$$

parametrizasyonu ile verilsin. $\{q, h, a\}$ ve $\kappa \neq 0$, sırasıyla, yüzeyin Frenet çatısı ve konisel eğrilik fonksiyonu olsun. Bu takdirde, birim ve sabit bir $\bar{u}$ olmak üzere, yüzeyin q ana doğruları $\bar{u}$ ile sabit açı yapıyorsa, yani

$$\langle q, \bar{u} \rangle = \cos \theta, \quad \theta \neq \frac{\pi}{2} \quad (2.58)$$

ise Φ regle yüzeyine q -slant regle yüzey denir [44].

Bu tanımdan yola çıkılarak, bir q -slant regle yüzeyin ana doğrularının birim doğrultuları birim kürenin merkezine bağlanırsa bu vektörlerin uç noktalarının küre üzerinde bir çember veya çember yayı çizdiği sezgisel olarak söylenebilir.

2.59. Tanım

Φ yüzeyi, $\mathbb{R}^3$ uzayında tanımlı bir regle yüzey olsun. $c(s)$, Φ yüzeyinin boğaz çizgisi ve s , boğaz çizgisinin yay parametresi olmak üzere; Φ yüzeyi

$$\Phi(s, v) = c(s) + v q(s), \quad |q(s)| = 1$$

parametrizasyonu ile verilsin. $\{q, h, a\}$ ve $\kappa \neq 0$, sırasıyla, yüzeyin Frenet çatısı ve konisel eğrilik fonksiyonu olsun. Bu takdirde, birim ve sabit bir $\bar{u}$ olmak üzere, yüzeyin h merkez normal vektörü $\bar{u}$ ile sabit açı yapıyorsa, yani

$$\langle h, \bar{u} \rangle = \cos \varphi, \quad \varphi \neq \frac{\pi}{2} \quad (2.59)$$

ise Φ regle yüzeyine h -slant regle yüzey denir [44].

q – slant regle yüzeylerdeki düşünceye benzer olarak, bir h – slant regle yüzeyin h merkez normal vektörleri birim kürenin merkezine bağlanırsa, bu vektörlerin uç noktaları, sezgisel olarak, bir çember ya da çember yayı çizerler.

2.60. Tanım

Φ yüzeyi, $\mathbb{R}^3$ uzayında tanımlı bir regle yüzey olsun. $c(s)$, Φ yüzeyinin boğaz çizgisi ve s , boğaz çizgisinin yay parametresi olmak üzere; Φ yüzeyi

$$\Phi(s, v) = c(s) + v q(s), \quad |q(s)| = 1$$

parametrizasyonu verilsin. $\{q, h, a\}$ ve $\kappa \neq 0$, sırasıyla, yüzeyin Frenet çatısı ve konisel eğrilik fonksiyonu olsun. Bu takdirde, birim ve sabit bir $\vec{u}$ olmak üzere, yüzeyin a merkez teğet vektörü $\vec{u}$ ile sabit açı yapıyorsa, yani

$$\langle a, \vec{u} \rangle = \cos \Psi, \quad \Psi \neq \frac{\pi}{2} \quad (2.60)$$

ise Φ regle yüzeyine a – slant regle yüzey denir [44].

q – slant ve h – slant regle yüzeylerdeki gibi, bir a – slant regle yüzeyde yüzeyin a merkez teğet vektörleri birim kürenin merkezine bağlanırsa, bu vektörlerin uç noktaları, sezgisel olarak, küre üzerinde bir çember ya da çember yayı çizerler.

2.61. Tanım

Φ yüzeyi, $\mathbb{R}^3$ uzayında tanımlı bir regle yüzey olsun. $c(s)$, S yüzeyinin boğaz çizgisi ve s , boğaz çizgisinin yay parametresi olmak üzere; Φ yüzeyi

$$\Phi(s, v) = c(s) + v \vec{q}(s), \quad |\vec{q}(s)| = 1$$

parametrizasyonu verilsin. $\{q, h, a\}$ ve $\kappa \neq 0$, sırasıyla, yüzeyin Frenet çatısı ve konisel eğrilik fonksiyonu olsun. Bu takdirde, birim ve sabit bir $\vec{u}$ olmak üzere, yüzeyin w Darboux vektörü $\vec{u}$ ile sabit açı yapıyorsa, yani

$$\langle W, \vec{u} \rangle = \cos \Omega, \quad \Omega \neq \frac{\pi}{2} \quad (2.61)$$

ise Φ regle yüzeyine w – *slant regle yüzey* denir [45].

2.6. Dual Uzayla İlgili Temel Tanım ve Kavramlar

2.62. Tanım

$a, a^* \in \mathbb{R}$ olmak üzere tüm (a, a^*) sıralı ikililerinin cümlesini ID ile gösterelim.

$$ID = \{(a, a^*) : a, a^* \in \mathbb{R}\} \quad (2.62)$$

üzerinde $\forall A = (a, a^*)$ ve $B = (b, b^*) \in ID$ için;

Toplama işlemi: $A + B = (a + b, a^* + b^*)$

Çarpma işlemi: $A \cdot B = (ab, a^*b + ab^*)$

Eşitlik: $A = B \Leftrightarrow a = b$ ve $a^* = b^*$

şeklinde tanımlanırsa ID ye *dual sayılar cümlesi* denir [38].

Burada;

Çıkarma: $A + X = B \Rightarrow X = (b - a, b^* - a^*)$

Sıfır elemanı: $A + X = A \Rightarrow X = (0, 0)$

Bölme: $A \neq (0, a^*)$ olmak üzere $A \cdot X = B \Rightarrow X = \left(\frac{b}{a}, \frac{ab^* - a^*b}{a^2}\right)$

şeklindedir. Böylece toplama ve çarpma işlemleri ile birlikte ID nin birimli ve değişmeli halka olduğunu söyleyebiliriz. Bu halkaya *dual sayılar halkası* denir [38].

2.63. Teorem

ID dual sayılar halkası, $\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesine izomorf olan bir alt cümleyi alt cisim olarak kapsar [38].

Bu teoremin sonucu olarak, bir $A = (a, a^*)$ dual sayısında a reel sayısına A dual sayısının reel kısmı ve a^* reel sayısına A dual sayısının dual kısmı adı verilir.

2.64. Tanım

ID deki reel birim eleman $(1,0)$ olduğu gibi dual birim eleman $(0,1)$ dir ve $\varepsilon = (0,1)$ ile gösterilir. Burada, $\varepsilon^2 = (0,0)$ olduğu açıktır [38].

2.65. Teorem

Bir A dual sayısı $A = (a, a^*) = a + \varepsilon a^*$ şeklinde ifade edilebilir [38].

2.66. Teorem

Bir $A \in ID$ dual sayısının bir $\lambda \in \mathbb{R}$ skaleri ile

$$\lambda.A = (\lambda, 0).(a, a^*) = (\lambda a, \lambda a^*)$$

dır [15].

2.67. Tanım

$ID^3 = ID \times ID \times ID = \{ \vec{A} = (a_1, a_2, a_3) : a_i \in ID, 1 \leq i \leq 3 \}$ cümlesi üzerinde aşağıdaki gibi toplama ve skalerle çarpma işlemleri tanımlansın:

$$+ : ID^3 \times ID^3 \rightarrow ID^3, + : (\vec{A}, \vec{B}) \mapsto \vec{A} + \vec{B} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

ve

$$\therefore ID \times ID^3 \rightarrow ID^3, \therefore (\lambda, \vec{A}) \mapsto \lambda \vec{A} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3).$$

Bu işlemlerle birlikte ID^3 cümlesi ID üzerinde bir modüldür ve bu modüle $ID-Modül$ denir [38].

$ID-Modül$ ün elemanları olan sıralı dual sayı üçlülerine *dual vektörler* adı verilir.

2.68. Teorem

$\vec{a}, \vec{a}^* \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere $ID-Modül$ de her bir dual A vektörü $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$ şeklinde yazılabilir [38].

2.69. Teorem

$\mathbb{R}^3$ vektör uzayı $ID-Modül$ ün elemanları $(\vec{a}, 0)$ şeklinde olan bir alt cümlesine izomorftur [38].

2.70. Tanım

$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*, \vec{B} = \vec{b} + \varepsilon \vec{b}^* \in ID^3$ dual vektörleri için iç çarpım

$$\langle, \rangle : ID^3 \times ID^3 \rightarrow ID$$

$$(\vec{A}, \vec{B}) \mapsto \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \varepsilon (\langle \vec{a}, \vec{b}^* \rangle + \langle \vec{a}^*, \vec{b} \rangle)$$

şeklinde tanımlıdır [15]. $ID-Modül$ üzerinde tanımlı bu iç çarpım yani dual iç çarpım, reel iç çarpımın özelliklerini sağlamaz. İlk üç özellik sağlanırken dördüncüsü sağlanmaz. Yani,

$\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle \geq 0$ diyemeyiz ve $\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle = 0$ ise $\vec{A} = 0$ olmak zorunda değildir. Her $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C} \in ID^3$ vektörleri ve $\lambda \in ID$ için,

$$i) \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \langle \vec{B}, \vec{A} \rangle,$$

$$ii) \langle \lambda \vec{A}, \vec{B} \rangle = \lambda \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \langle \vec{A}, \lambda \vec{B} \rangle,$$

$$iii) \langle \vec{A} + \vec{B}, \vec{C} \rangle = \langle \vec{A}, \vec{C} \rangle + \langle \vec{B}, \vec{C} \rangle, \quad \langle \vec{A}, \vec{B} + \vec{C} \rangle = \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle + \langle \vec{A}, \vec{C} \rangle,$$

$$iv) \vec{A} = \vec{0} \Rightarrow \langle \vec{A}, \vec{A} \rangle = 0$$

aksiyomları sağlanır.

2.71. Tanım

$\vec{A}, \vec{B} \in ID^3$ için vektörel çarpım,

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{a} \times \vec{b} + \varepsilon(\vec{a} \times \vec{b}^* + \vec{a}^* \times \vec{b})$$

biçiminde tanımlıdır [38]. Burada eşitliğin sağ kısmında kullanılan “ $\times$ vektörel çarpımı” $\mathbb{R}^3$ teki vektörel çarpımı ifade etmektedir.

2.72. Tanım

$\vec{a} \neq \vec{0}$ olmak üzere bir $\vec{A} \in ID^3$ dual vektörünün normu,

$$|\vec{A}| = (|\vec{a}|, \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle}{|\vec{a}|}) = |\vec{a}| + \varepsilon \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle}{|\vec{a}|} \quad (2.63)$$

dual sayısı olarak tanımlanır [38]. Burada normun tanımlı olabilmesi için $\vec{a} \neq 0$ olmalıdır.

2.73. Teorem

$\vec{A} \neq (\vec{0}, \vec{a}) \in ID^3$ olmak üzere

$$\vec{d} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

birim dual vektördür [15].

2.74. Teorem

Bir $\vec{A} \in ID^3$ birim dual vektörü için

$$|\vec{a}| = 1, \quad \langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle = 0 \quad (2.64)$$

dır [38].

2.75. Tanım

$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* \in ID^3$ olmak üzere

$$DS^2 = \left\{ \vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* : |\vec{A}| = (1, 0) \right\} \quad (2.65)$$

cümlesine *birim dual küre* denir [38].

2.76. Teorem (E. Study Dönüşümü)

Birim dual kürenin noktaları, $\mathbb{R}^3$ teki yönlü doğrulara birebir karşılık gelir [38].

2.77. Tanım

$\vec{A}, \vec{B} \in ID^3$ iki dual birim vektörüne karşılık gelen yönlü doğrular arasındaki açı θ ve bunların $\mathbb{R}^3$ teki eksenleri arasındaki uzaklık θ^* olmak üzere,

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \cos \bar{\theta} = \cos(\theta + \varepsilon \theta^*) \quad (2.66)$$

eşitliğiyle verilen $\bar{\theta} = \theta + \varepsilon \theta^*$ dual sayısına $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ birim dual vektörleri arasındaki *dual açı* denir [38].

2.78. Tanım

ID^3 dual uzayında $\hat{\alpha}(s) = \alpha(s) + \varepsilon \alpha^*(s)$ ifadesine bir *dual uzay eğrisi* denir [38].

Burada, $\alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s))$ ve $\alpha^*(s) = (\alpha_1^*(s), \alpha_2^*(s), \alpha_3^*(s))$, Öklid uzayında reel değerli eğrilerdir.

$\hat{\alpha} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow ID^3, s \mapsto \hat{\alpha}(s) = \alpha(s) + \varepsilon \alpha^*(s)$ bir dual eğri olsun. $\hat{\alpha}(s)$ dual uzay eğrisinin s_1 den s ye kadar dual yay uzunluğu

$$\bar{s} = \int_{s_1}^s |\hat{\alpha}'(s)| ds = \int_{s_1}^s |\alpha'(s)| ds + \varepsilon \int_{s_1}^s \langle T, \alpha^{*'}(s) \rangle ds = s + \varepsilon s^* \quad (2.67)$$

olarak tanımlanır. Burada, T vektörü, $\alpha(s)$ reel gösterge eğrisinin birim teğet vektörüdür.

2.79. Tanım

$\hat{\alpha} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow ID^3, s \mapsto \hat{\alpha}(s) = \alpha(s) + \varepsilon \alpha^*(s)$ birim dual teğet vektörü

$$\frac{d\hat{\alpha}}{d\bar{s}} = \frac{d\hat{\alpha}}{ds} \frac{ds}{d\bar{s}} = \hat{T} \quad (2.68)$$

olarak tanımlanır [38].

Şimdi $\hat{T}$ birim dual teğet vektör olduğundan $\hat{T}$ nın $\bar{s}$ dual yay uzunluğu parametresine göre,

$$\frac{d\hat{T}}{d\bar{s}} = \frac{d\hat{T}}{ds} \frac{ds}{d\bar{s}} = \frac{d^2\hat{\alpha}}{d\bar{s}^2} = \bar{\kappa} \hat{N} \quad (2.69)$$

ile verilen türevi ID^3 dual uzayında eğrinin dönüş yolunu ölçer.

$\frac{d\hat{T}}{d\bar{s}}$ vektörünün normuna $\hat{\alpha}(s)$ dual eğrisinin *eğrilik fonksiyonu* denir [38].

O halde

$$\hat{N} = \frac{1}{\bar{\kappa}} \frac{d\hat{T}}{d\bar{s}} \quad (2.70)$$

birim dual vektörüne $\hat{\alpha}(s)$ eğrisinin *dual asli normal vektörü* denir [38].

$$\hat{B} = \hat{T} \times \hat{N} \quad (2.71)$$

ile tanımlanan dual birim vektörüne $\hat{\alpha}(s)$ eğrisinin *dual binormal vektörü* denir [38].

Böylece oluşturulan $\{\hat{T}, \hat{N}, \hat{B}\}$ dual çatısına ID^3 te $\hat{\alpha}(s)$ eğrisi boyunca hareketli *dual Frenet çatısı* denir [38].

O halde Frenet formülleri aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{pmatrix} \hat{T}' \\ \hat{N}' \\ \hat{B}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\kappa} & 0 \\ -\bar{\kappa} & 0 & \bar{\tau} \\ 0 & -\bar{\tau} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{T} \\ \hat{N} \\ \hat{B} \end{pmatrix}. \quad (2.72)$$

Burada, $\bar{\kappa} = \kappa + \varepsilon \kappa^*$ ve $\bar{\tau} = \tau + \varepsilon \tau^*$, sırasıyla, dual eğrilik ve dual burulmayı temsil etmektedir.

2.7. Dual Lorentz Uzayla İlgili Temel Tanım ve Kavramlar

2.80. Tanım

ID^3 dual uzayı üzerinde iç çarpım olarak, Lorentz iç çarpım alınır, ID^3 dual uzayına *dual Lorentz uzay* denir ve ID_1^3 ile gösterilir [13], [39].

2.81. Tanım

ID^3 teki herhangi iki $\tilde{A} = a + \varepsilon a^*$ ve $\tilde{B} = b + \varepsilon b^*$ dual vektörünün dual Lorentz iç çarpımı ve dual Lorentz vektörel çarpımı, sırasıyla,

$$\langle \tilde{A}, \tilde{B} \rangle = \langle a, b \rangle + \varepsilon (\langle a, b^* \rangle + \langle a^*, b \rangle) \quad (2.73)$$

ve

$$\tilde{A} \times \tilde{B} = a \times b + \varepsilon (a \times b^* + a^* \times b) \quad (2.74)$$

biçiminde tanımlanır. Burada, “ $\langle, \rangle$ ” ve “ $\times$ ”, sırasıyla, Lorentz iç çarpım ve Lorentz vektörel çarpımı temsil etmektedir [13], [39].

2.82. Tanım

$\tilde{A} = a + \varepsilon a^* \in ID_1^3$ olsun.

- i) $a \in \mathbb{R}_1^3$ bir timelike vektör ise $\tilde{A} = a + \varepsilon a^* \in ID_1^3$ vektörüne *dual timelike vektör*,
- ii) $a \in \mathbb{R}_1^3$ bir spacelike vektör ise $\tilde{A} = a + \varepsilon a^* \in ID_1^3$ vektörüne *dual spacelike vektör*,
- iii) $a \in \mathbb{R}_1^3$ bir null vektör ise $\tilde{A} = a + \varepsilon a^* \in ID_1^3$ vektörüne *dual null vektör*

denir [13].

2.83. Tanım

$|a| \neq 0$ olmak üzere bir $\tilde{A} = a + \varepsilon a^* \in ID_1^3$ dual vektörünün normu

$$|\tilde{A}| = |a| + \varepsilon \frac{\langle a, a^* \rangle}{|a|} \quad (2.75)$$

biçiminde tanımlanır [13].

2.84. Tanım

$\tilde{A} = a + \varepsilon a^* \in ID_1^3$ olmak üzere,

$$H^2 = \left\{ \vec{X} = \vec{x} + \varepsilon \vec{x}^* \in ID_1^3 : \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_L = -1, \langle \vec{x}, \vec{x}^* \rangle_L = 0 \right\}, \quad (2.76)$$

$$S_1^2 = \left\{ \vec{X} = \vec{x} + \varepsilon \vec{x}^* \in ID_1^3 : \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_L = -1, \langle \vec{x}, \vec{x}^* \rangle_L = 0 \right\} \quad (2.77)$$

kümelerine, sırasıyla, *dual hiperbolik birim küre* ve *dual Lorentz birim küre* denir [40].

2.85. Teorem

ID_1^3 uzayındaki H^2 dual hiperbolik birim kürenin ve S_1^2 dual Lorentz birim kürenin noktaları, sırasıyla, $\mathbb{R}_1^3$ Lorentz uzayındaki yönlü timelike ve spacelike doğrulara birebir karşılık gelir [13].

3. REGLE YÜZEYLER VE BİRİM 2-KÜRENİN TANJANT DEMETİ

Bu bölümde, birim dual küre DS^2 ve birim 2-kürenin tanjant demetinin alt kümesi olan $T\bar{M}$ arasındaki izomorfizm verilmiştir. E. Study dönüşümüne göre; birim dual kürenin noktalarına $\mathbb{R}^3$ te yönlü doğrular karşılık gelir. Bu dönüşümden yararlanarak, $T\bar{M}$ üzerindeki tabii lift eğrisine $\mathbb{R}^3$ te regle yüzey karşılık getirilmiştir. Elde edilen regle yüzeyin; striksiyon eğrisi, şekil operatörü, ortalama ve Gauss eğriliği hesaplanmıştır. Bunlara ek olarak, regle yüzeyin açılabilirlik şartı incelenmiştir.

3.1. Tanım

S^2 , $\mathbb{R}^3$ te birim 2-küre olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan cümleye *birim 2-kürenin tanjant demeti* denir [42].

$$TS^2 = \{(\gamma, \nu) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 : |\gamma| = 1, \langle \gamma, \nu \rangle = 0\}. \quad (3.2)$$

$T\bar{M}$, TS^2 nin alt kümesi olsun. $T\bar{M}$ kümesi aşağıdaki koşulları sağlar:

$$T\bar{M} = \{(\bar{\gamma}, \bar{\nu}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 : |\bar{\gamma}| = 1, \langle \bar{\gamma}, \bar{\nu} \rangle = 0\}. \quad (3.3)$$

Burada, $\bar{\gamma}$ ve $\bar{\nu}$, sırasıyla, γ ve ν nin türevlerini göstermektedir.

3.2. Tanım

$\Gamma: I \rightarrow \bar{M}$ düzgün bir eğri ve $\bar{M}$, $\mathbb{R}^3$ te bir hiperyüzey olsun. Aşağıdaki eşitlikle tanımlanan Γ eğrisine X in *integral eğrisi* denir [6].

$$\frac{d\Gamma(s)}{ds} = X(\Gamma(s)). \quad (3.1)$$

Burada, X vektör alanı $\bar{M}$ de tanjant vektör alanıdır.

3.3. Tanım

Verilen bir Γ eğrisi için $T\bar{M}$ üzerinde aşağıdaki eşitliği sağlayan $\bar{\Gamma}$ eğrisine *tabii lift eğrisi* denir:

$$\bar{\Gamma}(s) = (\bar{\gamma}(s), \bar{v}(s)) = (\gamma'(s)_{\gamma(s)}, v'(s)_{v(s)}). \quad (3.4)$$

Burada $D, \mathbb{R}^3$ te Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere

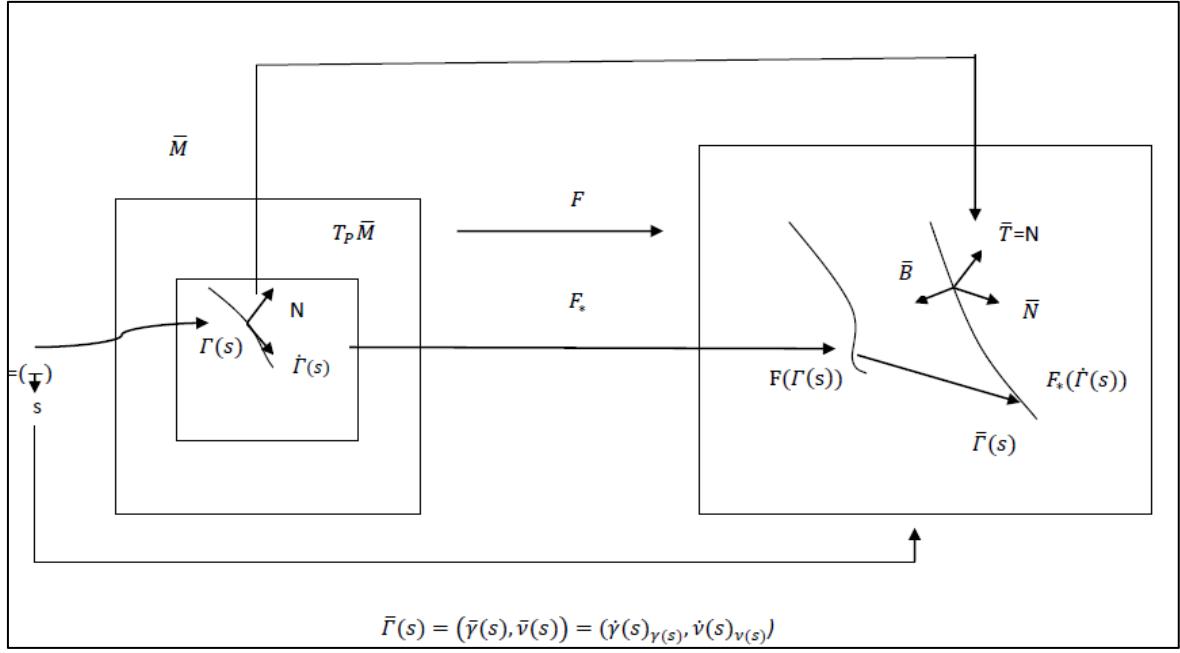
$$\frac{d(\bar{\Gamma}(s))}{ds} = \frac{d}{ds} (\Gamma'(s)_{\Gamma(s)}) = D_{\Gamma'(s)} \Gamma'(s) \quad (3.5)$$

eşitliği yazılabilir. Aynı zamanda,

$$T\bar{M} = \cup T_p \bar{M}, p \in \bar{M} \quad (3.6)$$

dır.

$\{T(s), N(s), B(s)\}$ ve $\{\bar{T}(s), \bar{N}(s), \bar{B}(s)\}$, sırasıyla, $\Gamma(s)$ ve $\bar{\Gamma}(s)$ eğrilerinin Frenet çatıları olsun.



Şekil 3.1. $\bar{\Gamma}(s)$ tabii lift eğrisi

Yukarıdaki şekilde,

$$F: \bar{M} \rightarrow T\bar{M}$$

ve

$$F_{*p}: T_p \bar{M} \rightarrow T_{F(p)}(T\bar{M})$$

dönüşümleri $\bar{M}, T\bar{M}, T_p \bar{M}$ ve $T_{F(p)}(T\bar{M})$ arasındaki dönüşümlerdir.

$\{\bar{\beta}(s), w(s)\}$ 1- parametrelili doğru ailesi için, $\{\bar{\beta}(s), w(s)\}$ çiftinin ürettiği regle yüzey aşağıda verilmiştir:

$$\bar{\Phi}(s, v) = \bar{\beta}(s) + v.w(s), \quad s \in I, \quad v \in \mathbb{R}. \quad (3.7)$$

Regle yüzeyin striksiyon eğrisi;

$$\check{\beta}(s) = \bar{\beta}(s) - \frac{\langle \bar{\beta}'(s), w'(s) \rangle}{\langle w'(s), w'(s) \rangle} \cdot w(s) \quad (3.8)$$

olup eğer $\bar{\beta}'(s)$ ve $w'(s)$ iç çarpımı sıfıra eşitse $\check{\beta}(s)$ ile $\bar{\beta}(s)$ çakışır.

E. Study dönüşümünden yararlanarak şu teoremi verebiliriz:

3.4. Teorem

Birim dual kürenin noktaları $\mathbb{R}^3$ teki yönlü doğrular ile birebir eşlenir [38].

Birim dual küre DS^2 ve birim 2- kürenin tanjant demetinin alt cümlesi olan $T\bar{M}$ arasındaki izomorfizm aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} T\bar{M} &\rightarrow DS^2, \\ \bar{F} = (\bar{\gamma}, \bar{v}) &\mapsto \vec{F} = \bar{\gamma} + \varepsilon \bar{v}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

3.5. Teorem

$\vec{F}(s) = \vec{\gamma}(s) + \varepsilon \vec{v}(s)$ tabii lift eğrisi DS^2 üzerinde s parametresiyle verilen eğri olsun.

$\bar{F}(s)$ eğrisi tarafından $\mathbb{R}^3$ te üretilen regle yüzey,

$$\bar{\Phi}(s, \mathcal{G}) = \vec{\gamma}(s) \times \vec{v}(s) + \mathcal{G} \cdot \vec{\gamma}(s),$$

olup bu regle yüzeyin dayanak eğrisi,

$$\hat{\beta}(s) = \vec{\gamma}(s) \times \vec{v}(s) \quad (3.10)$$

eğrisidir [42].

Böylece; $T\bar{M}, DS^2$ ve $\mathbb{R}^3$ arasında aşağıdaki izomorfizm mevcuttur:

$$\begin{aligned} T\bar{M} &\rightarrow DS^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \\ \bar{F}(s) = (\bar{\gamma}(s), \bar{v}(s)) &\mapsto \vec{F}(s) = \vec{\gamma}(s) + \varepsilon \vec{v}(s) \mapsto \bar{\Phi}(s, \mathcal{G}) = \vec{\gamma}(s) \times \vec{v}(s) + \mathcal{G} \cdot \vec{\gamma}(s), \end{aligned} \quad (3.11)$$

Eş. 3.10 ile verilen $\hat{\beta}(s) = \vec{\gamma}(s) \times \vec{v}(s)$ eğrisinin türevi alınır;

$$\dot{\hat{\beta}}(s) = \vec{\gamma}'(s) \times \vec{v}(s) + \vec{\gamma}(s) \times \vec{v}'(s) = \langle \vec{\gamma}'(s), \vec{v}'(s) \rangle \geq 0 \quad (3.12)$$

bulunur. $\vec{\gamma}(s)$ birim olarak alınırsa açılabilir olma şartı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} \det(\dot{\hat{\beta}}(s), \vec{\gamma}(s), \vec{\gamma}'(s)) &= (\vec{\gamma}'(s) \times \vec{v}(s) + \vec{\gamma}(s) \times \vec{v}'(s)) \cdot \vec{\gamma}'(s) \\ &= \langle \vec{\gamma}'(s), \vec{v}'(s) \rangle = 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

3.6. Lemma

$\vec{F}(s) = \vec{\gamma}(s) + \varepsilon \vec{v}(s)$ tabii lift eğrisi DS^2 üzerinde bir eğri olsun. Tabii lift eğrisi tarafından üretilen regle yüzey açılabilirdir gerek ve yeter şart $\langle \vec{\gamma}'(s), \vec{v}'(s) \rangle = 0$ dır.

Lemma'nın ispatı Eş. 3.13'ün bir sonucudur.

3.7. Önerme

$\vec{F}(s) = \vec{\gamma}(s) + \varepsilon \vec{v}(s)$ tabii lift eğrisi DS^2 üzerinde bir eğri olsun. Tabii lift eğrisi tarafından üretilen regle yüzey açılabilirdir gerek ve yeter şart $\vec{F}(s)$ ve $\vec{\gamma}(s)$ aynı yay parametresine sahiptir.

İspat

$\vec{F}(s) = \vec{\gamma}(s) + \varepsilon \vec{v}(s)$ tabii lift eğrisi DS^2 üzerinde bir eğri olsun. $\vec{F}(s)$ eğrisinin normu aşağıdaki gibi verilir:

$$|\vec{F}(s)| = \sqrt{\langle \vec{\gamma}(s), \vec{\gamma}(s) \rangle} + \varepsilon \frac{\langle \vec{\gamma}(s), \vec{v}(s) \rangle}{\sqrt{\langle \vec{\gamma}(s), \vec{\gamma}(s) \rangle}}. \quad (3.14)$$

$$\bar{s} = \int_0^s |\vec{F}(s)| ds = s + \varepsilon \int_0^s \frac{\langle \vec{\gamma}(s), \vec{v}(s) \rangle}{\sqrt{\langle \vec{\gamma}(s), \vec{\gamma}(s) \rangle}} ds. \quad (3.15)$$

Lemma 3.6 dan regle yüzeyin açılabilirlik şartı aşağıda verilmiştir:

$$\langle \vec{\gamma}'(s), \vec{v}'(s) \rangle \geq 0.$$

Sonuç olarak;

$$s = \bar{s}$$

elde edilir. O halde, $\vec{\bar{\gamma}}(s)$ ve $\vec{\bar{v}}(s)$ aynı yay parametresine sahiptir.

Aşağıda verilen önermeler, regle yüzeyin açılabilir olma şartı kullanılarak elde edilmiştir:

3.8. Önerme

$\bar{\Gamma} = (\bar{\gamma}, \bar{v})$ tabii lift eğrisi $T\bar{M}$ üzerinde bir eğri olsun. $\bar{\Gamma} = (\bar{\gamma}, \bar{v})$ eğri çifti involüt-evolüt eğri çiftidir gerek ve yeter şart $\bar{\Gamma}$ eğrisi tarafından elde edilen yüzey açılabilir.

Önermenin ispatı Lemma 3.6 dan açıktır.

3.9. Önerme

$\bar{\Gamma} = (\bar{\gamma}, \bar{v})$ tabii lift eğrisi $T\bar{M}$ üzerinde bir eğri olsun. Tabii lift eğrisi tarafından üretilen regle yüzey açılabilir gerek ve yeter şart $\bar{\Gamma}$ eğrisinin ürettiği $\bar{\Phi}(s, \theta)$ regle yüzeyi açılabilir.

3.10. Önerme

$\bar{\Gamma} = (\bar{\gamma}, \bar{v})$ tabii lift eğrisi $T\bar{M}$ üzerinde bir eğri olsun. $(\hat{\beta}, \bar{\gamma})$ eğri çifti involüt-evolüt eğri çifti ise $\bar{\beta}(s)$ striksiyon eğrisi ve $\bar{\Gamma}$ eğrisinin ürettiği $\bar{\Phi}(s, \theta)$ regle yüzeyin $\hat{\beta}(s)$ dayanak eğrisi çakışır.

Örnek

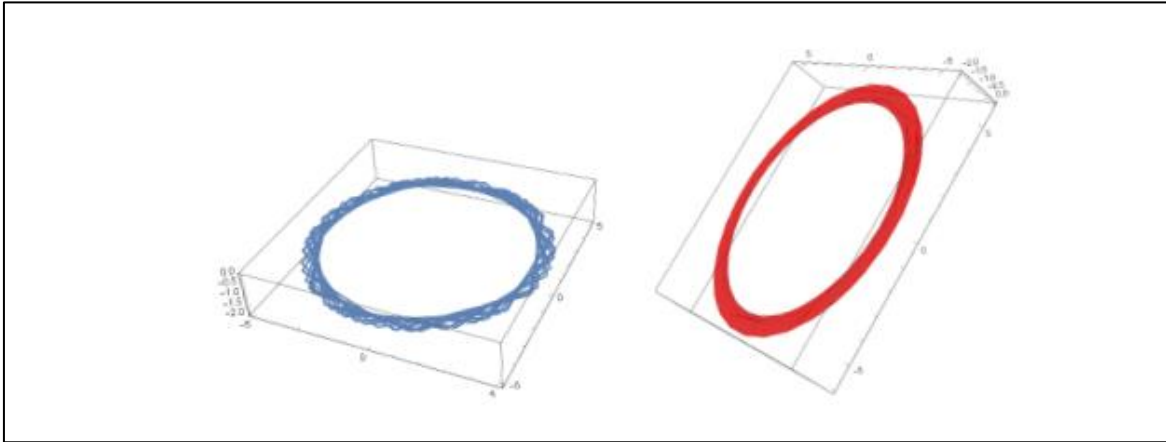
$\bar{\gamma}(s) = (-\sin s, \cos s, 0)$, $\bar{M}$ üzerinde bir eğri ve $\bar{v}(s) = (\cos s, \sin s, 5)$, $\mathbb{R}^3$ te bir vektör olsun. $|\bar{\gamma}(s)| = 1$ ve $\langle \bar{\gamma}, \bar{v} \rangle = 0$ olduğundan $\bar{\Gamma} = (\bar{\gamma}, \bar{v})$ tabii lift eğrisi $T\bar{M}$ üzerindedir. $\bar{\Gamma}$ eğrisinin ürettiği regle yüzey

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}(s, \vartheta) &= \bar{\gamma}(s) \times \bar{v}(s) + \vartheta \bar{\gamma}(s), \\ &= (5\cos s - \vartheta \sin s, 5\sin s + \vartheta \cos s, -1)\end{aligned}$$

dir. Bu regle yüzeyin dayanak eğrisi

$$\hat{\beta}(s) = (5\cos s, 5\sin s, -1)$$

dir. Aynı zamanda, $\langle \bar{\gamma}'(s), \bar{v}'(s) \rangle = 0$ olduğundan elde edilen regle yüzey açılabilir.



Şekil 3.2. $\bar{\Gamma}(s)$ tabii lift eğrisi ve bu eğri tarafından üretilen regle yüzey

$\bar{\Phi}$ regle yüzeyinin şekil operatörünü ve Gauss eğriliğini hesaplayalım:

$$\bar{\Phi}(s, \vartheta) = (5\cos s - \vartheta \sin s, 5\sin s + \vartheta \cos s, -1),$$

$$\bar{\Phi}_s(s, \vartheta) = (-5\sin s - \vartheta \cos s, 5\cos s - \vartheta \sin s, 0),$$

$$\bar{\Phi}_\vartheta(s, \vartheta) = (-\sin s, \cos s, 0).$$

$\langle \bar{\Phi}_s, \bar{\Phi}_g \rangle = 5 \neq 0$ olduğundan $\{\bar{\Phi}_s, \bar{\Phi}_g\}$ kümesi ortogonal değildir. Bu yüzden, Gramm-Schmidt ortonormalleştirme yöntemi kullanılır. Daha sonra, bu ortonormal tabana göre şekil operatörü hesaplanır.

$\bar{\Phi}_s$ ve $\bar{\Phi}_g$ vektörleri için ortonormal taban aşağıdaki gibi elde edilir:

$$N = \frac{\bar{\Phi}_s}{|\bar{\Phi}_s|} \times \bar{\Phi}_g$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{25 + g^2}} (0, 0, -g).$$

Böylece, şekil operatörü için aşağıdaki eşitlikler yazılır:

$$S(E_1) = \lambda_1 \cdot E_1 + \lambda_2 \cdot E_2,$$

$$S(E_2) = \mu_1 \cdot E_1 + \mu_2 \cdot E_2.$$

Şekil operatörünün katsayıları için aşağıdaki eşitlikler kullanılarak $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1$ ve μ_2 değerleri hesaplanır:

$$\lambda_1 = \frac{-1}{|\bar{\Phi}_s|^3 |\bar{\Phi}_g|} \det(\bar{\Phi}_{ss}, \bar{\Phi}_s, \bar{\Phi}_g),$$

$$\lambda_2 = \mu_1 = \frac{-1}{|\bar{\Phi}_s|^2 |\bar{\Phi}_g|^2} \det(\bar{\Phi}_{sg}, \bar{\Phi}_s, \bar{\Phi}_g),$$

$$\mu_2 = \frac{-1}{|\bar{\Phi}_s| |\bar{\Phi}_g|^3} \det(\bar{\Phi}_{gg}, \bar{\Phi}_s, \bar{\Phi}_g).$$

Burada;

$$\bar{\Phi}_{ss}(s, g) = (-5 \cos s + g \sin s, -5 \sin s - g \cos s, 0),$$

$$\bar{\Phi}_{sg}(s, g) = (-\cos s, -\sin s, 0),$$

$$\bar{\Phi}_{gg}(s, g) = (0, 0, 0)$$

dır. O halde, gerekli hesaplamalar yapıldıktan sonra aşağıdaki katsayılar elde edilir:

$$\lambda_1 = \frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{25+g^2}},$$

$$\lambda_2 = \mu_1 = \frac{-5}{2(25+g^2)},$$

$$\mu_1 = \frac{-\sqrt{25+g^2}}{2\sqrt{2}}.$$

Böylece, şekil operatörü aşağıda verilmiştir:

$$S = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{25+g^2}} & \frac{-5}{2(25+g^2)} \\ \frac{-5}{2(25+g^2)} & \frac{-\sqrt{25+g^2}}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Gauss eğriliği K ve ortalama eğrilik H , sırasıyla, aşağıdaki gibidir:

$$K = \det(S),$$

$$K = \frac{g^2}{4(25+g^2)},$$

$$H = \frac{1}{2}\text{İz}(S),$$

$$H = \frac{(-g^2+27)}{4\sqrt{2}\sqrt{25+g^2}}.$$

4. REGLE YÜZEYLER VE PSEUDO-KÜRELERİN TANJANT DEMETİ

Bu bölümde; ilk olarak, Lorentz birim küresinin tanjant demetinin alt kümesi $T\tilde{M}$ ve Lorentz birim küre S_1^2 arasındaki izomorfizm verilmiştir. İkinci olarak, hiperbolik birim kürenin tanjant demetinin alt kümesi $T\hat{M}$ ve hiperbolik birim küre $\mathbb{H}^2$ arasındaki izomorfizm verilmiştir. E. Study dönüşümüne göre S_1^2 veya $\mathbb{H}^2$ üzerindeki herhangi bir eğriye $\mathbb{R}_1^3$ ’te regle yüzey karşılık gelir. Kurulan bu izomorfizm yardımıyla, $T\tilde{M}$ ve $T\hat{M}$ üzerindeki herhangi bir tabii lift eğrisine $\mathbb{R}_1^3$ ’te bir regle yüzey karşılık getirilmiştir. Elde edilen regle yüzeyin; striksiyon eğrisi, şekil operatörü, ortalama ve Gauss eğriliği hesaplanmıştır. Bunlara ek olarak, regle yüzeyin açılabilirlik şartı incelenmiştir.

4.1. Tanım

$\hat{M}$, $\mathbb{R}_1^3$ ’te bir hiperyüzey ve $\Gamma: I \rightarrow \hat{M}$ düzgün bir eğri olsun. Aşağıdaki eşitliği sağlayan Γ eğrisine X in *integral eğrisi* denir [6].

$$\frac{d\Gamma(s)}{ds} = X(\Gamma(s)). \quad (4.1)$$

Burada, X vektör alanı $\hat{M}$ ’de tanjant vektör alanıdır.

4.2. Tanım

$\mathbb{R}_1^3$ ’te aşağıdaki koşulları sağlayan cümlelere, sırasıyla, *Lorentz birim küresi* ve *hiperbolik birim küre* denir [43]:

$$S_1^2 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_1^3 : \langle x, x \rangle_L = 1\}, \quad (4.2)$$

$$\mathbb{H}^2 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_1^3 : \langle x, x \rangle_L = -1\}. \quad (4.3)$$

4.3. Tanım

Aşağıdaki koşulları sağlayan cümlelere, sırasıyla, *Lorentz birim ve hiperbolik birim kürelerin tanjant demetleri* denir [43]:

$$TS_1^2 = \{(\gamma, \nu) \in \mathbb{S}_1^2 \times \mathbb{R}_1^3 : \langle \gamma, \nu \rangle_L = 0\}, \quad (4.4)$$

$$T\mathbb{H}^2 = \{(\gamma, \nu) \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_1^3 : \langle \gamma, \nu \rangle_L = 0\}. \quad (4.5)$$

$T\tilde{M}$ ve $T\hat{M}$ kümeleri, sırasıyla, TS_1^2 ve $T\mathbb{H}^2$ nin alt cümleleri olsun.

$$T\tilde{M} = \{(\bar{\gamma}, \bar{\nu}) \in \mathbb{R}_1^3 \times \mathbb{R}_1^3 : \langle \bar{\gamma}, \bar{\gamma} \rangle_L = 1, \langle \bar{\gamma}, \bar{\nu} \rangle_L = 0\}, \quad (4.5)$$

$$T\hat{M} = \{(\bar{\gamma}, \bar{\nu}) \in \mathbb{R}_1^3 \times \mathbb{R}_1^3 : \langle \bar{\gamma}, \bar{\gamma} \rangle_L = -1, \langle \bar{\gamma}, \bar{\nu} \rangle_L = 0\}. \quad (4.6)$$

Yukarıdaki cümlelerde verilen $\bar{\gamma}$ ve $\bar{\nu}$, sırasıyla, γ ve ν nin türevlerini temsil etmektedir.

4.4. Tanım

Verilen bir Γ eğrisi için, aşağıdaki eşitlikle verilen $\bar{\Gamma}$ eğrisine $T\hat{M}$ (veya $T\tilde{M}$) üzerinde *tabii lift eğrisi* denir.

$$\bar{\Gamma}(s) = (\bar{\gamma}(s), \bar{\nu}(s)) = (\dot{\gamma}(s)_{\gamma(s)}, \dot{\nu}(s)_{\nu(s)}). \quad (4.7)$$

Böylece, $D, \mathbb{R}_1^3$ te Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere

$$\frac{d(\bar{\Gamma}(s))}{ds} = \frac{d}{ds}(\Gamma'(s)_{\Gamma(s)}) = D_{\Gamma'(s)}\Gamma'(s) \quad (4.8)$$

yazılabilir.

$$H^2 = \{\vec{X} = \bar{x} + \varepsilon \bar{x}^* \in ID_1^3 : \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle_L = -1, \langle \bar{x}, \bar{x}^* \rangle_L = 0\}, \quad (4.9)$$

$$S_1^2 = \left\{ \vec{X} = \vec{x} + \varepsilon \vec{x}^* \in ID_1^3 : \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_L = -1, \langle \vec{x}, \vec{x}^* \rangle_L = 0 \right\} \quad (4.10)$$

kümeleri, sırasıyla, dual hiperbolik birim küre ve dual Lorentz birim küre olarak tanımlanır [43].

$\{\bar{\beta}(s), w(s)\}$ bir parametrelili doğru ailesi için, $\{\bar{\beta}(s), w(s)\}$ çiftinin ürettiği regle yüzey aşağıda verilmiştir:

$$\bar{\Phi}(s, u) = \bar{\beta}(s) + u \cdot w(s), \quad s \in I, u \in \mathbb{R}. \quad (4.11)$$

Regle yüzeyin striksiyon eğrisi,

$$\check{\beta}(s) = \bar{\beta}(s) - \frac{\langle \bar{\beta}'(s), w'(s) \rangle_L}{\langle w'(s), w'(s) \rangle_L} \cdot w(s) \quad (4.12)$$

olup eğer $\bar{\beta}'(s)$ ve $w'(s)$ iç çarpımı sifıra eşitse $\check{\beta}(s)$ ile $\bar{\beta}(s)$ çakışır.

4.5. Önerme

Aşağıdaki izomorfizmler mevcuttur:

$$T\tilde{M} \rightarrow S_1^2,$$

$$\bar{\Gamma} = (\bar{\gamma}, \bar{v}) \mapsto \bar{\bar{\Gamma}} = \bar{\gamma} + \varepsilon \bar{v} \quad (4.13)$$

ve

$$T\hat{M} \rightarrow H^2,$$

$$\bar{\Gamma} = (\bar{\gamma}, \bar{v}) \mapsto \bar{\bar{\Gamma}} = \bar{\gamma} + \varepsilon \bar{v}. \quad (4.14)$$

4.6. Teorem (E. Study Dönüşümü)

ID_1^3 uzayında H^2 dual hiperbolik ve S_1^2 dual Lorentz birim kürelerin noktaları ile $\mathbb{R}_1^3$ Lorentz çizgiler uzayındaki yönlü timelike veya spacelike doğrular birbirlerine karşılık gelir [13].

$\mathbb{R}^3$ te bir regle yüzey, bir doğrunun bir eğri boyunca hareketiyle meydana gelir. Bu doğruya yüzeyin üretici denir. Eğer yüzeyin indirgenmiş metriği Lorentz metriği ise (yani; yüzeyin her noktasındaki normal vektörü spacelike vektör ise) regle yüzeye timelike regle yüzey denir. Benzer şekilde; yüzeyin indirgenmiş metriği pozitif tanımlı Riemannian metriği ise (yani; yüzeyin her noktasındaki normal vektörü timelike vektör ise) regle yüzeye spacelike regle yüzey denir.

Sonuç olarak; E. Study dönüşümünün de yardımıyla tabii lift eğrisinin ürettiği regle yüzeye ilgili aşağıdaki önermede verilen izomorfizmler mevcuttur:

4.7. Önerme

Aşağıdaki izomorfizmler mevcuttur:

$$T\tilde{M} \rightarrow S_1^2 \rightarrow \mathbb{R}_1^3,$$

$$\bar{\Gamma} = (\bar{\gamma}, \bar{\nu}) \mapsto \bar{\bar{\Gamma}} = \bar{\gamma} + \varepsilon \bar{\nu} = \bar{\Phi}(s, u) = \bar{\gamma}(s) \times_L \bar{\nu}(s) + u \bar{\gamma}(s) \quad (4.15)$$

ve

$$T\hat{M} \rightarrow H^2 \rightarrow \mathbb{R}_1^3,$$

$$\bar{\Gamma} = (\bar{\gamma}, \bar{\nu}) \mapsto \bar{\bar{\Gamma}} = \bar{\gamma} + \varepsilon \bar{\nu} = \bar{\Phi}(s, u) = \bar{\gamma}(s) \times_L \bar{\nu}(s) + u \bar{\gamma}(s). \quad (4.16)$$

Aşağıda verilen önermelerde, tabii lift eğrisinin ürettiği spacelike veya timelike regle yüzeylerle ilgili bazı sonuçlardan bahsedilmiştir:

4.8. Önerme

$\bar{\Gamma}(s) = (\bar{\gamma}(s), \bar{\nu}(s))$ tabii lift eğrisi $T\hat{M}$ üstünde bir eğri olsun. Eğer $\bar{\beta}(s) = \bar{\gamma}(s) \times_L \bar{\nu}(s)$ dayanak eğrisi spacelike bir eğri ve $\bar{\gamma}(s)$ doğrultman vektörü timelike ise $\bar{\nu}(s)$ spacelike dır. Elde edilen $\bar{\Phi}(s, u)$ regle yüzeyi $\mathbb{R}_1^3$ te timelike regle yüzeydir.

4.9. Önerme

$\bar{\Gamma}(s) = (\bar{\gamma}(s), \bar{\nu}(s))$ tabii lift eğrisi $T\hat{M}$ üstünde bir eğri olsun. Eğer $\bar{\beta}(s) = \bar{\gamma}(s) \times_L \bar{\nu}(s)$ dayanak eğrisi spacelike bir eğri ise 2 durum mevcuttur:

- i) $\bar{\gamma}(s)$ doğrultman vektörü timelike ise $\bar{\nu}(s)$ timelike dır. Elde edilen $\bar{\Phi}(s, u)$ regle yüzeyi $\mathbb{R}_1^3$ te timelike regle yüzeydir.
- ii) $\bar{\gamma}(s)$ doğrultman vektörü timelike ise $\bar{\nu}(s)$ spacelike dır. Elde edilen $\bar{\Phi}(s, u)$ regle yüzeyi $\mathbb{R}_1^3$ te timelike regle yüzeydir.

4.10. Önerme

$\bar{\Gamma}(s) = (\bar{\gamma}(s), \bar{\nu}(s))$ tabii lift eğrisi $T\tilde{M}$ üstünde bir eğri olsun. Eğer $\bar{\beta}(s) = \bar{\gamma}(s) \times_L \bar{\nu}(s)$ dayanak eğrisi spacelike bir eğri ve $\bar{\gamma}(s)$ doğrultman vektörü spacelike ise $\bar{\nu}(s)$ timelike dır. Elde edilen $\bar{\Phi}(s, u)$ regle yüzeyi $\mathbb{R}_1^3$ te spacelike regle yüzeydir.

4.11. Önerme

$\bar{\Gamma}(s) = (\bar{\gamma}(s), \bar{\nu}(s))$ tabii lift eğrisi $T\tilde{M}$ üstünde bir eğri olsun. Eğer $\bar{\beta}(s) = \bar{\gamma}(s) \times_L \bar{\nu}(s)$ dayanak eğrisi timelike bir eğri ve $\bar{\gamma}(s)$ doğrultman vektörü spacelike ise $\bar{\nu}(s)$ spacelike dır. Elde edilen $\bar{\Phi}(s, u)$ regle yüzeyi $\mathbb{R}_1^3$ te timelike regle yüzeydir.

4.12. Önerme

$\bar{\Gamma}(s) = (\bar{\gamma}(s), \bar{\nu}(s))$ tabii lift eğrisi $T\tilde{M}$ üstünde bir eğri olsun. Eğer $\bar{\beta}(s) = \bar{\gamma}(s) \times_L \bar{\nu}(s)$ dayanak eğrisi spacelike bir eğri ise 2 durum vardır:

- i) $\bar{\gamma}(s)$ doğrultman vektörü timelike ise $\bar{\nu}(s)$ spacelike dır. Elde edilen $\bar{\Phi}(s, u)$ regle yüzeyi $\mathbb{R}_1^3$ te timelike regle yüzeydir.
- ii) $\bar{\gamma}(s)$ doğrultman vektörü timelike ise $\bar{\nu}(s)$ timelike dır. Elde edilen $\bar{\Phi}(s, u)$ regle yüzeyi $\mathbb{R}_1^3$ te timelike regle yüzeydir.

$\bar{\beta}(s) = \bar{\gamma}(s) \times_L \bar{\nu}(s)$ dayanak eğrisinin türevi alınır;

$$\bar{\beta}'(s) = \bar{\gamma}'(s) \times_L \bar{\nu}(s) + \bar{\gamma}(s) \times_L \bar{\nu}'(s)$$

elde edilir. $\bar{\gamma}(s)$ birim olarak alınır ise tabii lift eğrisi tarafından üretilen regle yüzeyin açılabilir olma şartı aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} \det(\bar{\beta}'(s), \bar{\gamma}(s), \bar{\gamma}'(s)) &= (\bar{\gamma}'(s) \times_L \bar{\nu}(s) + \bar{\gamma}(s) \times_L \bar{\nu}'(s)) \bar{\gamma}'(s) \\ &= \langle \bar{\gamma}'(s), \bar{\nu}'(s) \rangle_L = 0. \end{aligned} \tag{4.17}$$

4.13. Lemma

$\bar{\Gamma}(s) = (\bar{\gamma}(s), \bar{\nu}(s))$ tabii lift eğrisi S_1^2 de spacelike (veya H^2 de timelike) bir eğri olsun. $\bar{\Gamma}(s)$ tabii lift eğrisi tarafından üretilen regle yüzey açılabilirdir gerek ve yeter şart $\langle \bar{\gamma}'(s), \bar{\nu}'(s) \rangle_L = 0$.

Lemma'nın ispatı Eş. (4.17) nin bir sonucudur.

Aşağıda verilen önermeler, regle yüzeyin açılabilir olma şartı kullanılarak elde edilmiştir:

4.14. Önerme

$\bar{\Gamma}(s) = (\bar{\gamma}(s), \bar{\nu}(s))$ eğrisi $\hat{TM}$ (veya $\tilde{TM}$) üstünde tabii lift eğrisi olsun. $\bar{\Gamma}(s)$ tabii lift eğrisinin ürettiği regle yüzey açılabilirdir gerek ve yeter şart $\langle \bar{\gamma}'(s), \bar{\nu}'(s) \rangle_L = 0$.

Önermenin ispatı Lemma 4.13 ün bir sonucudur.

4.15. Önerme

$\bar{\Gamma}(s) = (\bar{\gamma}(s), \bar{\nu}(s))$ eğrisi $\hat{TM}$ (veya $\tilde{TM}$) üstünde tabii lift eğrisi olsun. $(\bar{\gamma}(s), \bar{\nu}(s))$ eğri çifti involüt-evolüt eğri çiftidir gerek ve yeter şart $\bar{\Gamma}(s)$ tabii lift eğrisinin ürettiği spacelike veya timelike regle yüzey açılabilirdir.

4.16. Önerme

$\bar{\Gamma}(s) = (\bar{\gamma}(s), \bar{\nu}(s))$ eğrisi $\hat{TM}$ (veya $\tilde{TM}$) üstünde tabii lift eğrisi olsun. $(\bar{\gamma}(s), \bar{\nu}(s))$ eğri çifti involüt-evolüt eğri çifti ise $\check{\beta}(s)$ striksiyon eğrisi ve $\bar{\Phi}(s, u)$ timelike (veya spacelike) regle yüzeyinin dayanak eğrisi $\bar{\beta}(s)$ çakışır.

Örnek

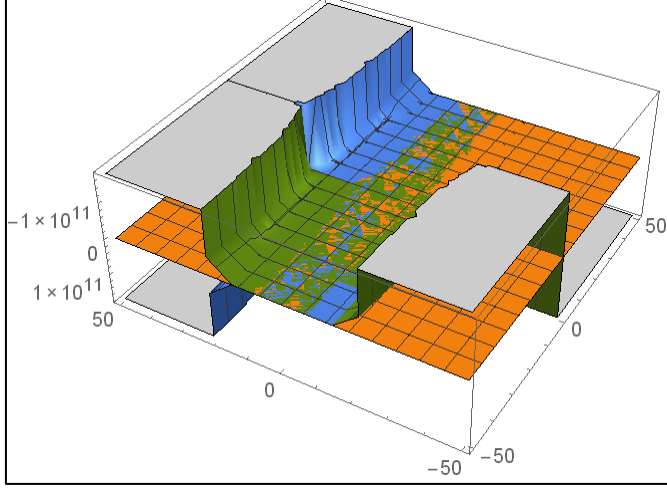
$\bar{\gamma}(s) = (0, \sinh s, \cosh s)$ eğrisi $\hat{M}$ üzerinde spacelike bir eğri ve $\bar{\nu}(s) = (0, 3\cosh s, 3\sinh s)$, $\mathbb{R}_1^3$ te timelike bir vektör olsun. $\langle \bar{\gamma}(s), \bar{\gamma}(s) \rangle_L = -1$ ve $\langle \bar{\gamma}(s), \bar{\nu}(s) \rangle_L = 0$ olduğundan $\bar{\Gamma}(s) = (\bar{\gamma}(s), \bar{\nu}(s))$ eğrisi $\hat{TM}$ üzerindedir. $\bar{\Gamma}(s)$ eğrisi tarafından üretilen timelike regle yüzey

$$\bar{\Phi}(s, u) = \bar{\gamma}(s) \times_L \bar{\nu}(s) + u\bar{\gamma}(s) = (-3, v \sinh s, v \cosh s)$$

olup regle yüzeyin dayanak eğrisi

$$\bar{\beta}(s) = (-3, 0, 0)$$

dır. $\langle \bar{\gamma}'(s), \bar{\nu}'(s) \rangle_L = 0$ olduğundan $\bar{\Gamma}(s)$ tabii lift eğrisi tarafından üretilen timelike regle yüzey açılabilir.



Şekil 4.1. $\bar{\Gamma}(s)$ tabii lift eğrisi tarafından üretilen timelike regle yüzey

$\bar{\Phi}$ regle yüzeyinin şekil operatörünü ve Gauss eğriliğini hesaplayalım:

$$\bar{\Phi}(s, u) = (-3, v \sinh s, v \cosh s),$$

$$\bar{\Phi}_s(s, u) = (0, u \cosh s, u \sinh s),$$

$$\bar{\Phi}_u(s, u) = (0, \sinh s, \cosh s).$$

$\langle \bar{\Phi}_s, \bar{\Phi}_u \rangle_L = 0$ olduğundan $\{\bar{\Phi}_s, \bar{\Phi}_u\}$ kümesi ortogondur. Regle yüzeyin normal vektörü aşağıdaki gibi elde edilir:

$$N = \frac{\bar{\Phi}_s}{|\bar{\Phi}_s|} \times_L \bar{\Phi}_u$$

$$N = (-1, 0, 0).$$

Böylece, şekil operatörü için aşağıdaki eşitlikler yazılır:

$$S(E_1) = \lambda_1 \cdot E_1 + \lambda_2 \cdot E_2,$$

$$S(E_2) = \mu_1 \cdot E_1 + \mu_2 \cdot E_2.$$

Şekil operatörünün katsayıları için aşağıdaki eşitlikler kullanılarak $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1$ ve μ_2 değerleri hesaplanır:

$$\lambda_1 = \frac{-1}{|\bar{\phi}_s|^3 |\bar{\phi}_v|} \det(\bar{\phi}_{ss}, \bar{\phi}_s, \bar{\phi}_v) = 0$$

$$\lambda_2 = \mu_1 = \frac{-1}{|\bar{\phi}_s|^2 ||\bar{\phi}_v|^2} \det(\bar{\phi}_{sv}, \bar{\phi}_s, \bar{\phi}_v) = 0$$

$$\mu_2 = \frac{-1}{|\bar{\phi}_s| |\bar{\phi}_v|^3} \det(\bar{\phi}_{vv}, \bar{\phi}_s, \bar{\phi}_v) = 0.$$

Böylece, regle yüzeyin şekil operatörü aşağıda verilmiştir:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Gauss eğriliği K ve ortalama eğrilik H , sırasıyla, aşağıdaki gibidir:

$$K = \det(S),$$

$$K = 0.$$

$$H = \frac{1}{2} \text{Iz}(S),$$

$$H = 0.$$

Örnek

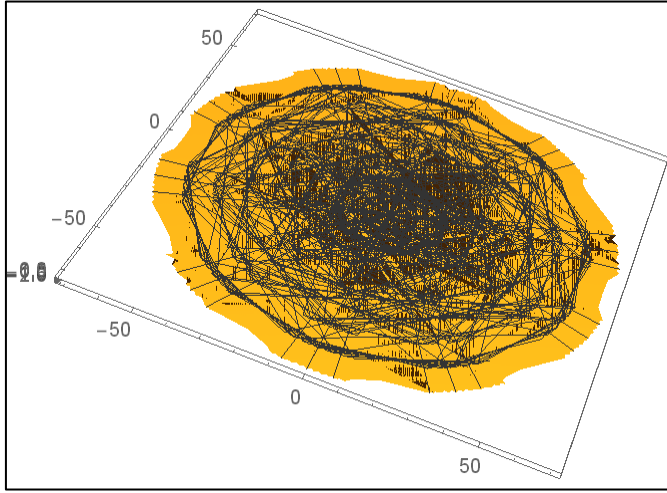
$\bar{\gamma}(s) = \left(\sqrt{2} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), -\sqrt{2} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), 0 \right)$ eğrisi $\tilde{M}$ üzerinde spacelike bir eğri ve $\bar{v}(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), 0 \right)$, $\mathbb{R}_1^3$ te spacelike bir vektör olsun. $\langle \bar{\gamma}(s), \bar{\gamma}(s) \rangle_L = 1$ ve $\langle \bar{\gamma}(s), \bar{v}(s) \rangle_L = 0$ olduğundan $\bar{\Gamma}(s) = (\bar{\gamma}(s), \bar{v}(s))$ eğrisi $T\tilde{M}$ üzerindedir. $\bar{\Gamma}(s)$ eğrisi tarafından üretilen timelike regle yüzey

$$\bar{\Phi}(s, u) = \bar{\gamma}(s) \times_L \bar{v}(s) + u \bar{\gamma}(s) = \left(u \sqrt{2} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), -u \sqrt{2} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), -1 \right)$$

olup regle yüzeyin dayanak eğrisi

$$\bar{\beta}(s) = (-1, 0, 0)$$

dır. Dahası, $\langle \bar{\gamma}'(s), \bar{\nu}'(s) \rangle_L = 0$ olduğundan $\bar{\Gamma}(s)$ tabii lift eğrisi tarafından üretilen timelike regle yüzey açılabilir.



Şekil 4.2. $\bar{\Gamma}(s)$ tabii lift eğrisi tarafından üretilen timelike regle yüzey

$\bar{\Phi}$ regle yüzeyinin şekil operatörünü ve Gauss eğriliğini hesaplayalım:

$$\bar{\Phi}(s, u) = (u\sqrt{2} \sin(\frac{s}{\sqrt{2}}), -u\sqrt{2} \cos(\frac{s}{\sqrt{2}}), -1),$$

$$\bar{\Phi}_s(s, u) = (u \cos(\frac{s}{\sqrt{2}}), u \sin(\frac{s}{\sqrt{2}}), 0),$$

$$\bar{\Phi}_u(s, u) = (\sqrt{2} \sin(\frac{s}{\sqrt{2}}), -\sqrt{2} \cos(\frac{s}{\sqrt{2}}), 0)$$

olup $\langle \bar{\Phi}_s, \bar{\Phi}_u \rangle_L = 0$ olduğundan $\{\bar{\Phi}_s, \bar{\Phi}_u\}$ kümesi ortogonaldır. Regle yüzeyin normal vektörü aşağıdaki gibi elde edilir:

$$N = \frac{\bar{\Phi}_s}{|\bar{\Phi}_s|} \times_L \frac{\bar{\Phi}_u}{|\bar{\Phi}_u|}$$

$$N = (0, 0, -1).$$

Böylece, şekil operatörü için aşağıdaki eşitlikler yazılır:

$$S(E_1) = \lambda_1 \cdot E_1 + \lambda_2 \cdot E_2,$$

$$S(E_2) = \mu_1 \cdot E_1 + \mu_2 \cdot E_2.$$

Şekil operatörünün katsayıları için aşağıdaki eşitlikler kullanılarak $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1$ ve μ_2 değerleri hesaplanır:

$$\lambda_1 = \frac{-1}{|\bar{\phi}_s|^3 |\bar{\phi}_v|} \det(\bar{\phi}_{ss}, \bar{\phi}_s, \bar{\phi}_v) = 0$$

$$\lambda_2 = \mu_1 = \frac{-1}{|\bar{\phi}_s|^2 ||\bar{\phi}_v|^2} \det(\bar{\phi}_{sv}, \bar{\phi}_s, \bar{\phi}_v) = 0$$

$$\mu_2 = \frac{-1}{|\bar{\phi}_s| \cdot |\bar{\phi}_v|^3} \det(\bar{\phi}_{vv}, \bar{\phi}_s, \bar{\phi}_v) = 0.$$

Böylece, regle yüzeyin şekil operatörü aşağıda verilmiştir:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Gauss eğriliği K ve ortalama eğrilik H , sırasıyla, aşağıdaki gibidir:

$$K = \det(S),$$

$$K = 0.$$

$$H = \frac{1}{2} \text{İz}(S),$$

$$H = 0.$$

5. SLANT REGLE YÜZEYLER VE BİRİM 2-KÜRENİN TANJANT DEMETİ

Bu bölümde, birim dual küre DS^2 ve birim 2- kürenin tanjant demetinin alt kümesi $T\bar{M}$ arasındaki izomorfizm ve E. Study dönüşümü yardımıyla $\mathbb{R}^3$ te tabii lift eğrisinin striksiyon eğrisinin ürettiği slant regle yüzeyler tanımlanmıştır. Dahası, alınan bir regle yüzeyin slant regle yüzey olma şartı verilmiştir. Daha sonra, $\mathbb{R}^3$ te $\vec{\bar{q}}-$, $\vec{\bar{h}}-$ ve $\vec{\bar{a}}-$ slant regle yüzeyleri tanımlanmıştır.

$\mathbb{R}^3$ te $\bar{\Phi}(u, v) = \vec{\bar{q}}(u) \times \vec{\bar{g}}(u) + v\vec{\bar{q}}(u)$ eşitliğiyle verilen regle yüzey aşağıdaki 3 şartı sağlarsa elde edilen $\hat{\phi}(u, v)$ sırasıyla, $\vec{\bar{q}}-$ (veya $\vec{\bar{h}}-$, $\vec{\bar{a}}-$) *slant regle yüzey* denir:

$$i) \quad \bar{\Phi}(u, v) \text{ regle yüzeyinin dayanak eğrisi, } \bar{\beta}(u) = (\vec{\bar{q}}(u) \times \vec{\bar{g}}^*(u)) - \frac{\langle \vec{\bar{\beta}}'(u), \vec{\bar{q}}'(u) \rangle}{\langle \vec{\bar{q}}'(u), \vec{\bar{q}}'(u) \rangle} \vec{\bar{q}}(u), \vec{\bar{g}}^* \subseteq \vec{\bar{g}}$$

şeklindedir.

$$ii) \quad \langle \vec{\bar{q}}(u), \vec{\bar{g}}^*(u) \rangle = 0 \text{ ve } |\vec{\bar{q}}(u)| = 1 \text{ olmalıdır.}$$

$$iii) \quad \vec{\bar{q}} - (\vec{\bar{h}}-, \vec{\bar{a}}-) \text{ vektörü sıfırdan farklı sabit bir vektörle sabit bir açı yapmalıdır.}$$

$\hat{\Gamma}(u) = \vec{\bar{q}}(u) + \varepsilon \vec{\bar{g}}^*(u)$, DS^2 üzerinde u parametresiyle verilen tabii lift eğrisi olsun. $\hat{\Gamma}(u)$ striksiyon eğrisinin ürettiği regle yüzey;

$$\hat{\phi}(u, v) = \vec{\bar{q}}(u) \times \vec{\bar{g}}^*(u) + v\vec{\bar{q}}(u), u \in I, \vec{\bar{g}}^* \subseteq \vec{\bar{g}} \quad (5.1)$$

olup bu regle yüzeyin dayanak eğrisi

$$\bar{\beta}(u) = \vec{\bar{q}}(u) \times \vec{\bar{g}}^*(u) \quad (5.2)$$

dir.

Sonuç olarak; aşağıdaki izomorfizm yazılabilir:

$$T\bar{M} \rightarrow DS^2 \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$\hat{\Gamma}(u) = (\vec{q}(u), \vec{g}^*(u)) \rightarrow \vec{\hat{\Gamma}}(u) = \vec{q}(u) + \varepsilon \vec{g}^*(u) \rightarrow \hat{\phi}(u, v) = \vec{q}(u) \times \vec{g}^*(u) + v\vec{q}(u).$$

Aşağıdaki alt başlıklarda, sırasıyla, $\vec{\vec{q}}, \vec{\vec{h}}, \vec{\vec{a}}$ – slant regle yüzeylerle ilgili tanım ve teoremler incelenecektir.

5.1. Birim 2-Kürenin Tanjant Demeti ve $\vec{\vec{q}}$ – Slant Regle Yüzeyler

Bu bölümde, $\mathbb{R}^3$ te $\vec{\vec{q}}$ – slant regle yüzeylerle ilgili tanım ve teoremler verilecektir.

5.1. Tanım

$\hat{\Gamma}(u) = (\vec{q}(u), \vec{g}^*(u))$, $T\bar{M}$ üzerinde tabii lift eğrisinin striksiyon eğrisi olsun. $\mathbb{R}^3$ te $\hat{\Gamma}(u)$ eğrisinin ürettiği regle yüzey $\hat{\phi}(u, v)$ olsun.

$$\hat{\phi}(u, v) = \vec{\beta}(u) + v\vec{q}(u) \quad (5.3)$$

olup $\vec{\beta}(u)$, $\hat{\phi}(u, v)$ regle yüzeyin dayanak eğrisidir. $\{\vec{\vec{q}}, \vec{\vec{h}}, \vec{\vec{a}}, \vec{k}_1, \vec{k}_2\}$, $\hat{\phi}$ regle yüzeyinin Frenet operatörleri olmak üzere ana doğrunun birim doğrultman vektörü, sabit bir $\vec{u}$ ile sabit açı yapıyorsa; yani

$$\langle \vec{\vec{q}}, \vec{u} \rangle = \cos \theta = \text{sabit} \quad \theta \neq \frac{\pi}{2}$$

ise $\hat{\phi}$ regle yüzeyine $\vec{\vec{q}}$ – slant regle yüzey denir.

5.2. Teorem

$\hat{\phi}, \vec{q}$ – slant regle yüzeydir gerek ve yeter şart

$$\tan \theta = \frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_2} \quad (5.4)$$

sabittir. Burada; θ açısı, $\vec{q}$ ve sabit doğrultu arasındaki açıyı belirtir.

İspat

$\hat{\Gamma}(u) = (\bar{q}(u), \bar{\vartheta}^*(u)), T\bar{M}$ üzerinde tabii lift eğrisinin striksiyon eğrisi ve $\hat{\phi}(u, v)$, $\hat{\Gamma}(u)$ eğrisi tarafından üretilen regle yüzey olsun. Böylelikle, $\hat{\phi}$ regle yüzeyi

$$\langle \vec{q}, \vec{u} \rangle = \cos \theta = \text{sabit} \quad (5.5)$$

eşitliğini sağlar. Eş. (5.5) in u parametresine göre türevi alınırsa $\langle \vec{h}, \vec{u} \rangle = 0$ elde edilir. Böylece, u vektörü $\vec{q}$ ve $\vec{a}$ nın gerdiği düzlemde yatar.

$$\vec{u} = (\cos \theta) \vec{q} + (\sin \theta) \vec{a}. \quad (5.6)$$

Eş. (5.6) nın u ya göre türevi alınırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$0 = (\cos \theta \bar{k}_1 - \sin \theta \bar{k}_2) \vec{h}. \quad (5.7)$$

Böylece, $\tan \theta = \frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_2}$ sabittir.

Tersine, Eş. (5.4), $\hat{\phi}$ regle yüzeyi için sağlansın. O halde, aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$\vec{u} = (\cos \theta) \vec{q} + (\sin \theta) \vec{a}. \quad (5.8)$$

Eş. (5.8) in türevi alınır ve Eş. (5.4) kullanılırsa $\vec{u}' = 0$ elde edilir. Böylelikle, $\vec{u}$ sabit bir vektördür ve $\langle \vec{q}, \vec{u} \rangle = \cos\theta$ sabittir. Sonuç olarak, $\hat{\phi}, \vec{q}$ – slant regle yüzeydir.

5.3. Teorem

$\hat{\phi}, \vec{q}$ – slant regle yüzeydir gerek ve yeter şart $\det(\vec{q}', \vec{q}'', \vec{q}''') = 0$ dır.

İspat

$\hat{\phi}, \mathbb{R}^3$ te bir regle yüzey olsun. Frenet formüllerinden,

$$\vec{q}' = \bar{k}_1 \vec{h},$$

$$\vec{q}'' = -\bar{k}_1^2 \vec{q} + \bar{k}_1' \vec{h} + \bar{k}_1 \bar{k}_2 \vec{a},$$

$$\vec{q}''' = (-3\bar{k}_1 \bar{k}_1') \vec{q} + (\bar{k}_1'' - \bar{k}_1^3 - \bar{k}_1 \bar{k}_2^2) \vec{h} + (2\bar{k}_1' \bar{k}_2 + \bar{k}_2' \bar{k}_1) \vec{a}$$

dır. Böylelikle, determinant yardımıyla aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\det(\vec{q}', \vec{q}'', \vec{q}''') = \bar{k}_1^3 \bar{k}_2^2 \left(\frac{\bar{k}_1'}{\bar{k}_2} \right)'. \quad (5.9)$$

$\hat{\phi}$ bir regle yüzey olsun. Teorem 5.1.2 den, $\frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_2}$ değeri sabittir. Böylelikle, $\det(\vec{q}', \vec{q}'', \vec{q}''')$ değeri sıfıra eşittir.

Tersine, $\det(\vec{q}', \vec{q}'', \vec{q}''') = 0$ olsun. Eş. (5.9) dan $\frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_2}$ sabittir. Böylelikle, $\hat{\phi}, \mathbb{R}^3$ te $\vec{q}$ – slant regle yüzeydir.

5.4. Teorem

$\hat{\phi}, \vec{q}$ – slant regle yüzeydir gerek ve yeter şart $\det(\vec{a}', \vec{a}'', \vec{a}''') = 0$ dır.

İspat

$\hat{\phi}, \vec{q}$ – slant regle yüzey olsun Frenet formüllerinden,

$$\vec{a}' = -\bar{k}_2 \vec{h},$$

$$\vec{a}'' = \bar{k}_1 \bar{k}_2 \vec{q} - \bar{k}_2' \vec{h} - \bar{k}_2^2 \vec{a},$$

$$\vec{a}''' = (\bar{k}_1' \bar{k}_2 + 2\bar{k}_1 \bar{k}_2') \vec{q} + (-\bar{k}_2'' + \bar{k}_2^3 + \bar{k}_1^2 \bar{k}_2) \vec{h} - 3\bar{k}_2 \bar{k}_2' \vec{a}$$

dır. Böylece, determinant yardımıyla aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\det(\vec{a}', \vec{a}'', \vec{a}''') = \bar{k}_2^5 \left(\frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_2} \right)'. \quad (5.10)$$

$\hat{\phi}$, tabii lift eğrisinin striksiyon eğrisi tarafından üretilen regle yüzey olsun. Teorem 5.1.2

den $\frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_2}$ değeri sabittir. Böylece, $\det(\vec{a}', \vec{a}'', \vec{a}''')$ değeri sıfıra eşittir.

Tersine, $\det(\vec{a}', \vec{a}'', \vec{a}''') = 0$ olsun. $\bar{k}_2$ eğriliği sıfırdan farklı olduğundan $\frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_2}$ değeri sabittir.

Böylece, $\hat{\phi}, \vec{q}$ – slant regle yüzeydir.

5.5. Teorem

$\hat{\phi}, \vec{q}$ – slant regle yüzeydir gerek ve yeter şart

$$\vec{q}''' = m\vec{q}' + 3\bar{k}_1\vec{h}' \quad (5.11)$$

dir. Burada,

$$m = \frac{\bar{k}_1''}{\bar{k}_1} - (\bar{k}_1'^2 + \bar{k}_2'^2)$$

dır.

İspat

$\hat{\phi}$, $\vec{q}$ – slant regle yüzey olsun. Frenet formüllerinden,

$$\vec{q}'' = -\bar{k}_1^2 \vec{q} + \bar{k}_1' \vec{h} + \bar{k}_1 \bar{k}_2 \vec{a},$$

$$\vec{q}''' = (-3\bar{k}_1 \bar{k}_1') \vec{q} + (\bar{k}_1'' - \bar{k}_1^3 - \bar{k}_1 \bar{k}_2^2) \vec{h} + (2\bar{k}_1' \bar{k}_2 + \bar{k}_2' \bar{k}_1) \vec{a}$$

yazılır. $\frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_2}$ nin türevi alınırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\bar{k}_1 \bar{k}_2' = \bar{k}_2 \bar{k}_1'. \quad (5.12)$$

$\vec{q}'''$ türevinde Eş. (5.12) yazılırsa,

$$\vec{q}''' = \left(\frac{\bar{k}_1''}{\bar{k}_1} - \bar{k}_1^2 - \bar{k}_2^2 \right) \vec{q}' - (3\bar{k}_1 \bar{k}_1') \vec{q} + (3\bar{k}_2 \bar{k}_1') \vec{a} \quad (5.13)$$

elde edilir. Frenet formülleri kullanılarak Eş. (5.13) ten Eş. (5.11) elde edilir.

Tersine, Eş. (5.11) sağlansın. $\vec{h} = \frac{\vec{q}'}{\bar{k}_1}$ eşitliğinin birinci ve ikinci türevi alınırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$\vec{h}' = -\left(\frac{\bar{k}_1'}{\bar{k}_1^2} \right) \vec{q}' + \left(\frac{1}{\bar{k}_1} \right) \vec{q}'', \quad (5.14)$$

$$\vec{h}'' = -\left(\frac{\bar{k}_1'}{\bar{k}_1^2} \right)' \vec{q}' - 2 \left(\frac{\bar{k}_1'}{\bar{k}_1^2} \right) \vec{q}'' + \left(\frac{1}{\bar{k}_1} \right) \vec{q}'''. \quad (5.15)$$

Eş. (5.15) te Eş. (5.11) yerine konulursa

$$\vec{h}'' = -2 \left(\frac{\bar{k}_1'}{\bar{k}_1^2} \right) \vec{q}'' - \left[\left(\frac{\bar{k}_1'}{\bar{k}_1^2} \right)' + \frac{m}{\bar{k}_1} \right] \vec{q}' + 3 \left(\frac{\bar{k}_1'}{\bar{k}_1} \right) \vec{h}' \quad (5.16)$$

elde edilir. Böylelikle,

$$\vec{h}'' = -\left[\left(\frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_1^2}\right)' + \frac{m}{\bar{k}_1}\right]\vec{q}' - \bar{k}_1'\vec{q} - 2\left(\frac{\bar{k}_1'}{\bar{k}_1}\right)^2\vec{h} + \left(\frac{\bar{k}_2\bar{k}_1'}{\bar{k}_1}\right)\vec{a} \quad (5.17)$$

dir. Diğer yandan, Frenet formüllerinden

$$\vec{h}'' = -\bar{k}_1\vec{q}' - \bar{k}_1'\vec{q} - \bar{k}_2^2\vec{h} + \bar{k}_2'\vec{a} \quad (5.18)$$

yazılır. Eş. (5.18) de Eş. (5.17) yerine konursa aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\frac{\bar{k}_2'}{\bar{k}_2} = \frac{\bar{k}_1'}{\bar{k}_1}. \quad (5.19)$$

Eş. (5.19) un integrali alınırsa $\frac{\bar{k}_2}{\bar{k}_1}$ nin sabit olduğu sonucuna ulaşılır. Teorem 5.1.2 den $\hat{\phi}$,

$\vec{q}$ – slant regle yüzeydir.

5.6. Sonuç

$\hat{\phi}$, $\mathbb{R}^3$ te $\vec{q}$ – slant regle yüzeydir gerek ve yeter şart striksiyon eğrisi $\mathbb{R}^3$ te helistir.

5.2. Birim 2-Kürenin Tanjant Demeti ve $\vec{h}$ – Slant Regle Yüzeyler

Bu bölümde, $\mathbb{R}^3$ te $\vec{h}$ – slant regle yüzeylerle ilgili tanım ve teoremler verilecektir.

5.7. Tanım

$\hat{\Gamma}(u) = (\vec{q}(u), \vec{v}^*(u)), T\bar{M}$ üzerinde tabii lift eğrisinin striksiyon eğrisi olsun. $\mathbb{R}^3$ te $\hat{\Gamma}(u)$ eğrisinin ürettiği regle yüzey $\hat{\phi}(u, v)$ olmak üzere

$$\hat{\phi}(u, v) = \vec{\beta}(u) + v\vec{q}(u) \quad (5.20)$$

olup $\bar{\beta}(u), \hat{\phi}(u, v)$ regle yüzeyinin dayanak eğrisidir. $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}, \bar{k}_1, \bar{k}_2\}$, $\hat{\phi}$ regle yüzeyinin Frenet operatörleri olmak üzere eğer yüzeyin merkez normal vektörü, sabit bir $\vec{u}$ ile sabit açı yapıyorsa; yani

$$\left\langle \vec{h}, \vec{u} \right\rangle = \cos \varphi = \text{sabit} \quad \varphi \neq \frac{\pi}{2}$$

ise $\hat{\phi}$ regle yüzeyine $\vec{h} - \text{slant regle yüzey}$ denir.

5.8. Teorem

$\hat{\phi}, \vec{h} - \text{slant regle yüzeydir}$ gerek ve yeter şart

$$\frac{\bar{k}_1^2}{(\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_2} \right)' \quad (5.21)$$

ifadesi sabittir.

İspat

$\hat{\Gamma}(u) = (\bar{q}(u), \bar{v}^*(u)), T\bar{M}$ üzerinde tabii lift eğrisinin striksiyon eğrisi ve $\hat{\phi}(u, v)$, $\hat{\Gamma}(u)$ eğrisi tarafından üretilen $\vec{h} - \text{slant regle yüzey}$ olsun. Böylelikle, $\left\langle \vec{h}, \vec{u} \right\rangle = \cos \varphi = c$ olup bu iç çarpım sabittir.

$$\vec{u} = b_1(u)\vec{q}(u) + c\vec{h}(u) + b_2(u)\vec{a}(u) \quad (5.22)$$

olsun. $b_1 = b_1(u)$ ve $b_2 = b_2(u)$, u parametresine bağlı düzgün fonksiyonlardır. $\vec{u}$ sabit olduğundan Eş. (5.22) nin türevi alınır

$$b_1' - c\bar{k}_1 = 0,$$

$$b_1\bar{k}_1 - b_2\bar{k}_2 = 0,$$

$$b_2' + c\bar{k}_2 = 0$$

elde edilir. $b_1\bar{k}_1 - b_2\bar{k}_2 = 0$ için

$$b_1 = b_2 \frac{\bar{k}_2}{\bar{k}_1} \quad (5.23)$$

dir. Aynı zamanda

$$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = b_1^2 + c^2 + b_2^2 \quad (5.24)$$

sabittir. Eş. (5.23), Eş. (5.24) te yerine yazılırsa

$$b_2^2 \left(1 + \left(\frac{\bar{k}_2}{\bar{k}_1}\right)^2\right) = n^2 \quad (5.25)$$

eşitliğinin sabit olduğu elde edilir. Bu eşitlikte, $n = 0$ ise $b_2 = 0$ dır ve $b_1 = 0, c = 0$ dır.

Buradan, $\vec{u} = \vec{0}$ elde edilir ki bu da bir çelişkidir. O halde, $n \neq 0$ dır. Eş. (5.25) ten

$$b_2 = \pm \frac{n}{\sqrt{1 + \left(\frac{\bar{k}_2}{\bar{k}_1}\right)^2}} \quad (5.26)$$

elde edilir. $b_2' + c\bar{k}_2 = 0$ olup Eş. (5.26) dan

$$\frac{d}{du} \left[\pm \frac{n}{\sqrt{1 + \left(\frac{\bar{k}_2}{\bar{k}_1}\right)^2}} \right] = -c\bar{k}_2. \quad (5.27)$$

O halde,

$$\frac{\bar{k}_1^2}{(\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{c}{n} = l \quad (5.28)$$

sabittir. Böylelikle, istenen sonuç elde edilir.

Tersine, Eş. (5.21) sabit olsun. Yani;

$$\frac{\bar{k}_1^2}{(\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{c}{n} = l = \text{sabit.} \quad (5.29)$$

O halde, aşağıdaki eşitliği tanımlayabiliriz:

$$\vec{u} = \frac{\bar{k}_2}{\sqrt{\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2}} \vec{q} + l \vec{h} + \frac{\bar{k}_1}{\sqrt{\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2}} \vec{a}. \quad (5.30)$$

Eş. (5.30) un u ya göre türevi alınır ve Eş. (5.21) kullanılırsa $\vec{u} = 0$ dır. Yani; $\vec{u}$ sabit vektördür. Diğer yandan, $\langle \vec{h}, \vec{u} \rangle$ iç çarpımı sabittir. Böylelikle, $\hat{\phi}, \vec{h}$ – slant regle yüzeydir.

5.9. Teorem

$\hat{\phi}, \bar{k}_1 = 1$ olan $\mathbb{R}^3$ te slant regle yüzey olsun. İkinci eğrilik fonksiyonu için aşağıdaki eşitlik vardır:

$$\bar{k}_2(u) = \pm \frac{u}{\sqrt{\tan^2 \varphi - u^2}}. \quad (5.31)$$

İspat

$\hat{\phi}, \bar{k}_1 = 1$ olan $\mathbb{R}^3$ te slant regle yüzey olsun. Böylece

$$\langle \vec{h}, \vec{u} \rangle = \cos \varphi = \text{sabit} \quad (5.32)$$

tir. Eş. (5.32) nin u ya göre türevi alınır

$$\langle -\vec{q} + k_2 \vec{a}, \vec{u} \rangle = 0 \quad (5.33)$$

elde edilir ve Eş. (5.33) ten aşağıdaki eşitlik yazılır:

$$\langle \vec{q}, \vec{u} \rangle = \bar{k}_2 \langle \vec{a}, \vec{u} \rangle. \quad (5.34)$$

$\langle \vec{a}, \vec{u} \rangle = x$ alınırsa aşağıdaki eşitlik yazılır:

$$\vec{u} = \bar{k}_2 x \vec{q} + \cos \varphi \vec{h} + x \vec{a}. \quad (5.35)$$

$\vec{u}$ birim olup Eş. (5.35) ten

$$x = \pm \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 + \bar{k}_2^2}}. \quad (5.36)$$

O halde $\vec{u}$ aşağıdaki gibi verilir:

$$\vec{u} = \pm \frac{\bar{k}_2 \sin \varphi}{\sqrt{1 + \bar{k}_2^2}} + \cos \varphi \vec{h} \pm \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 + \bar{k}_2^2}} \vec{a}. \quad (5.37)$$

Eş. (5.33) ün u ya göre türevi alınırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\left\langle -(1 + \bar{k}_2^2) \vec{h} + \bar{k}_2' \vec{a}, \vec{u} \right\rangle = 0 \quad (5.38)$$

elde edilir. Eş. (5.32), Eş. (5.38) de yerine konulursa ve x yerine değeri yazılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$x = \frac{(1 + \bar{k}_2^2) \cos \varphi}{\bar{k}_2}. \quad (5.39)$$

Eş. (5.36) ve Eş. (5.39) dan aşağıdaki diferansiyel denklem yazılır:

$$\pm \tan \varphi \frac{\bar{k}_2'}{(1 + \bar{k}_2^2)^{\frac{3}{2}}} + 1 = 0. \quad (5.40)$$

Eş. (5.40) ın integrali alınırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\pm \tan \varphi \frac{\bar{k}_2}{\sqrt{1 + \bar{k}_2^2}} + u + c = 0. \quad (5.41)$$

$u \rightarrow u - c$ yazılıp Eş. (5.41) aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\pm \tan \varphi \frac{\bar{k}_2}{\sqrt{1+\bar{k}_2^2}} = -u. \quad (5.42)$$

Bu eşitlik, $\bar{k}_2(u) = \pm \frac{u}{\sqrt{\tan^2 \varphi - u^2}}$ sonucunu verir.

Tersine, $\bar{k}_2(u) = \pm \frac{u}{\sqrt{\tan^2 \varphi - u^2}}$ olsun. x eşitliği aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{aligned} x &= \pm \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1+\bar{k}_2^2}} = \pm \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1+\frac{u^2}{\tan^2 \varphi - u^2}}} \\ &= \pm \cos \varphi \sqrt{\tan^2 \varphi - u^2}. \end{aligned} \quad (5.43)$$

$\bar{k}_2$ pozitif (negatif) işaretli olduğu zaman x pozitif (negatif) işaret alır ve φ sabittir. Böylece, $\bar{k}_2 x = -\cos \varphi$

dir. $\vec{u}$ aşağıdaki gibi düşünülürse Eş. (5.44) yazılabilir:

$$\vec{u} = \cos \varphi \left(u \vec{q} + \vec{h} \pm (\tan^2 \varphi - u^2) \vec{a} \right). \quad (5.44)$$

$\vec{u}$ nun sabit olduğu ve $\vec{h}$ ile sabit bir φ açısı yaptığı ispatlanacaktır. Eş. (5.44) ün türevi alınır ve Frenet formülleri kullanılırsa $\vec{u}' = 0$ elde edilir. Yani; $\vec{u}$ nun yönü sabittir ve $\langle \vec{h}, \vec{u} \rangle = \cos \varphi$ sabittir. Böylelikle, $\hat{\phi}$, $\mathbb{R}^3$ te $\vec{h}$ – slant regle yüzeydir.

Diğer yandan, $\bar{\beta}$ striksiyon eğrisi $\hat{\phi}$ de jeodezik ise $\bar{\beta}$ nin aslinormal vektörü $\vec{n}$ ve merkez normal vektörü $\vec{h}$ çıkarılır. O halde, aşağıdaki sonuç verilebilir:

5.10. Sonuç

$\bar{\beta}$ striksiyon eğrisi $\hat{\phi}$ de jeodezik olsun. O halde; $\hat{\phi}, \vec{h}$ – slant regle yüzeydir gerek ve yeter şart striksiyon çizgisi $\mathbb{R}^3$ te slant helistir.

$\hat{\phi}$ regle yüzeyi açılabilir ise $\bar{\beta}$ nin Frenet çatısı $\{\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}\}$ ve regle yüzeyin Frenet çatısı $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ ile çakışır. O halde aşağıdaki sonuç verilebilir:

5.11. Sonuç

$\hat{\phi}$ regle yüzeyi açılabilir olsun. $\hat{\phi}, \vec{h} -$ slant regle yüzeydir gerek ve yeter şart striksiyon eğrisi $\mathbb{R}^3$ te slant helistir.

5.3. Birim 2-Kürenin Tanjant Demeti ve $\vec{a} -$ Slant Regle Yüzeyler

Bu bölümde, $\mathbb{R}^3$ te $\vec{a} -$ slant regle yüzeylerle ilgili tanım ve teoremler verilecektir.

5.12. Tanım

$\hat{\Gamma}(u) = (\bar{q}(u), \bar{\vartheta}^*(u)), T\bar{M}$ üzerinde tabii lift eğrisinin striksiyon eğrisi olsun. $\mathbb{R}^3$ te $\hat{\Gamma}(u)$ eğrisinin ürettiği regle yüzey $\hat{\phi}(u, v)$ olsun.

$$\hat{\phi}(u, v) = \bar{\beta}(u) + v\vec{q}(u) \quad (5.45)$$

olup $\bar{\beta}(u), \hat{\phi}(u, v)$ regle yüzeyinin dayanak eğrisidir. $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}, \bar{k}_1, \bar{k}_2\}$, $\hat{\phi}$ regle yüzeyinin Frenet operatörleri olmak üzere eğer yüzeyin merkez tanjant vektörü, sabit bir $\vec{u}$ ile sabit açı yapıyorsa; yani,

$$\langle \vec{a}, \vec{u} \rangle = \cos \mu = \text{sabit} \quad \mu \neq \frac{\pi}{2}$$

ise $\hat{\phi}$ regle yüzeyine $\vec{a} -$ slant regle yüzey denir. Eş. (5.6) dan $\hat{\phi}, \vec{a} -$ slant regle yüzeydir gerek ve yeter şart aynı regle yüzey $\vec{q} -$ slant regle yüzeydir. Bu yüzden, $\vec{q} -$ slant regle yüzeylerle ilgili verilen tüm teoremler $\vec{a} -$ slant regle yüzeyler için de geçerlidir.

Örnek

$\hat{\phi}(u, v)$, $\mathbb{R}^3$ te aşağıdaki eşitlikteki gibi verilen slant regle yüzey olsun.

$$\hat{\phi}(u, v) = (\cos(u + 1), v \cos u, v \sin u).$$

Yüzeyin dayanak eğrisi

$$\bar{\beta}(u) = (\cos(u + 1), 0, 0)$$

dir. Burada,

$$\vec{q}(u) = (0, \cos u, \sin u)$$

dur ve striksiyon eğrisinin yay parametresi $\vec{u} = \arccos(-s - \cos 1) - 1$ dir.

$$\bar{\beta}(u) = \vec{q}(u) \times \vec{\vartheta}^*(u) \text{ olduğundan}$$

$$\vec{\vartheta}^*(u) = (0, -\frac{1}{2} \tan u (\cos(2u + 1) + \cos 1), \frac{1}{2} (\cos(2u + 1) + \cos 1)). \vec{\vartheta}^*(u) = \left(0, -\frac{1}{2} \tan u (\cos(2u + 1) + \cos 1), \frac{1}{2} (\cos(2u + 1) + \cos 1)\right).$$

$\langle \vec{q}(u), \vec{\vartheta}^*(u) \rangle = 0$ ve $|\vec{q}(u)| = 1$ olduğundan $\hat{\Gamma}(u) = (\vec{q}(u), \vec{\vartheta}^*(u))$, $T\bar{M}$ üzerindedir. Böylelikle striksiyon eğrisi ve $\hat{\phi}(u, v)$ nin Frenet vektörleri aşağıda verilmiştir:

$$\bar{\beta}(s) = (-s - \cos 1, 0, 0),$$

$$\vec{q}(s) = (0, \cos(\arccos(-s - \cos 1) - 1), \sin(\arccos(-s - \cos 1) - 1)),$$

$$\vec{h}(s) = (0, -\sin(\arccos(-s - \cos 1) - 1), \cos(\arccos(-s - \cos 1) - 1)),$$

$$\vec{a}(s) = (1, 0, 0).$$

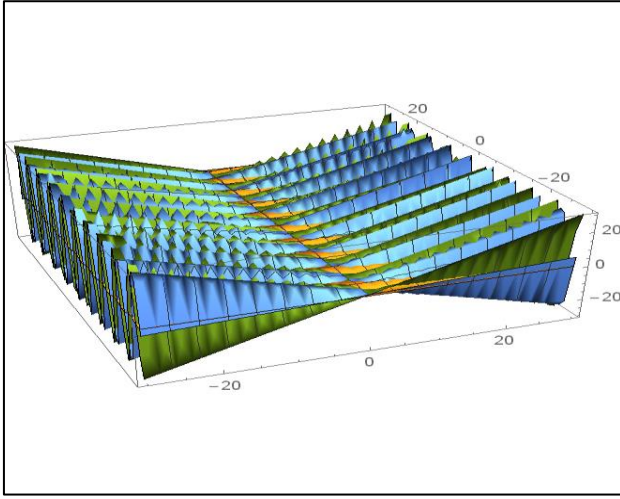
Frenet vektörlerinin türevleri alınırsa;

$$\frac{d\vec{q}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1-(s+\cos 1)^2}} (0, -\sin(\arccos(-s-\cos 1)-1), \cos(\arccos(-s-\cos 1)-1)),$$

$$\frac{d\vec{h}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1-(s+\cos 1)^2}} (0, -\cos(\arccos(-s-\cos 1)-1), -\sin(\arccos(-s-\cos 1)-1)),$$

$$\frac{d\vec{a}}{ds} = (1, 0, 0)$$

elde edilir. Burada; $\bar{k}_1 = \frac{1}{\sqrt{1-(s+\cos 1)^2}}$ ve $\bar{k}_2 = 0$, sırasıyla, $\hat{\phi}$ nin eğrilik ve burulmasıdır.



Şekil 5.1. $\hat{\Gamma}(u)$ striksiyon eğrisi tarafından üretilen $\hat{\phi}(u, v)$ slant regle yüzey

6. DARBOUX SLANT REGLE YÜZEYLER VE BİRİM 2-KÜRENİN TANJANT DEMETİ

Bu bölümde, birim dual küre DS^2 ve birim 2- kürenin alt cümlesi $T\bar{M}$ arasındaki izomorfizm ve E. Study dönüşümü yardımıyla $\mathbb{R}^3$ te tabii lift eğrisinin striksiyon eğrisinin ürettiği Darboux slant regle yüzeyler tanımlanmıştır. Daha sonra, bu slant regle yüzeyle ilgili bazı teoremler verilmiştir.

6.1. Tanım

$\mathbb{R}^3$ te $\bar{\Phi}(u, v) = \bar{\vec{q}}(u) \times \bar{\vec{g}}(u) + v\bar{\vec{q}}(u)$ eşitliğiyle verilen regle yüzey aşağıdaki 3 şartı sağlarsa elde edilen $\hat{\phi}(u, v)$ regle yüzeyine *Darboux slant regle yüzey* denir:

i) $\bar{\Phi}(u, v)$ regle yüzeyinin dayanak eğrisi

$$\bar{\beta}(u) = (\bar{\vec{q}}(u) \times \bar{\vec{g}}^*(u)) - \frac{\langle \bar{\beta}'(u), \bar{\vec{q}}'(u) \rangle}{\langle \bar{\vec{q}}'(u), \bar{\vec{q}}'(u) \rangle} \bar{\vec{q}}(u), \bar{\vec{g}}^* \subseteq \bar{\vec{g}}$$

şeklindedir.

ii) $\langle \bar{\vec{q}}(u), \bar{\vec{g}}^*(u) \rangle = 0$ ve $|\bar{\vec{q}}(u)| = 1$ olmalıdır.

iii) $\bar{\vec{W}}$ vektörü sıfırdan farklı sabit bir vektörle sabit bir açı yapmalıdır.

6.2. Teorem

$\hat{\phi}$, $\mathbb{R}^3$ te Darboux slant regle yüzey ise $\hat{\phi}$ nın $\bar{\kappa}$ kanonik eğriliği sabittir.

İspat

$\hat{\phi}$, $\mathbb{R}^3$ te Darboux slant regle yüzey olsun. Sıfırdan farklı $\vec{u}$ için

$$\langle \vec{W}, \vec{u} \rangle = \text{sabit.} \quad (6.1)$$

Eş. (6.1) in türevi alınır, iki olasılık ortaya çıkar:

$$\bar{\kappa} = 0,$$

$$\langle \vec{q}, \vec{u} \rangle = 0.$$

$\langle \vec{q}, \vec{u} \rangle = 0$ ise $\vec{u}, \vec{q}$ ya diktir ve aşağıdaki eşitlik yazılır:

$$\vec{u} = a_1 \vec{h} + a_2 \vec{a}. \quad (6.2)$$

Burada, a_1 ve a_2 düzgün fonksiyonlardır. Eş. (6.2) nin türevi alınır ve Frenet vektörleri kullanılırsa;

$$-a_1 \vec{q} + (a_1' - \bar{\kappa} a_2) \vec{h} + (a_2' + \bar{\kappa} a_1) \vec{a} \quad (6.3)$$

dır. $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ lineer bağımsız olduğundan Eş. (6.3) ten aşağıdaki eşitlikler yazılır:

$$a_1 = 0,$$

$$a_1' - \bar{\kappa} a_2 = 0,$$

$$a_2' + \bar{\kappa} a_1 = 0.$$

Yukarıdaki eşitliklerden, $a_1 = a_2 = 0$ elde edilir ki $\vec{u} = 0$ sonucunu verir. Bu bir çelişkidir.

O halde, $\langle \vec{q}, \vec{u} \rangle \neq 0$ dır. Böylelikle, $\bar{\kappa}$ sabittir.

6.3. Teorem

$\hat{\phi}, \mathbb{R}^3$ te Darboux slant regle yüzey ise $\det(\vec{W}, \vec{W}', \vec{W}'') = 0$ dır.

İspat

$\hat{\phi}, \mathbb{R}^3$ te Darboux slant regle yüzey olsun. Darboux vektörü ve türevlerinden aşağıdaki eşitlikler yazılır:

$$\begin{aligned}\vec{W} &= \bar{\kappa} \vec{q} + \vec{a}, \\ \vec{W}' &= \bar{\kappa}' \vec{q}, \\ \vec{W}'' &= \bar{\kappa}'' \vec{q} + \bar{\kappa}' \vec{h}.\end{aligned}$$

Buradan,

$$\det(\vec{W}, \vec{W}', \vec{W}'') = (\bar{\kappa}')^2 \quad (6.4)$$

elde edilir. $\hat{\phi}, \mathbb{R}^3$ te Darboux slant regle yüzey olduğundan Teorem 6.2 den $\bar{\kappa}$ sabittir. O halde, $\det(\vec{W}, \vec{W}', \vec{W}'') = 0$ dır.

6.4. Lemma

$\hat{\phi}, \bar{h}$ – slant regle yüzeydir gerek ve yeter şart $\frac{\bar{\kappa}'}{(1 + \bar{\kappa}^2)^{\frac{3}{2}}}$ sabittir.

6.5. Teorem

Her $\bar{h}$ – slant regle yüzey Darboux slant regle yüzeydir.

İspat

$\hat{\phi}, \mathbb{R}^3$ te $\bar{h}$ – slant regle yüzey olsun. O halde, aşağıdaki eşitlik yazılır:

$$\langle \vec{h}, \vec{u} \rangle = \cos \theta = \text{sabit}. \quad (6.5)$$

θ açısı $\vec{h}$ ve $\vec{u}$ arasında sabit açıdır. Lemma 6.1 den aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$\vec{u} = \frac{\kappa}{\sqrt{1+\kappa^2}} \vec{q} + \cos\theta \vec{h} + \frac{1}{\sqrt{1+\kappa^2}} \vec{a}. \quad (6.6)$$

Eş. (6.6) ve $\vec{W} = \kappa \vec{q} + \vec{a}$ dan,

$$\vec{u} = \frac{\vec{q}}{|\vec{q}|} + \cos\theta \vec{h}. \quad (6.7)$$

O halde, $|\vec{u}| = \sqrt{1 + \cos^2\theta}$ sabittir ve Eş. (6.7) den aşağıdaki eşitlik yazılır:

$$\langle \vec{W}, \vec{u} \rangle = |\vec{W}| + \cos\theta \langle \vec{W}, \vec{h} \rangle. \quad (6.8)$$

$\langle \vec{W}, \vec{u} \rangle = |\vec{W}| |\vec{u}| \cos\lambda$ olup $\cos\lambda$ açısı $\vec{W}$ ile $\vec{u}$ arasındaki açıdır. Eş. (6.8) den,

$$|\vec{u}| \cos\lambda = 1. \quad (6.9)$$

Buradan,

$$\cos\lambda = \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2\theta}} = \text{sabit} \quad (6.10)$$

bulunur. Böylece $\langle \vec{W}, \vec{u} \rangle$ sabittir. $\hat{\phi}, \mathbb{R}^3$ te Darboux slant regle yüzeydir.

6.6. Teorem

$\hat{\phi}, \mathbb{R}^3$ te Darboux slant regle yüzey olsun. $\hat{\phi}, \vec{h} -$ slant regle yüzey ise aynı zamanda $\vec{q} -$ (veya $\vec{a} -$) slant regle yüzeydir.

İspat

$\hat{\phi},$ Darboux slant regle yüzey olduğundan κ sabittir. $\hat{\phi}, \vec{h} -$ slant regle yüzey ise

$$\vec{u} = \frac{\kappa}{\sqrt{1+\kappa^2}} \vec{q} + d\vec{h} + \frac{1}{\sqrt{1+\kappa^2}} \vec{a}. \quad (6.11)$$

κ sabit olduğundan son eşitlikten $\langle \vec{q}, \vec{u} \rangle$ (veya $\langle \vec{a}, \vec{u} \rangle$) sabittir. O halde; $\hat{\phi}, \vec{q} - (veya \vec{a} -)$ slant regle yüzeydir.

Teoremin tersi daima doğru değildir. Aşağıdaki teorem, Teorem 6.6'nın özel halidir.

6.7. Teorem

$\hat{\phi}$, Darboux slant regle yüzey olsun. $\hat{\phi}, \vec{h} -$ slant regle yüzeydir gerek ve yeter şart λ sabit olmak üzere $\langle \vec{a}, \vec{u} \rangle = \cos \lambda = \frac{\cos \varphi}{1+\kappa^2}$ ve $\cos \varphi = \langle \vec{W}, \vec{u} \rangle$ şartlarını sağlayan $\vec{a} -$ slant regle yüzeydir.

İspat

$\hat{\phi}$, Darboux slant regle yüzey olduğundan,

$$\langle \vec{W}, \vec{u} \rangle = \cos \varphi = \text{sabit} \quad (6.12)$$

tir. $\vec{u}$ için aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$\vec{u} = a_1 \vec{q} + a_2 \vec{h} + a_3 \vec{a} \quad (6.13)$$

dır. Burada, $a_i = a_i(s_i) (1 \leq i \leq 3)$ düzgün fonksiyonlardır. Eş. (6.13)'ün türevi alınır,

$$(a'_1 - a_2) \vec{q} + (a_1 + a'_2 - a_3 \bar{\kappa}) \vec{h} + (a_2 \bar{\kappa} + a'_3) \vec{a} = 0 \quad (6.14)$$

elde edilir. $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ lineer bağımsız olduğundan aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

$$a'_1 - a_2 = 0,$$

$$a_1 + a'_2 - \bar{\kappa} a_3 = 0,$$

$$a'_2 \bar{\kappa} + a'_3 = 0.$$

Eş. (6.14), Eş. (6.13) te yazılırsa,

$$\bar{\kappa} a_1 + a_3 = \cos \varphi \quad (6.15)$$

elde edilir. Eş. (6.15) ten,

$$a'_2 = \frac{(1+\bar{\kappa}^2)a_3 - \cos \varphi}{\bar{\kappa}}. \quad (6.16)$$

$\hat{\phi}$, Darboux slant regle yüzey olduğundan $\bar{\kappa}$ sabittir. Eş. (6.16) dan a_2 sabitir gerek ve yeter şart $a_3 = \frac{\cos \varphi}{1+\bar{\kappa}^2}$ şartını sağlayan a_3 sabittir. Yani; $\hat{\phi}, \bar{h}$ – slant regle yüzeydir gerek ve yeter şart λ sabit olmak üzere $\langle \vec{a}, \vec{u} \rangle = \cos \lambda = \frac{\cos \varphi}{1+\kappa^2}$ ve $\cos \varphi = \langle \vec{W}, \vec{u} \rangle$ şartlarını sağlayan $\bar{a}$ – slant regle yüzeydir.

Örnek

Örnek 5.1. yeniden ele alınırsa alınan slant regle yüzey için

$$\vec{h}' = -\vec{q} + \bar{\kappa} \vec{a},$$

$$(0, -\cos \vec{u}, -\sin \vec{u}) = (0, -\cos \vec{u}, -\sin \vec{u}) + \bar{\kappa}(1, 0, 0)$$

ve $\vec{u} = \arccos(-s - \cos 1) - 1$ olup yukarıdaki eşitlikten $\bar{\kappa}$ kanonik eğriliği sıfıra eşittir. O halde, yüzeyin Darboux vektörü $\vec{W}$ aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\vec{W} = (1, 0, 0).$$

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, ilk olarak, birim 2-kürenin tanjant demetinin bir alt cümlesi ile birim dual küre arasındaki izomorfizmden yararlanarak, birim 2-kürenin alt cümlesinde alınan tabii lift eğrisinin $\mathbb{R}^3$ te oluşturduğu regle yüzeyle ilgili bazı karakterizasyonlar verilmiştir. Daha sonra, Pseudo-kürelerin tanjant demetlerinin alt cümleleri ile Lorentz küre, hiperbolik küre arasındaki izomorfizmlerden yararlanarak, Pseudo-kürelerin tanjant demetlerinin alt cümlelerinde alınan tabii lift eğrisinin $\mathbb{R}_1^3$ te oluşturduğu regle yüzeyle ilgili önemli sonuçlar elde edilmiştir.

Çalışmanın devamında, birim 2-kürenin tanjant demetinin alt cümlesi ve birim dual küre arasındaki izomorfizmden yararlanılarak slant regle yüzey ve Darboux slant regle yüzey tanımları verilmiştir. Birim 2- kürenin tanjant demetinde alınan tabii lift eğrisinin striksiyon eğrisinin $\mathbb{R}^3$ te ürettiği slant regle yüzeylerle ilgili temel teoremler verilmiş ve elde edilen sonuçlar örnekle irdelenmiştir.

Tezde elde edilen sonuçlar, birim 2-kürenin ve pseudo-kürelerin tanjant demetleri üzerine çalışacak akademisyenler için kaynak niteliğindedir.

Slant regle yüzeylerle ilgili verilen tanım ve teoremler, pseudo-küreler aracılığıyla Minkowski uzayına taşınabilir.

KAYNAKLAR

1. Hacısalihoğlu, H. H. (2000). *Diferensiyel Geometri*. Ankara: Erten Matbaası, 139-155.
2. Fenchel, W. (1951). On the differential geometry of closed space curves. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 57, 44-54.
3. O'Neill, B. (1983). *Semi-Riemannian Geometry*. New York: Academic Press.
4. Sabuncuoğlu, A. (2004). *Diferansiyel Geometri*. Ankara: Nobel Yayın Dağıtım, 114-140.
5. Fischer, I. S. (1999). *Dual-Number Methods in Kinematics and Dynamics*. New York: CRC Press, Boca Raton, London, , Washington DC.
6. Thorpe, J. A. (1979). *Elementary Topics in Differential Geometry*. Springer-Verlag, New York: Heidelberg-Berlin, 254.
7. Ergün, E., Bilici, M. and Çalışkan, M. (2012). The Frenet vector fields and the curvatures of the natural lift curve. *The Bulletin of Society for Mathematical Services and Standarts*, 2, 38-43.
8. Ergün, E. and Çalışkan, M. (2012). On natural lift curve. *Pure Mathematical Sciences*, 2, 81-85.
9. Çalışkan, M. and Karaca, E. (2019) Dual spherical curves of natural lift curve and tangent bundle of unit 2-sphere. *Journal of Science and Arts*. 3, 561-574.
10. Akutagawa, K. and Nishikawa, S. (1990). The Gauss map and spacelike surface with pres cribed mean curvature in Minkowski 3-Space. *Tohoku Mathematical Journal*, 42, 67-82.
11. Carmo, M. (1976). *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. New Jersey, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs.
12. Izumiya, S. and Takeuchi, N. (2004). New special curves and developable surfaces. *Turkish Journal of Mathematics*, 28, 153-163.
13. Uğurlu, H. H. and Çalışkan, A. (1996). The Study mapping for directed spacelike and timelike lines in Minkowski space $\mathbb{R}_1^3$. *Mathematical and Computational Applications*, 1(2), 142-148.
14. Yaylı, Y. and Saraçoğlu, S. (2012). Different approaches to ruled surfaces. *SDU Journal of Science (E-Journal)*, 7, 56-68.
15. Şentürk, G.Y. and Yüce, S. (2015). Characteristic properties of the ruled surface with Darboux frame in $\mathbb{R}^3$. *Kuwait Journal of Science*, 2, 14-33.

16. Orbay, K. and Aydemir, İ. (2010). The ruled surfaces generated by Frenet vectors of a curve in $\mathbb{R}_1^3$. *Cbu Journal of Science*, 6, 155-160.
17. Izumiya, S. and Takeuchi, N. (2003). Special curves and ruled surfaces. *Contributions to Algebra and Geometry*, 44, 203-212.
18. Şenyurt, S. and Çalışkan, A. (2018). The quaternionic expression of ruled surfaces. *Filomat*, 32, 5753-5766.
19. Hacısalihoğlu, H. H. (1972). On the pitch of a closed ruled surface. *Mechanism and Machine Theory*, 7, 291-305.
20. Masal, M. and Azak A. Z. (2015). The ruled surfaces according to type-2 Bishop frame in the Euclidean 3-space E^3 . *Mathematical Sciences and Applications E-Notes*, 3, 74-83.
21. Sarioğlu, A. and Tutar, A. (2007). On ruled surfaces in Euclidean space E^3 . *International Journal of Contemporary Mathematical*, 2, 1-11.
22. Önder, M. and Uğurlu, H.H. (2013). Frenet frames and invariants of timelike ruled surfaces. *Engineering Physics and Mathematics*, 4, 507-513.
23. Karacan, M. K., Yüksel, N. and İkiz, H. (2017). On ruled surface in 3-dimensional almost contact metric manifold. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 5, 1-8.
24. Önder, M. and Ekinci, Z. (2015). On the kinematic interpretation of timelike ruled surfaces. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 12(10), 1-14.
25. Ekmekci, N. (1991). *Lorentz Manifoldları Üzerinde Eğilim Çizgileri*. Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
26. Lin, Y. and Pisano, A. P. (1988). The differential geometry of the general helix as applied to mechanical springs. *The Journal of Applied Mechanics*, 55, 831-836.
27. Şenol, A., Ziplar, E., Yaylı, Y. and Gök, İ. (2013). A new approach on helices in Euclidean n-space. *Mathematical Communications*, 18, 241-256.
28. Ekmekci, N., Okuyucu, O. Z., Yaylı, Y. (2014). Characterizations of spherical helices in Euclidean 3-space. *Analele Universitatii "Ovidius" Constanta - Seria Matematica*, 22, 99-108.
29. Kaya, S. and Yaylı, Y. (2017). Generalized helices and singular points. *Caspian Journal of Mathematical Sciences*, 6, 121-132.
30. Kahveci, D. and Yaylı, Y. (2019). Persistent rigid-body motions on slant helices. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 16(12), 1-15.
31. Liu, T. and Pei, D. (2019). Null helices and Cartan slant helices in Lorentz-Minkowski space. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 16(11), 1-16.

32. Kula, L. and Yaylı, Y. (2005). On slant helix and its spherical indicatrix. *Applied Mathematics and Computation*, 169, 600-607.
33. Kula, L., Ekmekci, N., Yaylı, Y. and İlarslan, K. (2010). Characterizations of slant helices in Euclidean 3-space. *Turkish Journal of Mathematics*, 34, 261-273.
34. Ali, A. T. and Lopez, R. (2008). On slant helices in Minkowski space IE_1^3 . arXiv: 0810.1464v1.
35. Clifford, W. K. (1873). *Preliminary Sketch of Biquaternions*. Springer-Verlag, *The Proceedings of the London Mathematical Society*, 4, 381-395.
36. Study, E. (1901). *Geometry Der Dynamen*, Leipzig.
37. Karger, A. and Novak, J. (1978). *Space Kinematics and Lie Groups*. Prague: Czechoslovakia STNL Publishers of Technical Lit.
38. Hacısalıhoğlu, H. H. (1983). *Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi*. Ankara: Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, 1-45.
39. Kazaz, M., Özdemir, A. and Uğurlu, H. H. (2009). Elliptic motion on dual hyperbolic unit sphere IH_0^2 . *Mechanism and Machine Theory*, 44, 1450-1459.
40. Yaylı, Y., Çalışkan, A. and Uğurlu, H. H. (2002). The E. Study maps of circle on dual hyperbolic and Lorentzian unit spheres IH_0^2 and S_1^2 . *Mathematical Proceedings of the Royal Irish Academy*, 102A (1), 37-47.
41. Karakaş, B. and Gündoğan, H. (2003). A relation among DS^2, TS^2 and non-cylindrical ruled surfaces. *Mathematical Communications*, 8, 9-14.
42. Hathout, F., Bekar, M. and Yaylı, Y. (2017). Ruled surfaces and tangent bundle of unit 2-sphere. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 14(10), 1-14.
43. Bekar, M., Hathout, F. and Yaylı, Y. (2018). Tangent bundle of pseudo-sphere and ruled surfaces in Minkowski 3-space. *General Letters in Mathematics*, 5(2), 58-70.
44. Önder, M. (2013). *Slant ruled surfaces in Euclidean 3-Space*. arXiv: 1311.0627v1 [math. DG].
45. Önder, M. and Kaya, O. (2015). Darboux slant ruled surfaces. *Azerbaijan Journal of Mathematics*, 5(1), 64-72.

|

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : Karaca, Emel
 Uyruğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 12.10.1989, Muğla
 Telefon : 0 (506) 411 64 95
 e-mail : emel.karaca@hbv.edu.tr



Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Doktora	Gazi Üniversitesi / Matematik Ana Bilim Dalı	Devam ediyor
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi / Matematik Ana Bilim Dalı	2015
Lisans	Gazi Üniversitesi / Matematik Ana Bilim Dalı	2011
Lise	Muğla Turgut Reis Lisesi	2007

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2018-Halen	Ankara Hacı Bayram Veli Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

1. Karaca, E. and Çalışkan, M. (2014). Some characterizations for geodesic sprays in dual space. *International Journal of Engineering and Applied sciences*, 4(10), 59-63.
2. Karaca, E., Çalışkan, M. and Aydın, S. (2014). Some characterizations for the existence of curves in dual Space ID^4 . *International Journal of Engineering and Applied sciences*, 5(1), 17-19.
3. Paşalı Atmaca, S. and Karaca, E. (2017). Semi q-discrete surface of revolution. *Muğla Journal of Science and Tecnology*, 3(1), 1-3.

4. Çalışkan, M. and Karaca, E. (2019). Dual spherical curves of natural lift curve and tangent bundles of unit 2-sphere. *Journal of Science&Arts*, 3(48), 561-574.
5. Özyurt, L., Çalışkan, M. and Karaca, E. (2019). On ruled surfaces with striction scroll in dual space”, *Journal of Science&Arts*, 4(49), 869-876.
6. Karaca, E. and Çalışkan, M. (2020). Ruled surfaces and tangent bundle of unit 2-sphere of natural lift curves. *Gazi Journal of Science*, 3(33), 751-759.
7. Karaca, E. and Çalışkan, M. (2020). Ruled surfaces and tangent bundle of pseudo-sphere of natural lift curves. *Journal of Science&Arts*, 3(52), 573-586.
8. Karaca, E., Yılmaz, F., Çalışkan, M., (2020) Some characterizations for split Quaternions, *International Conference of Mathematics and Its Applications and Engineering (ICMASE-2020)*, Proceeding Book, 61-65.
9. Karaca, E., Çalışkan, M., (2020) A new approach for natural lift curves and tangent bundle of unit 2-sphere, *International Conference of Mathematics and Its Applications and Engineering (ICMASE-2020)*, Proceeding Book, 66-72.

Uluslararası Bildiriler

1. Atmaca Paşalı, S., Balcı, M. A., Karaca, E. and Akgüller, Ö. (2016). *Adomian decomposition method for the computing geodesic curves*. The 1st International Symposium on Computational Mathematics&Engineering Sciences (CMES2016), Errachidia, Morocco,71.
2. Çalışkan, M. and Karaca, E. (2016). *Geodesic sprays and their applications in dual space*. 14th Geometry Symposium, Denizli, Turkey.
3. Paşalı Atmaca, S., Akgüller, Ö. and Karaca, E. (2016). *Dynamic semi-discrete surfaces of revolution*. International Conference on Analysis and Its Applications (ICAA-2016), Kırşehir, Turkey.
4. Akgüller, Ö., Paşalı Atmaca, S. and Karaca, E. (2016). *Dynamic operators for surfaces on time scales*. International Conference on Applied Mathematics and Analysis in Memory of Prof. Gusein Sh. Guseinov, Ankara, Turkey.
5. Paşalı Atmaca, S., Balcı, M. A., Akgüller, Ö. and Karaca, E. (2016). *On series solutions of curves by using Gaussian curvature*. International Conference on Mathematics and Mathematics Education.
6. Paşalı Atmaca, S. and Karaca, E. (2017). *Some characterizations of semi q-discrete surfaces of revolution*. 15th Geometry Symposium, Amasya, Turkey.
7. Paşalı Atmaca, S., Ozsoy N. and Karaca, E. (2017). *On semi q- discrete surface of revolution*. Ukranian Conference on Applied Mathematics, Lviv, Ukraine.

8. Karaca, E. and Çalışkan, M. (2018). *Ruled surface pair generated by the curve and its natural lift in dual space*. 16th Geometry Symposium, Manisa, Turkey.
9. Karaca, E. and Çalışkan, M. (2018). *Some characterizations for the natural lift curve in dual space*, 7 th International Eurasian Conference On Mathematical Sciences and Applications, Kyiv, Ukraine.
10. Çalışkan, M., Atmaca Paşalı, S. and Karaca, E. (2018). *Some characterizations for the natural lift curve in dual Lorentzian space*. 7 th International Eurasian Conference On Mathematical Sciences and Applications, Kyiv, Ukraine.
11. Karaca, E. and Çalışkan, M. (2019). *New results of a curve and its natural lift in dual space*. International Conference On Applied Analysis And Mathematical Modelling (ICAAMM 2019), İstanbul, Turkey.
12. Karaca, E., Çalışkan, M. (2020). *A new approach for natural lift curves and tangent bundle of unit 2-sphere*. International Conference On Mathematics and Its Applications In Science and Engineering, (ICMASE 2020), Ankara, Turkey.
13. Karaca, E., Yılmaz, F., Çalışkan, M. (2020). *Some characterizations for split quaternions*. International Conference On Mathematics and Its Applications In Science and Engineering, (ICMASE 2020), Ankara, Turkey.

Hobiler

Gitar, Çello, Resim



GAZİ GELECEKTİR..