



**İKİ DEĞİŞKENLİ GENELLEŞTİRİLMİŞ JAIN OPERATÖRLERİNİN
YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ**

Gürhan SOYLU

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

ARALIK 2021

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Gürhan SOYLU

03/12/2021

İKİ DEĞİŞKENLİ GENELLEŞTİRİLMİŞ JAIN OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Gürhan SOYLU

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Aralık 2021

ÖZET

Bu çalışmada İki Değişkenli Genelleştirilmiş Jain Operatörlerinin Yaklaşım Özellikleri incelenmiştir. Bu tez dokuz bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, lineer pozitif operatör dizisinin tanımı verilerek temel özelliklerine değinilmiştir. Korovkin teoremi de verilmiştir. İkinci bölümde, Jain Operatörlerinin yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Üçüncü bölümde, Jain Operatörlerinin süreklilik ve lipschitz sınıfındaki fonksiyonlar yardımıyla yaklaşım hızı verilmiştir. Dördüncü bölümde, iki değişkenli genelleştirilmiş Jain operatörlerinin yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Beşinci bölümde, İki Değişkenli Genelleştirilmiş Jain Operatörlerinin süreklilik ve lipschitz sınıfındaki fonksiyonlar yardımıyla yaklaşım oranı elde edilmiştir. Altıncı bölümde, Jain operatörlerinin Kantorovich tipli bir genellemesi verilmiştir. Yedinci bölümde, iki değişkenli genelleştirilmiş Jain operatörlerinin Kantorovich tipli bir genellemesi elde edilmiştir. Sekizinci bölümde, Jain operatörlerinin Voronovskaja tipli asimtotik yaklaşımı verilmiştir. Son Olarak dokuzuncu bölümde, İki Değişkenli Genelleştirilmiş Jain Operatörlerinin Voronovskaja tipli asimtotik yaklaşımı elde edilmiştir.

Bilim Kodu : 20406

Anahtar Kelimeler : Jain operatörü, lineer pozitif operatörler, lipschitz sınıfı.

Sayfa Adedi : 61

Danışman : Prof. Dr. Ogün DOĞRU

APPROXIMATION PROPERTIES OF GENERALIZED JAIN OPERATORS OF TWO
VARIABLES

(M. Sci. Thesis)

Gürhan SOYLU

GAZİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

December 2021

ABSTRACT

In this study, the approximation properties of bivariate generalized Jain operators are investigated. This thesis consists of nine chapters. In the first chapter, the definition of sequence linear positive operator is given and its basic properties are mentioned. Korovkin theorem is also stated. In the second chapter, the approximation properties of Jain operators are studied. In the third chapter, approximation order of Jain operators is given for spaces of continuous functions and Lipschitz class functions. In the fourth chapter, the approximation properties of bivariate generalized Jain operators are studied. In the fifth chapter, approximation order of bivariate generalized Jain operators is given for spaces of continuous functions and Lipschitz class functions. In the sixth chapter, a generalization of the Kantorovich type of Jain operators is given. In the seventh chapter, Kantorovich type generalization of bivariate generalized Jain operators is obtained. In the eighth chapter, the Voronovskaja type asymptotic approach of Jain operators is presented. Finally, in the ninth chapter, the Voronovskaja asymptotic approach of bivariate generalized Jain operators is obtained.

ScienceCode : 20406

KeyWords : Jain operator, linear positive operators, Lipschitz class.

PageNumber : 61

Supervisor : Prof. Dr. Ogün DOĞRU

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım sürecinde her zaman yanımda olan, desteğini hiçbir zaman eksik etmeyen ve sabırla ilgilenen saygı değer danışman hocam Prof. Dr. Ogün DOĞRU'ya ve manevi destekleriyle beni yalnız bırakmayan arkadaşlarıma da en içten teşekkür ve saygılarımı sunarım. Bu süreçte maddi ve manevi desteği ile ayrıca yanımda olan aileme de sonsuz teşekkürlerimi de borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	ix
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.2. Lineer Pozitif Operatörler.....	3
2.2.1. Lineer pozitif operatörlerin özellikleri.....	4
2.3. P.P. Korovkin Teoremi (1953).....	6
3.JAIN OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ.....	7
3.1. Jain Operatörlerinin Sonlu Aralıkta Düzgün Yakınsaklığı.....	7
4. JAIN OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM HIZI.....	15
4.1. Lineer Pozitif Operatör Dizisi İle Fonksiyonlara Yaklaşım Hızı.....	15
4.2. $C[a, b]$ Uzayında Süreklilik Modülü.....	15
4.3. $C[a, b]$ $C_{a, b}$ Uzayındaki Süreklilik Modülünün Özellikleri.....	15
5. JAIN OPERATÖRLERİNİN İKİ DEĞİŞKENLİ GENELLEŞMESİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ.....	21
5.1. Jain Operatörlerinin İki Değişkenli Genelleşmesinin Sonlu Aralıkta Düzgün Yakınsaklığı.....	21
5.1.1. Volkov teoremi (1957).....	21
6. JAIN OPERATÖRLERİNİN İKİ DEĞİŞKENLİ GENELLEŞMESİNİN YAKLAŞIM HIZI.....	29
6.1. Jain Operatörlerinin İki Değişkenli Genelleştirilmesinin Süreklilik Modülü İle Yaklaşım Hızı.....	29

6.2. Jain Operatörlerinin İki Değişkenli Genelleştirilmesinin Lipschitz Sınıfındaki Fonksiyonlar İle Yaklaşım Hızı.....	30
7. JAIN OPERATÖRLERİNİN KANTOROVİCH TIPLI BİR GENELLEMESİ.....	35
8. JAIN OPERATÖRLERİNİN İKİ DEĞİŞKENLİ GENELLEŞMESİNİN KANTOROVİCH TIPLI BİR GENELLEMESİ.....	39
9. JAIN OPERATÖRLERİNİN VORONOVSKAJA TIPLI ASİMPOTOTİK YAKLAŞIMI.....	47
10. JAIN OPERATÖRLERİNİN İKİ DEĞİŞKENLİ GENELLEŞMESİNİN VORONOVSKAJA TIPLI ASİMPOTOTİK YAKLAŞIMI.....	51
11. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	57
KAYNAKLAR.....	59
ÖZGEÇMİŞ.....	61

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
$C[a, b]$	$[a, b]$ aralığındaki tanımlı ve sürekli fonksiyonların uzayı
$C^2[a, b]$	$f, f', f'' \in C[a, b]$ olan fonksiyonlar uzayı
$e_i e_i = t^i$	Test Foksiyonları ($i = 0, 1, 2, \dots$)
$f_n(x) \Rightarrow f(x)$	$\{f_n\}$ fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna düzgün yakınsaması
$Lip_M(\alpha)$	Lipschitz sınıfından fonksiyonlar
$L_n(f; x)$	$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere bir operatör dizisi
$P_n^{[\beta]}(f; x)$	n. Genelleştirilmiş Jain Operatörleri
$P_{n,m}^{[\beta, \gamma]}(f; x, y)$	n. İki Değişkenli Genelleştirilmiş Jain Operatörleri
$\omega(f, \delta)$	f fonksiyonunun süreklilik modülü
$P_n^{*[\beta]}(f; x)$	Jain Operatörlerinin Kantorovich Tipli Genelleşmesi
$P_{n,m}^{*[\beta]}(f; x, y)$	İki Değişkenli Jain Operatörlerinin Kantorovich Tipli Genellemesi
$\ \cdot\ _{C[a,b]}$	$C[a, b]$ uzayında tanımlı norm
$\ \cdot\ _{C^*[a,b]}$	$\ f\ _{C^*[a,b]} = \ f\ _{C[a,b]} + \ f'\ _{C[a,b]} + \ f''\ _{C[a,b]}$ ile tanımlı norm

1. GİRİŞ

1972 yılında G. C. Jain tarafından aşağıdaki operatör tanımlanmıştır [1].

$$P_n^{[\beta]}(f; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{nx(nx + k\beta)^{k-1}}{k!} e^{-(nx+k\beta)} f\left(\frac{k}{n}\right), \quad k \in \mathbb{N}, \beta \in [0,1)$$

Tek değişkenli Jain operatörü tanımlandıktan sonra temel özellikleri incelenmiştir. Korovkin teoremi kullanılarak operatörün yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Süreklilik modülü, Peetre-K fonksiyoneli ve Lipschitz sınıfındaki fonksiyonlar yardımıyla yaklaşım hızı hesaplanmıştır. $\beta = 0$ olması durumunda bu operatör Szasz-Mirakjan operatörlerine dönüşür [2].

Tezimin orjinal konusu olan iki değişkenli genelleştirilmiş Jain operatörünün tanımını verip genel özelliklerini inceleyeceğiz. Bu çalışmada da iki değişkenli genelleştirilmiş Jain operatörünün yaklaşımı Volkov teoremi ile yaklaşım hızı da Süreklilik modülü ve Lipschitz sınıfındaki fonksiyonlar yardımıyla hesaplanmaya çalışılacaktır. Ayrıca Jain operatörünün Kantorovich tipli bir genellemesinin yaklaşım özellikleri incelenip, Voronovskaja asimptotik denklemi elde edilecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu kısımda bazı lineer pozitif operatörlerin tanımını verilerek bazı özellikleri incelenecektir. Ayrıca sonraki kısımlarda kullanılacak bazı tanım ve teoremlere de ispatlarıyla birlikte yer verilecektir.

2.2. Lineer Pozitif Operatörler

X ve Y fonksiyon uzayları ise $L : X \rightarrow Y$ ifadesinde yer L ye *operatör* denir.

Lineer Operatör:

X ve Y fonksiyon uzayları olmak üzere;

$L : X \rightarrow Y$ bir operatör olsun. Her $a, b \in \mathbb{R}$, $f, g \in X$ olmak üzere

$L(af + bg) = aL(f) + bL(g)$ ise L operatörüne *Lineer Operatör* denir.

Pozitif Operatör:

$L : X \rightarrow Y$ bir operatör olsun.

$$X^+ = \{f \mid f(x) \geq 0\}$$

$$Y^+ = \{L(f) \mid L(f) \geq 0\}$$

olarak tanımlarsak,

$L : X^+ \rightarrow Y^+$, yani her $f \geq 0$ ise $L(f) \geq 0$ oluyorsa

L ye *Pozitif Operatör* denir.

Lineer Pozitif Operatör:

L operatörü hem lineer hem de pozitif ise L ye *Lineer Pozitif Operatör* denir.

2.2.1. Lineer pozitif operatörlerin özellikleri

2.2.1. Lemma

Lineer pozitif operatörler monoton artandır.

$$f \leq g \text{ ise } L(f) \leq L(g)$$

İspat

$f \leq g$ ise $0 \leq g - f$ olur. L operatörü pozitif olduğundan

$$L(g - f) \geq 0 \tag{2.2.1.1}$$

olur. L operatörünün lineerliğinden dolayı $L(g) - L(f) = L(g - f)$ elde edilir.

Bu ifade $L(g - f) \geq 0$ de kullanılırsa $L(g) - L(f) \geq 0$ olur ve

$L(g) \geq L(f)$ eşitsizliği elde edilir.

2.2.2. Lemma

L Lineer Pozitif Operatörü için $|L(f)| \leq L(|f|)$ eşitsizliği sağlanır.

İspat

Herhangi bir f fonksiyonu için;

$$-|f| \leq f \leq |f| \tag{2.2.2}$$

eşitsizliği sağlanır.

L lineer pozitif operatör olduğundan Lemma 2.2.1. den dolayı monoton artandır.

(2.2.2) den

$$L(-|f|) \leq L(f) \leq L(|f|) \tag{2.2.3}$$

bulunur. L lineer olduğundan, $L(-|f|) \leq -L(|f|)$ yazılır.

Bu eşitsizliğin (2.1.3) de kullanılmasıyla

$$-L(|f|) \leq L(f) \leq L(|f|)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Şimdi de diğer bölümlerde kullanılacak olan ana tanımları verelim!

2.2.3. Tanım

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $f_n(x)$ 'e bir *fonksiyon dizisi* denir ve (f_n) ile gösterilir.

2.2.4. Tanım

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $L_n(f(t), x)$ 'e *operatör dizisi* denir ve (L_n) ile gösterilir.

2.2.5. Teorem

$\phi(z)$ D bölgesinde analitik bir fonksiyon olmak üzere;

$$\phi(z) = \phi(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} (f(z))^k \phi'(z) \right]_{z=0} \left(\frac{z}{f(z)} \right)^k$$

Eşitliğine *Lagrange's formülü* denir (Jensen, 1902).

2.2.6. Tanım (Hölder Eşitsizliği)

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad p > 0, q > 0$$

$(a_k), (b_k) \in l_p$ dizileri için;

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |b_k|^q \right)^{1/q}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlikte $p = q = 2$ için Cauchy-Schwarz eşitsizliği olarak bilinir.

2.2.7. Tanım

Kapalı bir $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli tüm reel değerli fonksiyonlardan oluşan kümeye $C[a, b]$ *fonksiyon uzayı* denir ve

$$\|f\|_{C[a,b]} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

şeklinde tanımlanır. Bu normla birlikte $C[a, b]$ uzayı lineer normlu bir uzaydır.

2.2.8. Tanım

(f_n) fonksiyon dizisi $x \in [a, b]$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(\cdot) - f(\cdot)\|_{C[a,b]} = 0$$

ise (f_n) fonksiyon dizisi f fonksiyon uzay dizisine *düzgün yakınsaktır* denir ve

$$f_n \Rightarrow f$$

şeklinde gösterilir.

2.3. P.P.Korovkin Teoremi (1953)

$L_n(f; x)$ lineer pozitif operatör dizisi her $x \in [a, b]$ için;

$$L_n(e_0; x) \Rightarrow 1$$

$$L_n(e_1; x) \Rightarrow x$$

$$L_n(e_2; x) \Rightarrow x^2$$

koşullarını sağlıyorsa $f \in C[a, b]$ için $L_n(f; x) \Rightarrow f(x)$ dir [3].

3. JAIN OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde Jain operatörleri tanıtılarak Korovkin Teoremi yardımıyla yaklaşım özellikleri incelenecektir.

3.1. Jain Operatörlerinin Sonlu Aralıkta Düzgün Yakınsaklığı

$$P_n^{[\beta]}(f; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} e^{-(nx+k\beta)} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad k \in \mathbb{N} \quad \beta \in [0,1) \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanan lineer pozitif operatörlere *Jain operatörleri* denir [12].

Bu operatörlerin $[0, A]$ aralığındaki yakınsaklığını Korovkin Teoremi yardımıyla gösterelim.

$P_n^{[\beta]}(f; x)$ 'in lineer ve pozitif bir operatör olduğunu gösterelim.

Lineerlik;

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $f, g \in C[0, A]$ için,

$$\begin{aligned} P_n^{[\beta]}(af(t) + bg(t); x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} e^{-(nx+k\beta)} \left(af\left(\frac{k}{n}\right) + bg\left(\frac{k}{n}\right) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} e^{-(nx+k\beta)} (af)\left(\frac{k}{n}\right) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} e^{-(nx+k\beta)} (bg)\left(\frac{k}{n}\right) \\ &= a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} e^{-(nx+k\beta)} f\left(\frac{k}{n}\right) + b \sum_{k=0}^{\infty} \frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} e^{-(nx+k\beta)} g\left(\frac{k}{n}\right) \\ &= aP_n^{[\beta]}(f(t); x) + bP_n^{[\beta]}(g(t); x) \end{aligned}$$

olduğundan $(P_n^{[\beta]})$ lineer operatördür.

Pozitiflik;

$k = 0, 1, 2, \dots, n \in \mathbb{N}$ ve $x \in [0, A]$ için

$$\frac{nx(nx + k\beta)^{k-1}}{k!} e^{-(nx+k\beta)} \geq 0$$

olduğu için $f \geq 0$ ise $P_n^{[\beta]}(f; x) \geq 0$ dır. Yani $(P_n^{[\beta]})$ pozitif operatördür.

3.1.1. Lemma [P. Patela]

(3.1) ile tanımlı $P_n^{[\beta]}(f; x)$ operatörleri için aşağıdakiler sağlanır.

$$P_n^{[\beta]}(e_0; x) = 1 \tag{3.2}$$

$$P_n^{[\beta]}(e_1; x) = \frac{x}{1-\beta} \tag{3.3}$$

$$P_n^{[\beta]}(e_2; x) = \frac{x^2}{(1-\beta)^2} + \frac{x}{n(1-\beta)^3} \tag{3.4}$$

olduğunu gösterirsek Korovkin Teoreminden dolayı

$$P_n^{[\beta]}(f; x) \Rightarrow f(x), \quad (n \rightarrow \infty) \text{ olur [5,6].}$$

Şimdi bunları gösterelim :

$$\mathbf{1)} \quad P_n^{[\beta]}(e_0; x) = 1$$

eşitliğini ispat edebilmek için ilk önce Lagrange formülünü hatırlatalım. (Bkz. [P. Patela])

$\phi(z)$ ve $f(z)$ D bölgesinde analitik bir fonksiyon olmak üzere;

$$\phi(z) = \phi(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} (f(z))^k \phi'(z) \right]_{z=0} \left(\frac{z}{f(z)} \right)^k \tag{3.5}$$

eşitliğine *Lagrange's formülü* denir.

Buradan hareketle, (3.5) de $\phi(z) = e^{\alpha z}$ ve $f(z) = e^{\beta z}$ seçilirse;

$$\begin{aligned}
e^{\alpha z} &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} e^{k\beta z} \alpha e^{\alpha z} \right]_{z=0} \left(\frac{z}{e^{\beta z}} \right)^k \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \alpha (\alpha + k\beta)^{k-1} \left(\frac{z}{e^{\beta z}} \right)^k \\
&= 1 + \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (\alpha + k\beta)^{k-1} e^{-k\beta z} z^k
\end{aligned}$$

olup, burada $z = 1$ seçilirse;

$$e^{\alpha} = 1 + \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (\alpha + k\beta)^{k-1} e^{-k\beta},$$

bulunur. Buradan da;

$$e^{\alpha} = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\alpha + k\beta)^{k-1} e^{-k\beta},$$

Yani,

$$1 = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\alpha + k\beta)^{k-1} e^{-(\alpha+k\beta)}$$

olur. Burada $\alpha = nx$ alınırsa;

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} nx(nx + k\beta)^{k-1} e^{-(nx+k\beta)}$$

elde edilir ki bu da bize (3.2) nin doğruluğunu gösterir.

Şimdi de (3.3) ün yani

$$2) P_n^{[\beta]}(e_1; x) = \frac{x}{1-\beta}$$

ifadesinin doğruluğunu gösterelim.

$$S(r, nx, \beta, e) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx + k\beta)^{k+r-1}}{k!} e^{-(nx+k\beta)}$$

olarak tanımlarsak,

$$nxS(0, nx, \beta, e) = 1 \quad (3.5.1)$$

olur. Gerçekten;

$$S(r, nx, \beta, e) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k (nx + k\beta) S(r-1, nx + k\beta, \beta, e) \quad (3.6)$$

dir. Şimdi bunu gösterelim:

$$\begin{aligned} S(r, nx, \beta, e) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx + k\beta)(nx + k\beta)^{k+r-2}}{k!} e^{-(nx+k\beta)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{nx(nx + k\beta)^{k+r-2}}{k!} e^{-(nx+k\beta)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta(nx + k\beta)^{k+r-2}}{(k-1)!} e^{-(nx+k\beta)} \\ &= nx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx + k\beta)^{k+r-2}}{k!} e^{-(nx+k\beta)} + \beta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx + \beta + k\beta)^{k+r-1}}{k!} e^{-(nx+\beta+k\beta)} \\ &= nx S(r-1, nx, \beta, e) + \beta S(r, nx + \beta, \beta, e) \\ &= nx S(r-1, nx, \beta, e) + \beta [(nx + k\beta) S(r-1, nx + \beta, \beta, e) + \beta S(r, nx + 2\beta, \beta, e)] \\ &= nx S(r-1, nx, \beta, e) + \beta (nx + k\beta) S(r-1, nx + \beta, \beta, e) + \beta^2 S(r, nx + 2\beta, \beta, e) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k (nx + k\beta) S(r-1, nx + k\beta, \beta, e) \end{aligned}$$

olup (3.6) sağlanır.

O halde,

$$\begin{aligned}
 P_n^{[\beta]}(e_1; x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} e^{-(nx+k\beta)} \frac{k}{n} \\
 &= x \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(nx+k\beta)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-(nx+k\beta)} \right] \\
 &= x \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx+\beta+k\beta)^k}{k!} e^{-(nx+\beta+k\beta)} \right] \\
 &= x S(1, nx+\beta, \beta, e)
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

bulunur. Ayrıca,

$$S(1, nx+\beta, \beta, e) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k (nx+\beta+k\beta) S(0, nx+\beta+k\beta, \beta, e)$$

olup, (3.5.1) den dolayı da

$$(nx+\beta+k\beta) S(0, nx+\beta+k\beta, \beta, e) = 1$$

olduğundan

$$S(1, nx+\beta, \beta, e) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k = \frac{1}{1-\beta}$$

elde edilir. Bu son ifadenin (3.7) de kullanılmasıyla (3.3) ispatlanmış olur.

Şimdi de (3.4) yani

$$3) P_n^{[\beta]}(e_2; x) = \frac{x^2}{(1-\beta)^2} + \frac{x}{n(1-\beta)^3}$$

olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
P_n^{[\beta]}(e_2; x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} e^{-(nx+k\beta)} \frac{k^2}{n^2} \\
&= \frac{x}{n} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(nx+k\beta)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-(nx+k\beta)} k \right] \\
&= \frac{x}{n} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx+\beta+k\beta)^k}{k!} e^{-(nx+\beta+k\beta)} (k+1) \right] \\
&= \frac{x}{n} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(nx+\beta+k\beta)^k}{(k-1)!} e^{-(nx+\beta+k\beta)} \right] + \frac{x}{n} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx+\beta+k\beta)^k}{k!} e^{-(nx+\beta+k\beta)} \right] \\
&= \frac{x}{n} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx+2\beta+k\beta)^{k+1}}{k!} e^{-(nx+2\beta+k\beta)} \right] \\
&\quad + \frac{x}{n} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx+\beta+k\beta)^k}{k!} e^{-(nx+\beta+k\beta)} \right] \\
&= \frac{x}{n} [S(2, nx+2\beta, \beta, e) + S(1, nx+\beta, \beta, e)] \tag{3.7.1}
\end{aligned}$$

daha önce elde edilen

$$S(1, nx+\beta, \beta, e) = \frac{1}{1-\beta}$$

$$S(2, nx+2\beta, \beta, e) = \frac{(nx+2\beta)}{(1-\beta)^2} + \frac{\beta^2}{(1-\beta)^3}$$

ifadeleri (3.7.1) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
P_n^{[\beta]}(e_2; x) &= \frac{x}{n} \left[\frac{(nx+2\beta)}{(1-\beta)^2} + \frac{\beta^2}{(1-\beta)^3} + \frac{1}{1-\beta} \right] \\
&= \frac{x^2}{(1-\beta)^2} + \frac{x}{n(1-\beta)^3}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Yani (3.4) elde edilmiş olur.

Şimdi aşağıdaki teoremi verebiliriz.

3.1. Teorem

(3.1) Jain operatörlerinin β yerine β_n alınarak elde edilen

$$P_n^{[\beta_n]}(f; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} e^{-(nx+k\beta_n)} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad (3.8)$$

operatörleri için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0 \quad (3.9)$$

oluyorsa o takdirde $P_n^{[\beta_n]}(f; x)$ operatörleri, $A \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $[0, A]$ kapalı aralığında sürekli olan f fonksiyonuna bu aralıkta düzgün yakınsar.

Yani $f \in C[0, A]$ ise

$$P_n^{[\beta_n]}(f; x) \Rightarrow f(x), x \in [0, A]$$

dır.

İspat

(3.2), (3.3) ve (3.4) de β yerine β_n alınırsa,

$$P_n^{[\beta_n]}(e_0; x) = 1 \quad (3.10)$$

$$P_n^{[\beta_n]}(e_1; x) = \frac{x}{1-\beta_n} \quad (3.11)$$

$$P_n^{[\beta_n]}(e_2; x) = \frac{x^2}{(1-\beta_n)^2} + \frac{x}{n(1-\beta_n)^3} \quad (3.12)$$

olup, (3.10), (3.11) ve (3.12) de (3.9) un kullanılmasıyla $f \in C[0, A]$ için

$$P_n^{[\beta_n]}(e_0; x) \Rightarrow 1, \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$P_n^{[\beta_n]}(e_1; x) \Rightarrow x, \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$P_n^{[\beta_n]}(e_2; x) \Rightarrow x^2, \quad (n \rightarrow \infty)$$

sağlanır ve Korovkin teoreminden dolayı $[0, A]$ aralığındaki her $f \in C[0, A]$ için

$$P_n^{[\beta]}(f; x) \Rightarrow f(x), (n \rightarrow \infty)$$

elde edilir.

Şimdi de aşağıdaki Lemmayı hatırlatalım.

3..1.2. Lemma

(2.1) ile tanımlı $P_n^{[\beta]}(f; x)$ operatörleri için

$$\varphi_x^k(t) := (t - x)^k$$

olmak üzere aşağıdakiler sağlanır.

$$P_n^{[\beta]}(\varphi_x; x) = \frac{x\beta}{1-\beta} \tag{3.13}$$

$$P_n^{[\beta]}(\varphi_x^2; x) = \frac{x}{n(1-\beta)^3} + \frac{x^2\beta^2}{(1-\beta)^2} \tag{3.14}$$

(Gupta ve Greubel, 2015).

4.2. JAIN OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM HIZI

4.1. Lineer Pozitif Operatör Dizisi ile Fonksiyonlara Yaklaşım Hızı

$L_n(f; x)$ lineer operatör dizisi olmak üzere $\|L_n(f) - f\| \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty)$ ifadesi $L_n(f; x)$ in $f(x)$ e düzgün olarak yaklaştığını gösterir.

Yaklaşım hızı $a_n \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty)$ olmak üzere, $|L_n(f; x) - f(x)| < ca_n$ olacak şekilde a_n lerin belirlenmesi ile hesaplanır. Hesaplamagenel olarak $\omega(f; \delta)$ ile gösterilen “Süreklilik Modülü” veya Peetre K fonksiyoneli gibi araçlar yardımıyla yapılır.

4.2. $C[a, b]$ Uzayında Süreklilik Modülü

$f \in C[a, b]$ olsun. Her $\delta > 0$ için

$$\omega(f; \delta) = \sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |t-x| \leq \delta}} |f(t) - f(x)| \quad (4.2.1)$$

İfadesine f fonksiyonunun “Süreklilik Modülü” denir. (Bkz. [Lorentz])

Şimdi de Peetre-K fonksiyoneli verelim.

$$f \in C[0, A], \quad g \in C^2[0, A] = \{g \in C[0, A] : g, g', g'' \in C[0, A]\}$$

$$K(f; \delta) = \inf_{f \in C[0, A]} (\|f - g\|_{C[0, A]} + \delta \|g''\|_{C^2[0, A]}) \quad (4.2.2)$$

4.3. $C[a, b]$ Uzayındaki Süreklilik Modülünün Özellikleri

$$\omega(f; \delta) \geq 0$$

$$\delta_1 \leq \delta_2 \text{ ise } \omega(f; \delta_1) \leq \omega(f; \delta_2)$$

$$\text{Her } m \in \mathbb{N} \text{ için } \omega(f; m\delta) \leq m\omega(f; \delta)$$

$$\text{Her } \lambda \in \mathbb{R}^+ \text{ için } \omega(f; \lambda\delta) \leq (\lambda + 1) \omega(f; \delta)$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(f; \delta) = 0$$

$$|f(t) - f(x)| \leq \omega(f; |t - x|)$$

$$|f(t) - f(x)| \leq \left(\frac{|t - x|}{\delta} + 1 \right) \omega(f; \delta)$$

Bu kısımda (3.1) de verilen Jain operatörlerinin yaklaşma hızını (4.2.1) de tanımlanan Süreklilik Modülü ve (4.2.2) de tanımlanan Peetre K- fonksiyoneli yardımıyla hesaplayacağız.

4.2. Teorem

$n \in \mathbb{N}$, $f \in C_B[0, \infty)$ için

$$\left| P_n^{[\beta]}(f, x) - f(x) \right| \leq 4K(f; \max\{x, x^2\}\delta_n^2) + \omega\left(f; \frac{\beta x}{1 - \beta}\right)$$

sağlanır. Burada

$$\delta_n = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\beta^2}{(1 - \beta)^2} + \frac{1}{n(1 - \beta)^3}}$$

dir (Agratini, 2013).

İspat

$g \in C^2[0, A]$, $x \in [0, A]$ aralığında Taylor formülünü kullanırsak;

$$g(t) - g(x) = (t - x)g'(x) + \int_x^t (t - u)g''(u) du, t \geq 0.$$

olur. Şimdi de Jain operatörüne uygularsak;

$$\begin{aligned} \left| P_n^{[\beta]}(g, x) - g(x) \right| &= \left| P_n^{[\beta]}(g - g(x)e_0; x) \right| \\ &= \left| g'(x)P_n^{[\beta]}(\varphi_x^1; x) + P_n^{[\beta]}\left(\int_x^t (t - u)g''(u) du; x\right) \right| \\ &\leq \left| g'(x) \frac{x\beta}{(1 - \beta)} \right| + P_n^{[\beta]}\left(\left|\int_x^t (t - u)g''(u) du\right|; x\right) \\ &\leq \left| g'(x) \frac{x\beta}{(1 - \beta)} \right| + \frac{\|g''\|}{2} P_n^{[\beta]}(\varphi_x^2, x) \end{aligned}$$

$$= \left| g'(x) \frac{x\beta}{(1-\beta)} \right| + \frac{\|g''\|}{2} \left(\frac{x}{n(1-\beta)^3} + \frac{x^2\beta^2}{(1-\beta)^2} \right)$$

olup,

$$\left| P_n^{[\beta]}(g, x) - g(x) \right| \leq \left| g'(x) \frac{x\beta}{(1-\beta)} \right| + \frac{\|g''\|}{2} \left(\frac{x}{n(1-\beta)^3} + \frac{x^2\beta^2}{(1-\beta)^2} \right) \quad (4.1.1)$$

sonucunu elde ederiz.

$f \in C[0, A]$ için

$$\left| P_n^{[\beta]}(f, x) - f(x) \right| \leq \left| P_n^{[\beta]}(f - g; x) \right| + \left| P_n^{[\beta]}(g; x) - g(x) \right| + |g(x) - f(x)|$$

olup, burada (4.1.1) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \left| P_n^{[\beta]}(f, x) - f(x) \right| &\leq 2\|f - g\| + \frac{\|g''\|}{2} \left(\frac{x}{n(1-\beta)^3} + \frac{x^2\beta^2}{(1-\beta)^2} \right) + \left| g'(x) \frac{x\beta}{(1-\beta)} \right| \\ &\leq 4\|f - g\| + \frac{\|g''\|}{4} \left(\frac{x}{n(1-\beta)^3} + \frac{x^2\beta^2}{(1-\beta)^2} \right) + \left| g'(x) \frac{x\beta}{(1-\beta)} \right| \end{aligned}$$

bulunur. Her iki tarafın infimumunu alıp (4.2.2) yi kullanır ve

$$\delta_n = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\beta^2}{(1-\beta)^2} + \frac{1}{n(1-\beta)^3}}$$

seçersek ispat tamamlanır.

4.3. Teorem

Eğer $f \in C[0, A]$ ve $1 > \frac{\beta'}{n} > \beta \geq 0$ için

$$\left| P_n^{[\beta]}(f, x) - f(x) \right| \leq \left\{ 1 + \left(A \frac{1 + A\beta\beta'}{(1-\beta)^3} \right)^{1/2} \right\} w\left(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

sağlanır. Burada

$$w(f, \delta) = \sup\{|f(x'') - f(x')| : x', x'' \in [0, A], |x'' - x'| \leq \delta\}$$

dir(Patel ve Mishra, 2019).

İspat

Süreklilik Modülünün

$$|f(t) - f(x)| \leq \left(1 + \frac{|t - x|}{\delta}\right) w(f, \delta)$$

özelliliği kullanılırsa ;

$$\begin{aligned} |P_n^{[\beta]}(f, x) - f(x)| &\leq \left\{1 + \frac{1}{\delta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{nx(nx + k\beta)^{k-1}}{k!} e^{-(nx+k\beta)} \left|\frac{k}{n} - x\right|\right\} w(f, \delta) \\ &\leq \left\{1 + \frac{1}{\delta} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{nx(nx + k\beta)^{k-1}}{k!} e^{-(nx+k\beta)} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \right]^{1/2}\right\} w(f, \delta) \end{aligned}$$

yazılabilir. Ayrıca,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{nx(nx + k\beta)^{k-1}}{k!} e^{-(nx+k\beta)} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 = P_n^{\beta}((t - x)^2, x)$$

olup, buradan

$$P_n^{[\beta]}((t - x)^2, x) \leq \frac{x}{n(1 - \beta)^3} + \frac{x^2 \beta^2}{(1 - \beta)^2}$$

$$\leq \frac{A}{n} \left[\frac{1}{(1 - \beta)^3} + \frac{A\beta\beta'}{(1 - \beta)^2} \right]$$

$$\leq \frac{A}{n} \left[\frac{1 + A\beta\beta'}{(1 - \beta)^3} \right]$$

$\delta = \frac{1}{\sqrt{n}}$ seçilirse

ispat tamamlanır.

4.4. Tanım (Lipschitz Sınıfındaki Fonksiyonlar):

$0 < \alpha \leq 1$ aralığında

$|f(t) - f(x)| \leq M|t - x|^\alpha$ eşitsizliğini sağlayan fonksiyonlara Lipschitz sınıfındandır denir.

Burada M ye Lipschitz sabiti denir ve bu uzayın elemanları $f \in Lip_M^{(\alpha)}$ ile gösterilir.

4.3.1. Teorem

Jain operatörü için $f \in Lip_M^{(\alpha)}$ olduğunda

$$\left| P_n^{[\beta]}(f, x) - f(x) \right| \leq M \left(C(n, \beta) \max \left\{ x^{\frac{\alpha}{2}}, x^\alpha \right\} \right)$$

sağlanır. Burada

$$C(n, \beta) = \left(\frac{\beta^2}{(1 - \beta)^2} + \frac{1}{n(1 - \beta)^3} \right)^{\frac{\alpha}{2}}$$

dir (Patel ve Mishra, 2019).

İspat

$f \in Lip_M^{(\alpha)}$ olduğundan,

$$|f(t) - f(x)| \leq M|t - x|^\alpha$$

sağlanır. Burada

$$t = \frac{k}{n}$$

seçersek:

$$\left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \leq M \left| \frac{k}{n} - x \right|^\alpha$$

elde edilir. Bunu Jain operatörüne uygularsak;

$$\left| P_n^{[\beta]}(f, x) - f(x) \right| \leq M \sum_{k=0}^{\infty} \frac{nx(nx + k\beta)^{k-1}}{k!} e^{-(nx+k\beta)} \left| \frac{k}{n} - x \right|^\alpha$$

bulunur.

Son ifadenin sağ yanını,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} e^{-(nx+k\beta)} \left| \frac{k}{n} - x \right|^{\alpha} \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{k}{n} - x \right|^{\alpha} \left(\frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} e^{-(nx+k\beta)} \right)^{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} e^{-(nx+k\beta)} \right)^{\frac{2-\alpha}{2}} \end{aligned}$$

olarak düzenleyip, $p = \frac{2}{\alpha}$, $q = \frac{2}{2-\alpha}$ için Tanım 2.2.6. deki Hölder eşitsizliğini kullanırsak;

$$\left| P_n^{[\beta]}(f, x) - f(x) \right| \leq M \sum_{k=0}^{\infty} \left(\left| \frac{k}{n} - x \right|^2 \frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} e^{-(nx+k\beta)} \right)^{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} e^{-(nx+k\beta)} \right)^{\frac{2-\alpha}{2}}$$

sonucunu elde ederiz.

Tanım 2.2.6. deki Hölder eşitsizliği kullanılırsa;

$$\begin{aligned} \left| P_n^{[\beta]}(f, x) - f(x) \right| \\ \leq M \sum_{k=0}^{\infty} \left(\left(\frac{k}{n} - x \right)^2 \frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} e^{-(nx+k\beta)} \right)^{\frac{\alpha}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} e^{-(nx+k\beta)} \right)^{\frac{2-\alpha}{2}} \end{aligned}$$

sonucunu elde ederiz.

(3.2) kullanılarak

$$\left| P_n^{[\beta]}(f, x) - f(x) \right| \leq M \sum_{k=0}^{\infty} \left(\left(\frac{k}{n} - x \right)^2 \frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} e^{-(nx+k\beta)} \right)^{\frac{\alpha}{2}}$$

(3.3) ve (3.4) kullanılarak da

$$\left| P_n^{[\beta]}(f, x) - f(x) \right| \leq M \left[\frac{x^2 \beta^2}{(1-\beta)^2} + \frac{x}{n(1-\beta)^3} \right]^{\frac{\alpha}{2}}$$

elde edilir. Burada

$$C(n, \beta) = \left(\frac{\beta^2}{(1-\beta)^2} + \frac{1}{n(1-\beta)^3} \right)^{\frac{\alpha}{2}}$$

seçilirse, ispat tamamlanır.

5. JAIN OPERATÖRLERİNİN İKİ DEĞİŞKENLİ GENELLEŞMESİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

5.1. Jain Operatörlerinin İki Değişkenli Genelleşmesinin Sonlu Aralıkta Düzgün Yakınsaklığı

Tezin orijinal bölümünü içeren bu kısımda, iki değişkenli Jain operatörleri tanıtılarak Volkov teoremi yardımıyla yaklaşım özellikleri incelenecektir.

Önce Volkov teoremini hatırlatalım.

5.1.1. Volkov Teoremi (1957)

$T_{n,m}(f; x, y)$ lineer pozitif operatör dizisi her $(x, y) \in ([0,1] \times [0,1])$ için;

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|T_{n,m}(e_{00}) - e_{00}\|_{C([0,1] \times [0,1])} = 0$$

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|T_{n,m}(e_{10}) - e_{10}\|_{C([0,1] \times [0,1])} = 0$$

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|T_{n,m}(e_{01}) - e_{01}\|_{C([0,1] \times [0,1])} = 0$$

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|T_{n,m}(e_{20} + e_{02}) - (e_{20} + e_{02})\|_{C([0,1] \times [0,1])} = 0$$

koşullarını sağlıyorsa $f \in C([0,1] \times [0,1])$ için

$$T_{n,m}(f; x, y) \Rightarrow f(x, y) \text{ dir [9].}$$

5.1.2. Lemma

$\beta, \gamma \in [0,1]$ ve $k, l \in \mathbb{N}$ için

$$P_{n,m}^{[\beta,\gamma]}(f; x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} e^{-(nx+k\beta)} \frac{my(my+l\gamma)^{l-1}}{l!} e^{-(my+l\gamma)} f\left(\frac{k}{n}, \frac{l}{m}\right) \quad (5.1)$$

İle tanımlı operatörler için aşağıdakiler sağlanır [13].

$$P_{n,m}^{[\beta,\gamma]}(e_{00}; x, y) = 1 \quad (5.2)$$

$$P_{n,m}^{[\beta,\gamma]}(e_{10}; x, y) = \frac{x}{1-\beta} \quad (5.3)$$

$$P_{n,m}^{[\beta,\gamma]}(e_{01}; x, y) = \frac{y}{1-\gamma} \quad (5.4)$$

$$P_{n,m}^{[\beta,\gamma]}(e_{20}+e_{02}; x, y) = \frac{x^2}{(1-\beta)^2} + \frac{y^2}{(1-\gamma)^2} + \frac{x}{n(1-\beta)^3} + \frac{y}{m(1-\gamma)^3} \quad (5.5)$$

İspat

Daha önce Teorem (2.2.5.) de hatırlattığımız Lagrange formüllerinin x ve y değişkenine bağlı şekli aşağıda verilmiştir:

$$e^{nx} = 1 + nx \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(nx + k\beta)^{k-1}}{k!} e^{-(k\beta)} \quad e^{my} = 1 + my \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(my + l\gamma)^{l-1}}{l!} e^{-(l\gamma)}$$

$$e^{nx} = nx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx + k\beta)^{k-1}}{k!} e^{-(k\beta)} \quad e^{my} = my \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(my + l\gamma)^{l-1}}{l!} e^{-(l\gamma)}$$

$$e^{nx} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{nx(nx + k\beta)^{k-1}}{k!} e^{-(k\beta)} \quad e^{my} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{my(my + l\gamma)^{l-1}}{l!} e^{-(l\gamma)}$$

Şimdi (5.2) nin yani;

$$P_{n,m}^{[\beta,\gamma]}(e_{00}; x, y) = 1$$

İfadesinin doğruluğunu gösterelim.

(5.1) de e_{00} test fonksiyonunu yerine yazdığımızda

$$P_{n,m}^{[\beta,\gamma]}(e_{00}; x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{nx(nx + k\beta)^{k-1}}{k!} e^{-(nx+k\beta)} \frac{my(my + l\gamma)^{l-1}}{l!} e^{-(my+l\gamma)}$$

elde ederiz.

(3.2) yi kullanırsak;

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} e^{-(nx+k\beta)} = 1 \text{ ve } \sum_{l=0}^{\infty} \frac{my(my+l\gamma)^{l-1}}{l!} e^{-(my+l\gamma)} = 1$$

elde edilir.

Buradan,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} e^{-(nx+k\beta)} \frac{my(my+l\gamma)^{l-1}}{l!} e^{-(my+l\gamma)} = 1$$

yazılabilir ki bu da bize (5.2) nin doğruluğunu gösterir.

Şimdi de

$$P_{n,m}^{[\beta,\gamma]}(e_{10}; x, y) = \frac{x}{1-\beta}$$

ifadesinin doğruluğunu gösterelim:

(3.2) den dolayı

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{my(my+l\gamma)^{l-1}}{l!} e^{-(my+l\gamma)} = 1 \text{ ve } S(r, nx, \beta, e) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx+k\beta)^{k+r-1}}{k!} e^{-(nx+k\beta)}$$

olduğunu biliyoruz. Bunu kullanırsak;

$$\begin{aligned} P_{n,m}^{[\beta,\gamma]}(e_{10}; x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} e^{-(nx+k\beta)} \frac{my(my+l\gamma)^{l-1}}{l!} e^{-(my+l\gamma)} \frac{k}{n} \\ &= x \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(nx+k\beta)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-(nx+k\beta)} \right] \\ &= x \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx+\beta+k\beta)^k}{k!} e^{-(nx+\beta+k\beta)} \right] \\ &= xS(1, nx+\beta, \beta, e) \end{aligned}$$

daha sonra

$$S(1, nx + \beta, \beta, e) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k (nx + \beta + k\beta) S(0, nx + \beta + k\beta, \beta, e)$$

(3.5) dan dolayı

$$(nx + \beta + k\beta) S(0, nx + \beta + k\beta, \beta, e) = 1$$

ve buradan da

$$S(1, nx + \beta, \beta, e) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k = \frac{1}{1 - \beta}$$

Dolayısıyla da

$$S(1, nx + \beta, \beta, e) = \frac{1}{1 - \beta}$$

bulunur. Bu son ifadenin (3.7) de kullanılmasıyla (5.3) ispatlanmış olur.

Şimdi de (5.4) yani

$$P_{n,m}^{[\beta,\gamma]}(e_{01}; x, y) = \frac{y}{1 - \gamma}$$

olduğunu gösterelim.

(3.2) den dolayı

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{nx(nx + k\beta)^{k-1}}{k!} e^{-(nx+k\beta)} = 1 \text{ ve } S(r, my, \gamma, e) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(my + l\gamma)^{l+r-1}}{l!} e^{-(my+l\gamma)}$$

olduğunu biliyoruz. Bunu kullanırsak;

$$\begin{aligned} P_{n,m}^{[\beta,\gamma]}(e_{01}; x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{nx(nx + k\beta)^{k-1}}{k!} e^{-(nx+k\beta)} \frac{my(my + l\gamma)^{l-1}}{l!} e^{-(my+l\gamma)} \frac{1}{m} \\ &= y \left[\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(my + l\gamma)^{l-1}}{(l-1)!} e^{-(mx+l\gamma)} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= y \left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(my + \gamma + l\gamma)^l}{l!} e^{-(my + \gamma + l\gamma)} \right] \\
&= yS(1, my + \gamma, \gamma, e)
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$S(1, my + \gamma, \gamma, e) = \sum_{l=0}^{\infty} \gamma^l (my + \gamma + l\gamma) S(0, my + \gamma + l\gamma, \gamma, e)$$

olup, (3.5) dan dolayı

$$(my + \gamma + l\gamma) S(0, my + \gamma + l\gamma, \gamma, e) = 1$$

olur ve buradan da

$$S(1, my + \gamma, \gamma, e) = \sum_{l=0}^{\infty} \gamma^l = \frac{1}{1 - \gamma}$$

Yani;

$$S(1, my + \gamma, \gamma, e) = \frac{1}{1 - \gamma}$$

bulunur. Bu son ifadenin (3.7) de kullanılmasıyla (5.4) ispatlanmış olur. Şimdi de

$$P_{n,m}^{[\beta, \gamma]}(e_{20} + e_{02}; x, y) = \frac{x^2}{(1 - \beta)^2} + \frac{x}{n(1 - \beta)^3} + \frac{y^2}{(1 - \gamma)^2} + \frac{y}{m(1 - \gamma)^3}$$

olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
P_{n,m}^{[\beta, \gamma]}(e_{20} + e_{02}; x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{nx(nx + k\beta)^{k-1}}{k!} e^{-(nx + k\beta)} \frac{my(my + l\gamma)^{l-1}}{l!} e^{-(my + l\gamma)} \left(\frac{k^2}{n^2} + \frac{l^2}{m^2} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{nx(nx + k\beta)^{k-1}}{k!} e^{-(nx + k\beta)} \frac{my(my + l\gamma)^{l-1}}{l!} e^{-(my + l\gamma)} \left(\frac{k^2}{n^2} \right) \\
&\quad + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{nx(nx + k\beta)^{k-1}}{k!} e^{-(nx + k\beta)} \frac{my(my + l\gamma)^{l-1}}{l!} e^{-(my + l\gamma)} \left(\frac{l^2}{m^2} \right)
\end{aligned}$$

ifadesinde (3.2) ve (3.4) ü kullanırsak;

$$\begin{aligned}
 &= \left[\frac{x^2}{(1-\beta)^2} + \frac{x}{n(1-\beta)^3} \right] + \left[\frac{y^2}{(1-\gamma)^2} + \frac{y}{m(1-\gamma)^3} \right] \\
 &= \frac{x^2}{(1-\beta)^2} + \frac{x}{n(1-\beta)^3} + \frac{y^2}{(1-\gamma)^2} + \frac{y}{m(1-\gamma)^3}
 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (5.5) elde edilmiş olur.

Şimdi aşağıdaki teoremi verebiliriz.

5.2. Teorem

(5.1) iki değişkenli genelleştirilmiş Jain operatörlerinin β yerine β_n , γ yerine de γ_m alınarak elde edilen

$$P_{n,m}^{[\beta_n, \gamma_m]}(f; x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{nx(nx+k\beta_n)^{k-1}}{k!} e^{-(nx+k\beta_n)} \frac{my(my+l\gamma_m)^{l-1}}{l!} e^{-(my+l\gamma_m)} f\left(\frac{k}{n}, \frac{l}{m}\right) \quad (5.6)$$

operatörleri için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \gamma_m = 0$$

oluyorsa o taktirde $P_{n,m}^{[\beta_n, \gamma_m]}(f; x, y)$ operatörleri, $A \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$([0, A] \times [0, A])$ bölgesinde sürekli olan $f(x, y)$ fonksiyonuna düzgün yakınsaktır.

Yani $f(x, y) \in C([0, A] \times [0, A])$ ise

$$P_{n,m}^{[\beta_n, \gamma_m]}(f; x, y) \Rightarrow f(x, y), \quad (x, y) \in ([0, A] \times [0, A])$$

dir.

İspat

(5.2), (5.3), (5.4) ve (5.5) de β yerine β_n , γ yerine de γ_n alınırsa,

$$P_{n,m}^{[\beta_n, \gamma_n]}(e_{00}; x, y) = 1 \quad (5.7)$$

$$P_{n,m}^{[\beta_n, \gamma_n]}(e_{10}; x, y) = \frac{x}{1-\beta_n} \quad (5.8)$$

$$P_{n,m}^{[\beta_n, \gamma_n]}(e_{01}; x, y) = \frac{y}{1-\gamma_m} \quad (5.9)$$

$$P_{n,m}^{[\beta_n, \gamma_n]}(e_{20} + e_{02}; x, y) = \frac{x^2}{(1-\beta_n)^2} + \frac{x}{n(1-\beta_n)^3} + \frac{y^2}{(1-\gamma_m)^2} + \frac{y}{m(1-\gamma_m)^3} \quad (5.10)$$

(5.7), (5.8), (5.9) ve (5.10) un kullanılmasıyla $f \in C([0, A] \times [0, A])$ ve

$\beta_n, \gamma_m \rightarrow 0, n, m \rightarrow \infty$ için

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \left\| P_{n,m}^{[\beta_n, \gamma_n]}(e_{00}) - e_{00} \right\|_{C([0,A] \times [0,A])} = 0$$

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \left\| P_{n,m}^{[\beta_n, \gamma_n]}(e_{10}) - e_{10} \right\|_{C([0,A] \times [0,A])} = 0$$

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \left\| P_{n,m}^{[\beta_n, \gamma_n]}(e_{01}) - e_{01} \right\|_{C([0,A] \times [0,A])} = 0$$

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \left\| P_{n,m}^{[\beta_n, \gamma_n]}(e_{20} + e_{02}) - (e_{20} + e_{02}) \right\|_{C([0,A] \times [0,A])} = 0$$

sağlanır ve Volkov teoreminden dolayı $([0, A] \times [0, A])$ aralığındaki her

$f \in C([0, A] \times [0, A])$ için

$$P_{n,m}^{[\beta, \gamma]}(f; x, y) \Rightarrow f(x, y), \quad (n \rightarrow \infty)$$

elde edilir.

6. JAIN OPERATÖRLERİNİN İKİ DEĞİŞKENLİ GENELLEŞMESİNİN YAKLAŞIM HIZI

6.1. Jain Operatörlerinin İki Değişkenli Genelleştirilmesinin Süreklilik Modülü ile Yaklaşım Hızı

Bu kısımda (5.1) de verilen Jain Operatörlerinin İki Değişkenli Genelleştirilmesinin yaklaşım hızını aşağıda verilen iki değişkenli Süreklilik Modülü yardımıyla hesaplayacağız (Bkz.[Anasstassiou and Gal, 2000]).

$$I^2 = [0, \alpha] \times [0, \alpha], \quad f \in C(I^2) \quad \delta_1 > 0, \delta_2 > 0$$

$$\omega(f; \delta_1, \delta_2) = \sup_{\substack{(t,s) \in I^2, (x,y) \in I^2 \\ |t-x| \leq \delta_1, |s-y| \leq \delta_2}} |f(t,s) - f(x,y)|.$$

6.1.1. Teorem

$$n, m \in \mathbb{N} \quad \left| P_{n,m}^{[\beta,\gamma]}(f; x, y) - f(x, y) \right| \leq 4\omega(f; \delta_1, \delta_2)$$

sağlanır. Burada

$$\delta_1 = \frac{x\beta}{1-\beta}, \quad \delta_2 = \frac{y\gamma}{1-\gamma} \tag{6.1.1}$$

dir.

İspat

$$\left| P_{n,m}^{[\beta,\gamma]}(f; x, y) - f(x, y) \right| \leq P_{n,m}^{[\beta,\gamma]}(|f(t,s) - f(x,y)|) \tag{6.1.2}$$

$$|f(t,s) - f(x,y)| \leq \omega(f; \delta_1, \delta_2) \left(\frac{|t-x|}{\delta_1} + 1 \right) \left(\frac{|s-y|}{\delta_2} + 1 \right) \tag{6.1.3}$$

(6.1.2) ve (6.1.3) kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
& \left| P_{n,m}^{[\beta,\gamma]}(f; x, y) - f(x, y) \right| \leq \omega(f; \delta_1, \delta_2) P_{n,m}^{[\beta,\gamma]} \left(\left(\frac{|t-x|}{\delta_1} + 1 \right) \left(\frac{|s-y|}{\delta_2} + 1 \right); x, y \right) \\
& \leq \omega(f; \delta_1, \delta_2) \left\{ P_{n,m}^{[\beta,\gamma]} \left(\left(\frac{|t-x||s-y|}{\delta_1 \delta_2} \right); x, y \right) + P_{n,m}^{[\beta,\gamma]} \left(\left(\frac{|t-x|}{\delta_1} \right); x, y \right) \right. \\
& \quad \left. + P_{n,m}^{[\beta,\gamma]} \left(\left(\frac{|s-y|}{\delta_2} \right); x, y \right) + P_{n,m}^{[\beta,\gamma]}(1; x, y) \right\} \\
& = \omega(f; \delta_1, \delta_2) \left\{ \frac{1}{\delta_1 \delta_2} \left(\frac{xy\beta\gamma}{(1-\beta)(1-\gamma)} \right) + \frac{1}{\delta_1} \left(\frac{x\beta}{1-\beta} \right) + \frac{1}{\delta_2} \left(\frac{y\beta}{1-\beta} \right) + 1 \right\}
\end{aligned}$$

(6.1.1) kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
& = \omega(f; \delta_1, \delta_2) \left\{ \frac{1}{\delta_1 \delta_2} \delta_1 \delta_2 + \frac{1}{\delta_1} \delta_1 + \frac{1}{\delta_2} \delta_2 + 1 \right\} \\
& = 4\omega(f; \delta_1, \delta_2)
\end{aligned}$$

$$\left| P_{n,m}^{[\beta,\gamma]}(f; x, y) - f(x, y) \right| \leq 4\omega(f; \delta_1, \delta_2)$$

elde edilmiş olur.

6.2. Jain Operatörlerinin İki Değişkenli Genelleştirilmesinin Lipschitz Sınıfındaki Fonksiyonlar ile Yaklaşım Hızı

Burada Lipschitz sınıfındaki fonksiyonların iki değişkenli genelleştirilmiş Jain operatörlerinin $f(x, y)$ fonksiyonlarına yaklaşım hızı hesaplanacaktır. Öncelikle Lipschitz sınıfındaki iki değişkenli fonksiyonların tanımına değinelim.

6.2.1. Tanım

$0 < \alpha \leq 1$ olsun.

$$\left| f\left(\frac{k}{n}, \frac{l}{m}\right) - f(x, y) \right| \leq M \left| \left(\frac{k}{n} - x\right) \left(\frac{l}{m} - y\right) \right|^\alpha \quad (6.1.4)$$

eşitsizliğini sağlayan fonksiyonlara Lipschitz sınıfındadır denir. M ye Lipschitz sabiti denir.

$f \in Lip_M(\alpha)$ dır.

6.2.2. Teorem

$0 < \alpha \leq 1$ olsun. $\beta, \gamma \in [0,1)$, $k, l \in \mathbb{N}$ ve

$f \in Lip_M(\alpha)$ ise

$$\left\| P_{n,m}^{[\beta,\gamma]}(f; x, y) - f(x, y) \right\|_{C^2[0,A]} = O\left(\left(\frac{xy\beta\gamma}{(1-\beta)(1-\gamma)}\right)^{\frac{\alpha}{4}}\right)$$

dir.

İspat

(6.1.4) tanımlanan,

$$\left| f\left(\frac{k}{n}, \frac{l}{m}\right) - f(x, y) \right| \leq M \left| \left(\frac{k}{n} - x\right) \left(\frac{l}{m} - y\right) \right|^\alpha$$

eşitsizliğini iki değişkenli genelleştirilmiş Jain operatörüne uygularsak;

$$\begin{aligned} \left| P_{n,m}^{[\beta,\gamma]} - f(x, y) \right| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} \frac{my(my+l\gamma)^{l-1}}{l!} e^{-(nx+k\beta)} e^{-(my+l\gamma)} \left| f\left(\frac{k}{n}, \frac{l}{m}\right) - f(x, y) \right| \\ &\leq M \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} \frac{my(my+l\gamma)^{l-1}}{l!} e^{-(nx+k\beta)} e^{-(my+l\gamma)} \left| \left(\frac{k}{n} - x\right) \left(\frac{l}{m} - y\right) \right|^\alpha \\ &= M \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} \frac{my(my+l\gamma)^{l-1}}{l!} e^{-(nx+k\beta)} e^{-(my+l\gamma)} \left| \left(\frac{k}{n} - x\right) \left(\frac{l}{m} - y\right) \right|^\alpha \right] \\ &\quad \left[\frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} \frac{my(my+l\gamma)^{l-1}}{l!} e^{-(nx+k\beta)} e^{-(my+l\gamma)} \right]^{\frac{2-\alpha}{2}} \end{aligned}$$

elde edilir.

Hölder Eşitsizliği kullanılırsa;

$$\begin{aligned} &\leq M \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} \frac{my(my+l\gamma)^{l-1}}{l!} e^{-(nx+k\beta)} e^{-(my+l\gamma)} \left| \left(\frac{k}{n} - x\right) \left(\frac{l}{m} - y\right) \right|^\alpha \right] \\ &\quad \left[\frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} \frac{my(my+l\gamma)^{l-1}}{l!} e^{-(nx+k\beta)} e^{-(my+l\gamma)} \right]^{\frac{2-\alpha}{2}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} \frac{my(my+l\gamma)^{l-1}}{l!} e^{-(nx+k\beta)} e^{-(my+l\gamma)} = 1 \end{aligned}$$

olduğu için;

$$\begin{aligned}
&\leq M \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} \frac{my(my+l\gamma)^{l-1}}{l!} e^{-(nx+k\beta)} e^{-(my+l\gamma)} \left| \left(\frac{k}{n} - x \right) \left(\frac{l}{m} - y \right) \right|^2 \right]^{\frac{\alpha}{2}} \\
&= M \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} \frac{my(my+l\gamma)^{l-1}}{l!} e^{-(nx+k\beta)} e^{-(my+l\gamma)} \right]^{\frac{\alpha}{2}} \left[\left| \left(\frac{k}{n} - x \right) \left(\frac{l}{m} - y \right) \right|^2 \right]^{\frac{\alpha}{2}}
\end{aligned}$$

bulunur. Hölder Eşitsizliği kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
&\leq M \left[\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} \frac{my(my+l\gamma)^{l-1}}{l!} e^{-(nx+k\beta)} e^{-(my+l\gamma)} \left(\frac{k}{n} - x \right) \right]^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} \frac{my(my+l\gamma)^{l-1}}{l!} e^{-(nx+k\beta)} e^{-(my+l\gamma)} \left(\frac{l}{m} - y \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{\alpha}{2}}
\end{aligned}$$

olup, (2.13) ve (2.10) nun kullanılmasıyla;

$$\left| P_{n,m}^{[\beta,\gamma]}(f; x, y) - f(x, y) \right| \leq M \left[\frac{xy\beta\gamma}{(1-\beta)(1-\gamma)} \right]^{\frac{\alpha}{4}} \quad (6.1.5)$$

elde edilir.

(6.1.5) te her iki tarafda $x \in I$ üzerinden supremumunun alınmasıyla;

$$\left\| P_{n,m}^{[\beta,\gamma]}(f; x, y) - f(x, y) \right\|_{C([0,A] \times [0,A])} \leq M \left(\left(\frac{xy\beta\gamma}{(1-\beta)(1-\gamma)} \right)^{\frac{\alpha}{4}} \right)$$

$$\left\| P_{n,m}^{[\beta,\gamma]}(f; x, y) - f(x, y) \right\|_{C([0,A] \times [0,A])} = O \left(\left(\frac{xy\beta\gamma}{(1-\beta)(1-\gamma)} \right)^{\frac{\alpha}{4}} \right)$$

elde edilir. Buda ispatı tamamlar.

6.3. Teorem

$f \in C(I^2)$ için

$$\left\| P_{n,m}^{[\beta,\gamma]}(f; x, y) - f(x, y) \right\|_{C(I^2)} \leq (1+c)^2 \omega(f; \delta_{1,\beta}(n), \delta_{2,\gamma}(m))$$

sağlanır. Burada;

$$\delta_{1,\beta}(n) = \sqrt{\left(\frac{\beta}{1-\beta}\right)^2 + \frac{1}{n(1-\beta)^3}}$$

$$\delta_{2,\gamma}(m) = \sqrt{\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)^2 + \frac{1}{m(1-\gamma)^3}}$$

dır.

İspat

$(x, y) \in I^2$ olsun.

$$\max_{x \in I} \{x, x^2\} \leq c$$

$$\max_{y \in I} \{y, y^2\} \leq c$$

$\max_{x,y \in I} \{x, y, x^2, y^2\} \leq c$ olmak üzere

$$f \in C([a, b] \times [c, d])$$

$$(\delta_1, \delta_2) \in (0, b-a] \times (0, d-c]$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} |L_{n,m}(f; x, y) - f(x, y)| &\leq \left(1 + \frac{1}{\delta_1} \sqrt{L_{n,m}((e_{10} - x)^2; x, y)} + \frac{1}{\delta_2} \sqrt{L_{n,m}((e_{01} - y)^2; x, y)} + \right. \\ &\left. \frac{1}{\delta_1 \delta_2} \sqrt{L_{n,m}((e_{10} - x)^2; x, y)} \sqrt{L_{n,m}((e_{01} - y)^2; x, y)}\right) \omega(f; \delta_1, \delta_2) \end{aligned} \quad (6.3.1)$$

(6.3.1) de Shisha ve Mond (1968) de verilen aşağıdaki eşitsizliği İki Değişkenli Jain operatörüne uygularsak;

$$\begin{aligned} |P_{n,m}^{[\beta,\gamma]}(f; x, y) - f(x, y)| &\leq \left(1 + \frac{1}{\delta_{1,\beta}} \sqrt{P_{n,m}^{[\beta,\gamma]}((e_{10} - x)^2; x, y)} + \right. \\ &\left. \frac{1}{\delta_{2,\gamma}} \sqrt{P_{n,m}^{[\beta,\gamma]}((e_{01} - y)^2; x, y)} + \right. \\ &\left. \frac{1}{\delta_{1,\beta} \delta_{2,\gamma}} \sqrt{P_{n,m}^{[\beta,\gamma]}((e_{10} - x)^2; x, y)} \sqrt{P_{n,m}^{[\beta,\gamma]}((e_{01} - y)^2; x, y)}\right) \omega(f; \delta_1, \delta_2) \end{aligned} \quad (6.3.2)$$

(3.14) ü (6.3.2) de yerine yazalım.

$$\begin{aligned}
\left| P_{n,m}^{[\beta,\gamma]}(f; x, y) - f(x, y) \right| &\leq \left(1 + \frac{1}{\delta_1} \sqrt{\left(\frac{x\beta}{1-\beta} \right)^2 + \frac{x}{n(1-\beta)^3}} + \frac{1}{\delta_2} \sqrt{\left(\frac{y\gamma}{1-\gamma} \right)^2 + \frac{y}{m(1-\gamma)^3}} + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{\delta_1 \delta_2} \sqrt{\left(\frac{x\beta}{1-\beta} \right)^2 + \frac{x}{n(1-\beta)^3}} \sqrt{\left(\frac{y\gamma}{1-\gamma} \right)^2 + \frac{y}{m(1-\gamma)^3}} \right) \omega(f; \delta_1, \delta_2)
\end{aligned} \tag{6.3.3}$$

$$\max_{x \in I} \{x, x^2\} \leq c$$

$$\max_{y \in I} \{y, y^2\} \leq c$$

$$\max_{x, y \in I} \{x, y, x^2, y^2\} \leq c$$

olmak üzere,

$$\delta_{1,\beta}(n) = \sqrt{\left(\frac{\beta}{1-\beta} \right)^2 + \frac{1}{n(1-\beta)^3}}$$

$$\delta_{2,\gamma}(m) = \sqrt{\left(\frac{\gamma}{1-\gamma} \right)^2 + \frac{1}{m(1-\gamma)^3}}$$

seçersek;

$$\left| P_{n,m}^{[\beta,\gamma]}(f; x, y) - f(x, y) \right| \leq \left(1 + \frac{1}{\delta_{1,\beta}} c \delta_{1,\beta} + \frac{1}{\delta_{2,\gamma}} c \delta_{2,\gamma} + \frac{1}{\delta_{1,\beta} \delta_{2,\gamma}} c^2 \delta_{1,\beta} \delta_{2,\gamma} \right) \omega(f; \delta_1, \delta_2)$$

$$\left| P_{n,m}^{[\beta,\gamma]}(f; x, y) - f(x, y) \right| \leq (1 + c)^2 \omega(f; \delta_{1,\beta}, \delta_{2,\gamma})$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

7. JAIN OPERATÖRLERİNİN KANTOROVİCH TİPLİ BİR GENELLEMESİ

Bu bölümde öncelikle Jain operatörlerinin Kantorovich tipli bir genelleşmesi yapılacaktır.

Ayrıca yaklaşım özellikleride incelenecektir.

Jain Operatörlerinin Muraru, Doğru ve Gülsün, (2020) dekine benzer Kantorovich tipli bir genelleşmesini yapalım:

$$P_n^{*[\beta]}(f; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} e^{-(nx+k\beta)} \frac{1}{c_{n,k}} \int_k^{k+c_{n,k}} f\left(\frac{\xi}{n}\right) d\xi \quad (7.1)$$

burada

$$\frac{c_{n,k}}{n} \leq d_n \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0 \quad x \in [0, A]$$

dir.

Burada $c_{n,k} = 1$ seçilmesiyle Jain operatörlerinin Umar ve Razi (1985) ve Emre (2016) da incelenen klasik Kantorovich tipli genelleşmesini elde ederiz.

7.1. Teorem

(7.1) operatörleri için aşağıdakiler sağlanır:

$$P_n^{*[\beta]}(e_0, x) = 1 \quad (7.2)$$

$$P_n^{*[\beta]}(e_1, x) \leq \frac{x}{1-\beta} + \frac{d_n}{2} \quad (7.3)$$

$$P_n^{*[\beta]}(e_2; x) \leq \frac{x^2}{(1-\beta)^2} + \frac{x}{n(1-\beta)^3} + \frac{xd_n}{1-\beta} + d_n^2 \quad (7.4)$$

$$1) P_n^{*[\beta]}(e_0; x) = 1$$

gösterelim. (3.2) den dolayı,

$$\begin{aligned}
P_n^{*[\beta]}(e_0; x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} e^{-(nx+k\beta)} \frac{1}{c_{n,k}} \int_k^{k+c_{n,k}} 1 d\xi \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} e^{-(nx+k\beta)} \frac{1}{c_{n,k}} [c_{n,k}] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} e^{-(nx+k\beta)}
\end{aligned}$$

(3.2) den dolayı

$$= 1$$

elde edilir.

Şimdi de (7.3) ün yani

$$2) P_n^{*[\beta]}(e_1; x) \leq \frac{x}{1-\beta} + \frac{d_n}{2}$$

ifadesinin doğruluğunu gösterelim.

(3.3) den dolayı

$$\begin{aligned}
P_n^{*[\beta]}(e_1; x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} e^{-(nx+k\beta)} \frac{1}{c_{n,k}} \int_k^{k+c_{n,k}} \frac{\xi}{n} d\xi \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} e^{-(nx+k\beta)} \frac{1}{c_{n,k}} \left[\frac{\xi^2}{2n} \Big|_k^{k+c_{n,k}} \right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} e^{-(nx+k\beta)} \frac{1}{c_{n,k}} \left[\frac{k^2 + 2kc_{n,k} + c_{n,k}^2 - k^2}{2n} \right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} e^{-(nx+k\beta)} \frac{k}{n} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} e^{-(nx+k\beta)} \frac{c_{n,k}}{2n}
\end{aligned}$$

Yani;

$$P_n^{*[\beta]}(e_1; x) \leq \frac{x}{1-\beta} + \frac{d_n}{2}$$

elde edilir. Şimdi de (7.4) yani,

$$3) P_n^{*[\beta]}(e_2; x) \leq \frac{x^2}{(1-\beta)^2} + \frac{x}{n(1-\beta)^3} + \frac{xd_n}{1-\beta} + d_n^2$$

olduğunu gösterelim.

(3.2), (3.3) ve (3.4) den dolayı;

$$\begin{aligned} P_n^{*[\beta]}(e_2; x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} e^{-(nx+k\beta)} \frac{1}{c_{n,k}} \int_k^{k+c_{n,k}} \frac{\xi^2}{n^2} d\xi \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} e^{-(nx+k\beta)} \frac{1}{c_{n,k}} \left[\frac{\xi^3}{3n^2} \right]_k^{k+c_{n,k}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} e^{-(nx+k\beta)} \frac{1}{c_{n,k}} \left[\frac{k^3 + 3k^2c_{n,k} + 3kc_{n,k}^2 + c_{n,k}^3 - k^3}{3n^2} \right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} e^{-(nx+k\beta)} \frac{k^2}{n^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} e^{-(nx+k\beta)} \frac{kc_{n,k}}{n^2} \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} e^{-(nx+k\beta)} \frac{c_{n,k}^2}{n^2} \end{aligned}$$

Yani;

$$P_n^{*[\beta]}(e_2; x) \leq \frac{x^2}{(1-\beta)^2} + \frac{x}{n(1-\beta)^3} + \frac{xd_n}{1-\beta} + d_n^2$$

elde edilir.

Şimdi aşağıdaki teoremi verebiliriz.

7.2. Teorem

(7.1) Jain operatörlerinin Kantorovich tipli genelleşmesinde β yerine β_n alınarak elde edilen

$$P_n^{*[\beta_n]}(f; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{nx(nx+k\beta_n)^{k-1}}{k!} e^{-(nx+k\beta_n)} \frac{1}{c_{n,k}} \int_k^{k+c_{n,k}} f\left(\frac{\xi}{n}\right) d\xi \quad (7.5)$$

operatörleri için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0 \quad (7.6)$$

oluyorsa o takdirde $P_n^{*[\beta_n]}(f; x)$ operatörleri, $A \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $[0, A]$ kapalı aralığında sürekli olan f fonksiyonuna bu aralıkta düzgün yakınsar.

Yani $f \in C[0, A]$ ise

$$P_n^{*[\beta_n]}(f; x) \Rightarrow f(x), x \in [0, A]$$

dir.

İspat

(7.2), (7.3) ve (7.4) de β yerine β_n alınırsa,

$$P_n^{*[\beta_n]}(e_0, x) = 1 \tag{7.7}$$

$$P_n^{*[\beta_n]}(e_1, x) \leq \frac{x}{1-\beta_n} + \frac{d_n}{2} \tag{7.8}$$

$$P_n^{*[\beta_n]}(e_2; x) \leq \frac{x^2}{(1-\beta_n)^2} + \frac{x}{n(1-\beta_n)^3} + \frac{xd_n}{1-\beta_n} + d_n^2 \tag{7.9}$$

elde edilen (7.7), (7.8) ve (7.9) da (7.6) nın kullanılmasıyla $f \in C[0, A]$ $d_n \rightarrow 0$ için

$$P_n^{*[\beta_n]}(e_0; x) = 1, \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$P_n^{*[\beta_n]}(e_1; x) - x \leq 0, \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$P_n^{*[\beta_n]}(e_2; x) - x^2 \leq 0, \quad (n \rightarrow \infty)$$

sağlanır ve Korovkin teoreminden dolayı $[0, A]$ aralığındaki her $f \in C[0, A]$ için

$$P_n^{*[\beta]}(f; x) \Rightarrow f(x), \quad (n \rightarrow \infty)$$

elde edilir.

8. JAIN OPERATÖRLERİNİN İKİ DEĞİŞKENLİ GENELLEŞMESİNİN KANTOROVİCH TİPLİ BİR GENELLEMESİ

Bu bölümde öncelikle iki değişkenli genelleştirilmiş Jain operatörlerinin Kantorovich tipli bir genelleşmesi yapılacak ve yaklaşım özellikleri incelenecektir. Bu genelleşme;

$$P_{n,m}^{*[\beta]}: L_1([0, \alpha] \times [0, \alpha]) \rightarrow C([0, \alpha] \times [0, \alpha])$$

$$f \in L_1([0, \alpha] \times [0, \alpha]), \quad I^2 = ([0, \alpha] \times [0, \alpha]), (0 < \alpha < A)$$

$$n, m, k, l \in \mathbb{N}, 0 < c_{n,k} \leq 1, 0 < b_{m,l} \leq 1 \text{ olmak üzere}$$

$$P_{n,m}^{*[\beta,\gamma]}(f; x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} \frac{my(my+l\gamma)^{l-1}}{l!} e^{-(nx+k\beta)} e^{-(my+l\gamma)} \frac{1}{c_{n,k}b_{m,l}} \int_k^{k+c_{n,k}} \int_l^{l+b_{m,l}} f\left(\frac{\xi}{n}, \frac{\eta}{m}\right) d\eta d\xi \quad (8.1)$$

8.1. Teorem

(8.1) operatörleri için aşağıdakiler sağlanır.

$$P_{n,m}^{*[\beta,\gamma]}(e_{00}; x, y) = 1 \quad (8.2)$$

$$P_{n,m}^{*[\beta,\gamma]}(e_{10}; x, y) \leq \frac{x}{1-\beta} + \frac{d_n}{2} \quad (8.3)$$

$$P_{n,m}^{*[\beta,\gamma]}(e_{01}; x, y) \leq \frac{y}{1-\gamma} + \frac{s_m}{2} \quad (8.4)$$

$$P_{n,m}^{*[\beta,\gamma]}(e_{20} + e_{02}; x, y) \leq \frac{x^2}{(1-\beta)^2} + \frac{y^2}{(1-\gamma)^2} + \frac{x}{n(1-\beta)^3} + \frac{y}{m(1-\gamma)^3} + \frac{xd_n}{(1-\beta)} + \frac{ys_m}{(1-\gamma)} + \frac{d_n^2 + s_m^2}{3} \quad (8.5)$$

$$P_{n,m}^{*[\beta,\gamma]}(e_{00}; x, y) = 1$$

olduğunu gösterelim.

(3.2) kullanılarak

$$\begin{aligned} P_{n,m}^{*[\beta,\gamma]}(f; x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} \frac{my(my+l\gamma)^{l-1}}{l!} e^{-(nx+k\beta)} e^{-(my+l\gamma)} \frac{1}{c_{n,k}b_{m,l}} \int_k^{k+c_{n,k}} \int_l^{l+b_{m,l}} 1 d\eta d\xi \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} \frac{my(my+l\gamma)^{l-1}}{l!} e^{-(nx+k\beta)} e^{-(my+l\gamma)} \frac{1}{c_{n,k}b_{m,l}} c_{n,k}b_{m,l} \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} \frac{my(my+l\gamma)^{l-1}}{l!} e^{-(nx+k\beta)} e^{-(my+l\gamma)}$$

Yani,

$$P_{n,m}^{*[\beta,\gamma]}(f; x, y) = 1$$

elde edilir.

Şimdi de (8.3) ü yani;

$$P_{n,m}^{*[\beta,\gamma]}(e_{10}; x, y) \leq \frac{x}{1-\beta} + \frac{d_n}{2}$$

ifadesinin doğruluğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} & P_{n,m}^{*[\beta,\gamma]}(e_{10}; x, y) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} \frac{my(my+l\gamma)^{l-1}}{l!} e^{-(nx+k\beta)} e^{-(my+l\gamma)} \frac{1}{c_{n,k} b_{m,l}} \int_k^{k+c_{n,k}} \int_l^{l+b_{m,l}} \frac{\xi}{n} d\eta d\xi \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} \frac{my(my+l\gamma)^{l-1}}{l!} e^{-(nx+k\beta)} e^{-(my+l\gamma)} \frac{1}{c_{n,k} b_{m,l}} \left[\frac{\xi^2 b_{m,l}}{2n} \right]_k^{k+c_{n,k}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} \frac{my(my+l\gamma)^{l-1}}{l!} e^{-(nx+k\beta)} e^{-(my+l\gamma)} \frac{b_{m,l}}{c_{n,k} b_{m,l}} \left[\frac{k^2 + 2kc_{n,k} + c_{n,k}^2 - k^2}{2n} \right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} \frac{my(my+l\gamma)^{l-1}}{l!} e^{-(nx+k\beta)} e^{-(my+l\gamma)} \frac{1}{c_{n,k}} \left[\frac{2kc_{n,k} + c_{n,k}^2}{2n} \right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} \frac{my(my+l\gamma)^{l-1}}{l!} e^{-(nx+k\beta)} e^{-(my+l\gamma)} \frac{k}{n} \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} \frac{my(my+l\gamma)^{l-1}}{l!} e^{-(nx+k\beta)} e^{-(my+l\gamma)} \frac{c_{n,k}}{2n} \end{aligned}$$

olup, (3.2) ve (3.3) kullanılarak

$$P_{n,m}^{*[\beta,\gamma]}(e_{10}; x, y) \leq \frac{x}{1-\beta} + \frac{d_n}{2}$$

elde edilir.

Şimdi de (8.4) ü yani;

$$P_{n,m}^{*[\beta,\gamma]}(e_{01}; x, y) \leq \frac{y}{1-\gamma} + \frac{s_m}{2}$$

olduğunu gösterelim. (3.2) ve (3.3) kullanılarak

$$\begin{aligned}
& P_{n,m}^{*[\beta,\gamma]}(e_{01}; x, y) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} \frac{my(my+l\gamma)^{l-1}}{l!} e^{-(nx+k\beta)} e^{-(my+l\gamma)} \frac{1}{c_{n,k} b_{m,l}} \int_k^{k+c_{n,k}} \int_l^{l+b_{m,l}} \frac{\eta}{m} d\eta d\xi \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} \frac{my(my+l\gamma)^{l-1}}{l!} e^{-(nx+k\beta)} e^{-(my+l\gamma)} \frac{c_{n,k}}{c_{n,k} b_{m,l}} \left[\frac{\eta^2}{2m} \right]_l^{l+b_{m,l}} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} \frac{my(my+l\gamma)^{l-1}}{l!} e^{-(nx+k\beta)} e^{-(my+l\gamma)} \frac{c_{n,k}}{c_{n,k} b_{m,l}} \left[\frac{l^2 + 2lb_{m,l} + b_{m,l}^2 - l^2}{2m} \right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} \frac{my(my+l\gamma)^{l-1}}{l!} e^{-(nx+k\beta)} e^{-(my+l\gamma)} \frac{1}{b_{m,l}} \left[\frac{2lb_{m,l} + b_{m,l}^2}{2m} \right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} \frac{my(my+l\gamma)^{l-1}}{l!} e^{-(nx+k\beta)} e^{-(my+l\gamma)} \frac{l}{m} \\
&+ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} \frac{my(my+l\gamma)^{l-1}}{l!} e^{-(nx+k\beta)} e^{-(my+l\gamma)} \frac{b_{m,l}}{2m}
\end{aligned}$$

Yani,

$$P_{n,m}^{*[\beta,\gamma]}(e_{01}; x, y) \leq \frac{y}{1-\gamma} + \frac{s_m}{2}$$

elde edilir.

Şimdi de (8.5) in sağlandığını, yani

$$\begin{aligned}
& P_{n,m}^{*[\beta,\gamma]}(e_{20} + e_{02}; x, y) \\
&\leq \frac{x^2}{(1-\beta)^2} + \frac{y^2}{(1-\gamma)^2} + \frac{x}{n(1-\beta)^3} + \frac{y}{m(1-\gamma)^3} + \frac{xd_n}{(1-\beta)} + \frac{ys_m}{(1-\gamma)} \\
&+ \frac{d_n^2 + s_m^2}{3}
\end{aligned}$$

olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
& P_{n,m}^{*[\beta,\gamma]}(e_{20} + e_{02}; x, y) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} \frac{my(my+l\gamma)^{l-1}}{l!} e^{-(nx+k\beta)} e^{-(my+l\gamma)} \frac{1}{c_{n,k} b_{m,l}} \int_k^{k+c_{n,k}} \int_l^{l+b_{m,l}} \left(\frac{\xi^2}{n^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\eta^2}{m^2} \right) d\eta d\xi \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} \frac{my(my+l\gamma)^{l-1}}{l!} e^{-(nx+k\beta)} e^{-(my+l\gamma)} \frac{1}{c_{n,k} b_{m,l}} \int_k^{k+c_{n,k}} \int_l^{l+b_{m,l}} \left(\frac{\xi^2}{n^2} \right) d\eta d\xi \\
&\quad + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} \frac{my(my+l\gamma)^{l-1}}{l!} e^{-(nx+k\beta)} e^{-(my+l\gamma)} \frac{1}{c_{n,k} b_{m,l}} \int_k^{k+c_{n,k}} \int_l^{l+b_{m,l}} \left(\frac{\eta^2}{m^2} \right) d\eta d\xi \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} \frac{my(my+l\gamma)^{l-1}}{l!} e^{-(nx+k\beta)} e^{-(my+l\gamma)} \frac{b_{m,l}}{c_{n,k} b_{m,l}} \left[\frac{\xi^3}{3n^2} \right]_k^{k+c_{n,k}} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} \frac{my(my+l\gamma)^{l-1}}{l!} e^{-(nx+k\beta)} e^{-(my+l\gamma)} \frac{c_{n,k}}{c_{n,k} b_{m,l}} \left[\frac{\eta^3}{3m^2} \right]_l^{l+b_{m,l}} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} \frac{my(my+l\gamma)^{l-1}}{l!} e^{-(nx+k\beta)} e^{-(my+l\gamma)} \frac{b_{m,l}}{c_{n,k} b_{m,l}} \left[\frac{3k^2 c_{n,k} + 3c_{n,k}^2 k + c_{n,k}^3}{3n^2} \right] \\
&\quad + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} \frac{my(my+l\gamma)^{l-1}}{l!} e^{-(nx+k\beta)} e^{-(my+l\gamma)} \frac{c_{n,k}}{c_{n,k} b_{m,l}} \left[\frac{3l^2 b_{m,l} + 3b_{m,l}^2 l + b_{m,l}^3}{3m^2} \right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} \frac{my(my+l\gamma)^{l-1}}{l!} e^{-(nx+k\beta)} e^{-(my+l\gamma)} \frac{k^2}{n^2} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} \frac{my(my+l\gamma)^{l-1}}{l!} e^{-(nx+k\beta)} e^{-(my+l\gamma)} \frac{kc_{n,k}}{n^2} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} \frac{my(my+l\gamma)^{l-1}}{l!} e^{-(nx+k\beta)} e^{-(my+l\gamma)} \frac{c_{n,k}^2}{3n^2} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} \frac{my(my+l\gamma)^{l-1}}{l!} e^{-(nx+k\beta)} e^{-(my+l\gamma)} \frac{l^2}{m^2} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} \frac{my(my+l\gamma)^{l-1}}{l!} e^{-(nx+k\beta)} e^{-(my+l\gamma)} \frac{lb_{m,l}}{m^2} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} \frac{my(my+l\gamma)^{l-1}}{l!} e^{-(nx+k\beta)} e^{-(my+l\gamma)} \frac{b_{m,l}^2}{3m^2}
\end{aligned}$$

(3.2), (3.3) ve (3.4) kullanılarak

$$\begin{aligned}
 P_{n,m}^{*[\beta,\gamma]}(e_{20} + e_{02}; x, y) \\
 \leq \frac{x^2}{(1-\beta)^2} + \frac{y^2}{(1-\gamma)^2} + \frac{x}{n(1-\beta)^3} + \frac{y}{m(1-\gamma)^3} + \frac{xd_n}{(1-\beta)} + \frac{ys_m}{(1-\gamma)} \\
 + \frac{d_n^2 + s_m^2}{3}
 \end{aligned}$$

elde edilir.

8.2. Teorem

(8.1) iki değişkenli Jain operatörlerinin Kantorovich tipli genelleşmesinde β ve γ yerine sırasıyla β_n ve γ_m alınarak elde edilen

$$\begin{aligned}
 P_{n,m}^{*[\beta_n, \gamma_m]}(f; x, y) \\
 = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{nx(nx + k\beta_n)^{k-1}}{k!} \frac{my(my + l\gamma_m)^{l-1}}{l!} e^{-(nx+k\beta_n)} e^{-(my+l\gamma_m)} \frac{1}{c_{n,k}b_{m,l}} \times \\
 \int_k^{k+c_{n,k}} \int_l^{l+b_{m,l}} f\left(\frac{\xi}{n}, \frac{\eta}{m}\right) d\eta d\xi
 \end{aligned} \tag{8.6}$$

operatörleri için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \gamma_m = 0$$

oluyorsa o taktirde $P_n^{[\beta_n, \gamma_m]}(f; x, y)$ operatörleri, $A \in I$ olmak üzere $([0, A] \times [0, A])$ bölgesinde sürekli olan $f(x, y)$ fonksiyonuna düzgün yakınsar.

Yani $f \in C([0, A] \times [0, A])$ ise

$$P_n^{[\beta_n, \gamma_m]}(f; x, y) \Rightarrow f(x, y), (x, y) \in ([0, A] \times [0, A])$$

dir.

İspat

(8.2), (8.3), (8.4) ve (8.5) de β, γ yerine β_n ve γ_m alınırsa,

$$P_{n,m}^{*[\beta_n, \gamma_m]}(e_{00}; x, y) = 1 \quad (8.7)$$

$$P_{n,m}^{*[\beta_n, \gamma_m]}(e_{10}; x, y) \leq \frac{x}{1-\beta_n} + \frac{d_n}{2} \quad (8.8)$$

$$P_{n,m}^{*[\beta_n, \gamma_m]}(e_{01}; x, y) \leq \frac{y}{1-\gamma_m} + \frac{s_m}{2} \quad (8.9)$$

$$P_{n,m}^{*[\beta_n, \gamma_m]}(e_{20} + e_{02}; x, y) \leq \frac{x^2}{(1-\beta_n)^2} + \frac{y^2}{(1-\gamma_m)^2} + \frac{x}{n(1-\beta_n)^3} + \frac{y}{m(1-\gamma_m)^3} + \frac{xd_n}{(1-\beta_n)} + \frac{ys_m}{(1-\gamma_m)} + \frac{d_n^2 + s_m^2}{3} \quad (8.10)$$

bulunur.

(8.7), (8.8), (8.9) ve (8.10) un $f \in C(I^2)$ ve $d_n \rightarrow 0$, $s_m \rightarrow 0$, $\beta_n \rightarrow \infty$, $\gamma_m \rightarrow \infty$,

$n \rightarrow \infty$ için

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \left\| P_{n,m}^{*[\beta_n, \gamma_m]}(e_{00}) - e_{00} \right\|_{C(I^2)} = 0$$

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \left\| P_{n,m}^{*[\beta_n, \gamma_m]}(e_{10}) - e_{10} \right\|_{C(I^2)} = 0$$

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \left\| P_{n,m}^{*[\beta_n, \gamma_m]}(e_{01}) - e_{01} \right\|_{C(I^2)} = 0$$

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \left\| P_{n,m}^{*[\beta_n, \gamma_m]}(e_{20} + e_{02}) - (e_{20} + e_{02}) \right\|_{C(I^2)} = 0$$

sağlanır ve Volkov teoreminden dolayı $([0, A] \times [0, A])$ bölgesindeki her

$f \in C([0, A] \times [0, A])$ için

$$P_{n,m}^{*[\beta_n, \gamma_m]}(f; x, y) \Rightarrow f(x, y), \quad (n \rightarrow \infty), (m \rightarrow \infty)$$

elde edilir.

8.3. Teorem

$$\forall n, m \in \mathbb{N} \text{ için } \left| P_{n,m}^{*[\beta, \gamma]}(f; x, y) - f(x, y) \right| \leq 4\omega(f; \delta_1, \delta_2)$$

sağlanır. Burada,

$$\delta_1 = \frac{x^2 \beta^2}{(1 - \beta)^2} + \frac{x \beta d_n}{(1 - \beta)} + \frac{d_n^2}{3}$$

$$\delta_2 = \frac{y^2 \beta^2}{(1 - \gamma)^2} + \frac{y \beta s_m}{(1 - \gamma)} + \frac{s_m^2}{3}$$

dir.

İspat

$$\left| P_{n,m}^{*[\beta, \gamma]}(f; x, y) - f(x, y) \right| \leq P_{n,m}^{*[\beta, \gamma]}(|f(t, s) - f(x, y)|) \quad (8.2.1)$$

(6.1.3) ve (8.2.1) kullanılırsa;

$$\begin{aligned} \left| P_{n,m}^{*[\beta, \gamma]}(f; x, y) - f(x, y) \right| &\leq \omega(f; \delta_1, \delta_2) P_{n,m}^{*[\beta, \gamma]} \left(\left(\frac{|t - x|}{\delta_1} + 1 \right) \left(\frac{|s - y|}{\delta_2} + 1 \right); x, y \right) \\ &\leq \omega(f; \delta_1, \delta_2) \left\{ P_{n,m}^{*[\beta, \gamma]} \left(\left(\frac{|t - x||s - y|}{\delta_1 \delta_2} \right); x, y \right) + P_{n,m}^{*[\beta, \gamma]} \left(\left(\frac{|t - x|}{\delta_1} \right); x, y \right) \right. \\ &\quad \left. + P_{n,m}^{*[\beta, \gamma]} \left(\left(\frac{|s - y|}{\delta_2} \right); x, y \right) + P_{n,m}^{*[\beta, \gamma]}(1; x, y) \right\} \\ &= \omega(f; \delta_1, \delta_2) \left\{ \frac{1}{\delta_1 \delta_2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{nx(nx + k\beta)^{k-1}}{k!} \frac{my(my + l\gamma)^{l-1}}{l!} e^{-(nx+k\beta)} e^{-(my+l\gamma)} \frac{1}{c_{n,k} b_{m,l}} \int_k^{k+c_{n,k}} \int_l^{l+b_{m,l}} \left| \frac{\xi}{n} - x \right| \frac{\eta}{m} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - y \right| d\eta d\xi \right) + \frac{1}{\delta_1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{nx(nx + k\beta)^{k-1}}{k!} \frac{my(my + l\gamma)^{l-1}}{l!} e^{-(nx+k\beta)} e^{-(my+l\gamma)} \frac{1}{c_{n,k} b_{m,l}} \int_k^{k+c_{n,k}} \int_l^{l+b_{m,l}} \left| \frac{\xi}{n} - x \right| d\eta d\xi \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\delta_2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{nx(nx + k\beta)^{k-1}}{k!} \frac{my(my + l\gamma)^{l-1}}{l!} e^{-(nx+k\beta)} e^{-(my+l\gamma)} \frac{1}{c_{n,k} b_{m,l}} \int_k^{k+c_{n,k}} \int_l^{l+b_{m,l}} \left| \frac{\eta}{m} - y \right| d\eta d\xi \right) + 1 \right\} \end{aligned}$$

Cauchy-Schwarz eşitsizliğini kullanırsak,

$$\left| P_{n,m}^{*[\beta,\gamma]}(f; x, y) - f(x, y) \right| \leq \omega(f; \delta_1, \delta_2) \left\{ \frac{\sqrt{P_{n,m}^{*[\beta,\gamma]}((t-x)^2; x, y)} \sqrt{P_{n,m}^{*[\beta,\gamma]}((s-y)^2; x, y)}}{\delta_1 \delta_2} + \frac{\sqrt{P_{n,m}^{*[\beta,\gamma]}((t-x)^2; x, y)}}{\delta_1} + \frac{\sqrt{P_{n,m}^{*[\beta,\gamma]}((s-y)^2; x, y)}}{\delta_2} + 1 \right\} \quad (8.2.2)$$

olup, Muraru, Doğru ve Gülsün (2020) de verilen

$$P_n^{*[\beta]}((t-x)^2; x) \leq \frac{x^2 \beta^2}{(1-\beta)^2} + \frac{x \beta d_n}{(1-\beta)} + \frac{d_n^2}{3}$$

$$P_m^{*[\gamma]}((t-y)^2; y) \leq \frac{y^2 \gamma^2}{(1-\gamma)^2} + \frac{y \gamma s_m}{(1-\gamma)} + \frac{s_m^2}{3}$$

bu ifadeleri (8.2.2) de kullanırsak;

$$\begin{aligned} \left| P_{n,m}^{*[\beta,\gamma]}(f; x, y) - f(x, y) \right| &\leq \omega(f; \delta_1, \delta_2) \left\{ \frac{\sqrt{\frac{x^2 \beta^2}{(1-\beta)^2} + \frac{x \beta d_n}{(1-\beta)} + \frac{d_n^2}{3}} \sqrt{\frac{y^2 \gamma^2}{(1-\gamma)^2} + \frac{y \gamma s_m}{(1-\gamma)} + \frac{s_m^2}{3}}}{\delta_1 \delta_2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{\frac{x^2 \beta^2}{(1-\beta)^2} + \frac{x \beta d_n}{(1-\beta)} + \frac{d_n^2}{3}}}{\delta_1} + \frac{\sqrt{\frac{y^2 \gamma^2}{(1-\gamma)^2} + \frac{y \gamma s_m}{(1-\gamma)} + \frac{s_m^2}{3}}}{\delta_2} + 1 \right\} \end{aligned}$$

elde ederiz. Burada,

$$\delta_1 = \frac{x^2 \beta^2}{(1-\beta)^2} + \frac{x \beta d_n}{(1-\beta)} + \frac{d_n^2}{3}$$

$$\delta_2 = \frac{y^2 \gamma^2}{(1-\gamma)^2} + \frac{y \gamma s_m}{(1-\gamma)} + \frac{s_m^2}{3}$$

seçersek,

$$\forall n, m \in \mathbb{N} \text{ için } \left| P_{n,m}^{*[\beta,\gamma]}(f; x, y) - f(x, y) \right| \leq 4\omega(f; \delta_1, \delta_2)$$

olur ki bu da ispatı tamamlar.

9. JAIN OPERATÖRLERİNİN VORONOVSKAJA ASİMPTOTİK YAKLAŞIMI

Burada (3.1) ile verilen $P_n^{[\beta]}(f; x)$ operatörünün Voronovskaja tipli teoremi verilecektir.

Aşağıdaki teorem Genelleştirilmiş Jain operatörlerinin Voronovskaja asimptotik yaklaşımı ile ilgilidir.

9.1. Teorem

f fonksiyonu $[0, A]$ aralığında sınırlı ve $x \in [0, A]$ aralığında ikinci mertebeden türevelere sahipse;

$f, f', f'' \in C[0, A]$ için $n \rightarrow \infty, \beta \rightarrow 0 \forall x > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(P_n^{[\beta]}(f; x) - f(x) \right) = \frac{x}{2} f''(x)$$

eşitliği sağlanır (Patel ve Mishra, 2019).

İspat

f fonksiyonunun sabit bir x noktası için Taylor Formülü;

$$f(t) = f(x) + f'(x)(t - x) + \frac{1}{2} f''(x)(t - x)^2 + \varepsilon(t, x)(t - x)^2 \text{ şeklindedir.}$$

Taylor formülünün her iki tarafına $P_n^{[\beta]}(f; x)$ operatörü uygulanırsa;

$$\begin{aligned} P_n^{[\beta]}(f; x) &= f(x) + f'(x)P_n^{[\beta]}((t - x); x) + \frac{1}{2} f''(x)P_n^{[\beta]}((t - x)^2; x) \\ &\quad + P_n^{[\beta]}(\varepsilon(t, x)(t - x)^2; x) \end{aligned}$$

elde edilir.

Daha sonra Lemma 9.2. verelim.

9.2. Lemma

$$\varphi_x^s(t) = (t - x)^s(x, t) \in A \times A$$

$$P_n^{[\beta]}((t - x); x) = \frac{x\beta}{1-\beta} \quad (9.2.1)$$

$$P_n^{[\beta]}((t - x)^2; x) = \frac{x}{n(1-\beta)^3} + \frac{x^2\beta^2}{(1-\beta)^2} \quad (9.2.2)$$

$$P_n^{[\beta]}((t - x)^3; x) = \frac{x(1+2\beta)}{n^2(1-\beta)^5} + \frac{3x^2\beta}{n(1-\beta)^4} + \frac{x^3\beta^3}{n^3(1-\beta)^3} \quad (9.2.3)$$

$$P_n^{[\beta]}((t - x)^4; x) = \frac{x}{(1-\beta)^4} + \frac{6x^3}{n(1-\beta)^5} + \frac{x(7+8\beta)}{n^2(1-\beta)^6} + \frac{x(1+8\beta+6\beta^2)}{n^3(1-\beta)^7} \quad (9.2.4)$$

(Gupta ve Greubel, 2015).

Daha sonra;

$$\begin{aligned} P_n^{[\beta]}(f; x) &= f(x) + f'(x)P_n^{[\beta]}((t - x); x) + \frac{1}{2}f''(x)P_n^{[\beta]}((t - x)^2; x) \\ &\quad + P_n^{[\beta]}(\varepsilon(t, x)(t - x)^2; x) \end{aligned}$$

(9.2.1) ve (9.2.2) ifadeleri yerine yazılırsa;

$$P_n^{[\beta]}(f; x) - f(x) = \left(\frac{x\beta}{1-\beta}\right)f'(x) + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{n(1-\beta)^3} + \frac{x^2\beta^2}{(1-\beta)^2}\right)f''(x) + P_n^{[\beta]}(\varepsilon(t, x)(t - x)^2; x)$$

eşitliği elde edilir.

Son düzenlemeler yapılırsa;

$$\begin{aligned} n\left(P_n^{[\beta]}(f; x) - f(x)\right) &= n\left(\frac{x\beta}{1-\beta}\right)f'(x) \\ &\quad + \frac{n}{2}\left(\frac{x}{n(1-\beta)^3} + \frac{x^2\beta^2}{(1-\beta)^2}\right)f''(x) + nP_n^{[\beta]}(\varepsilon(t, x)(t - x)^2; x) \end{aligned} \quad (9.2.5)$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} nP_n^{[\beta]}(\varepsilon(t, x)(t - x)^2; x) = 0$ olduğu gösterilirse ispata bir adım daha yaklaşılmış olur.

Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden yararlanılarak;

$$P_n^{[\beta]}(\varepsilon(t, x)(t - x)^2; x) \leq \left(P_n^{[\beta]}((t - x)^4; x) \right)^{\frac{1}{2}} \left(P_n^{[\beta]}(\varepsilon^2(t, x); x) \right)^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliği elde edilir.

$P_n^{[\beta]}((t - x)^4; x)$ ifadesinin sonlu olduğunu göstermeliyiz.

(9.2.4) den

$$P_n^{[\beta]}((t - x)^4; x) = \frac{x}{(1 - \beta)^4} + \frac{6x^3}{n(1 - \beta)^5} + \frac{x(7 + 8\beta)}{n^2(1 - \beta)^6} + \frac{x(1 + 8\beta + 6\beta^2)}{n^3(1 - \beta)^7}$$

olduğunu biliyoruz.

$\beta \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty$ için $x \in [0, A]$

$$P_n^{[\beta]}((t - x)^4; x) = x$$

olduğundan

$$P_n^{[\beta]}((t - x)^4; x) \beta \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty \text{ için } \forall x > 0$$

ifadesi sonludur.

$\varepsilon^2(x, x) = 0$ olduğu için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n^{[\beta]}(\varepsilon(t, x); x) = \varepsilon^2(x, x) = 0$$

$[0, A]$ aralığında düzgün yakınsaktır. Sonuç olarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n P_n^{[\beta]}(\varepsilon(t, x)(t - x)^2; x) = 0 \quad (9.2.6)$$

elde edilir.

Böylece (9.2.5), (9.2.6) da yerine yazılırsa;

$$n \left(P_n^{[\beta]}(f; x) - f(x) \right) = n \left(\frac{x\beta}{1 - \beta} \right) f'(x) + \frac{n}{2} \left(\frac{x}{n(1 - \beta)^3} + \frac{x^2\beta^2}{(1 - \beta)^2} \right) f''(x)$$

olur. Burada β yerine β_n alınırsa,

$$n \left(P_n^{[\beta_n]}(f; x) - f(x) \right) = n \left(\frac{x\beta_n}{1 - \beta_n} \right) f'(x) + \frac{n}{2} \left(\frac{x}{n(1 - \beta_n)^3} + \frac{x^2\beta_n^2}{(1 - \beta_n)^2} \right) f''(x)$$

bulunur. $f, f', f'' \in C(I)$ için $\forall x \in I$ için $\beta_n \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty)$ ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(P_n^{[\beta]}(f; x) - f(x) \right) = \frac{x}{2} f''(x)$$

elde edilir.

10. JAIN OPERATÖRLERİNİN İKİ DEĞİŞKENLİ GENELLEŞMESİNİN VORONOVSKAJA ASİMPTOTİK YAKLAŞIMI

Burada (5.1) ile verilen $P_{n,n}^{[\beta,\gamma]}(f; x, y)$ operatörlerinin Voronovskaja tipli teoremi verilecektir.

$$P_{n,n}^{[\beta,\gamma]}(f; x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} \frac{ny(ny+l\beta)^{l-1}}{l!} e^{-(nx+k\beta)} e^{-(ny+l\beta)} f\left(\frac{k}{n}, \frac{l}{n}\right) \quad (10.1)$$

(10.1) de verilen ifadenin aşağıda test fonksiyonları verilmiştir.

$$P_{n,n}^{[\beta_n,\gamma_n]}(e_{00}; x, y) = 1,$$

$$P_{n,n}^{[\beta_n,\gamma_n]}(e_{10}; x, y) = x + \frac{x\beta_n}{1 - \beta_n},$$

$$P_{n,n}^{[\beta_n,\gamma_n]}(e_{01}; x, y) = y + \frac{y\gamma_n}{1 - \gamma_n},$$

$$P_{n,n}^{[\beta_n,\gamma_n]}(e_{20}; x, y) = x^2 + \frac{x^2\beta_n(2 - \beta_n)}{(1 - \beta_n)^2} + \frac{x}{n(1 - \beta_n)^3},$$

$$P_{n,n}^{[\beta_n,\gamma_n]}(e_{02}; x, y) = y^2 + \frac{y^2\gamma_n(2 - \gamma_n)}{(1 - \gamma_n)^2} + \frac{y}{n(1 - \gamma_n)^3},$$

$$P_{n,n}^{[\beta_n,\gamma_n]}(e_{30}; x, y) = x^3 + \frac{x^3\beta_n^3 - 3x^3\beta_n^2 + 3x^3\beta_n}{(1 - \beta_n)^3} + \frac{3x^2}{n(1 - \beta_n)^4} + \frac{(2\beta_n + 1)x}{n^2(1 - \beta_n)^5},$$

$$P_{n,n}^{[\beta_n,\gamma_n]}(e_{03}; x, y) = y^3 + \frac{y^3\gamma_n^3 - 3y^3\gamma_n^2 + 3y^3\gamma_n}{(1 - \gamma_n)^3} + \frac{3y^2}{n(1 - \gamma_n)^4} + \frac{(2\gamma_n + 1)y}{n^2(1 - \gamma_n)^5},$$

$$P_{n,n}^{[\beta_n,\gamma_n]}(e_{40}; x, y) = x^4 + \frac{-x^4\beta_n^4 + 4x^4\beta_n^3 - 6x^4\beta_n^2 + 4x^4\beta_n}{(1 - \beta_n)^4} + \frac{6x^3}{n(1 - \beta_n)^5} +$$

$$\frac{(8\beta_n + 7)x^2}{n^2(1 - \beta_n)^6} + \frac{(6\beta_n^2 + 8\beta_n + 1)x}{n^3(1 - \beta_n)^7},$$

$$P_{n,n}^{[\beta_n,\gamma_n]}(e_{04}; x, y) = y^4 + \frac{-y^4\gamma_n^4 + 4y^4\gamma_n^3 - 6y^4\gamma_n^2 + 4y^4\gamma_n}{(1 - \gamma_n)^4} + \frac{6y^3}{n(1 - \gamma_n)^5} +$$

$$\frac{(8\gamma_n + 7)y^2}{n^2(1 - \gamma_n)^6} + \frac{(6\gamma_n^2 + 8\gamma_n + 1)y}{n^3(1 - \gamma_n)^7}.$$

(Gupta and Greubel, 2015).

10.1. Lemma

(10.1) de verilen iki değişkenli operatör için;

$$\varphi_u^r(v) = (v - u)^r$$

$$P_{n,n}^{[\beta_n, \gamma_n]}(\varphi_x^1(t); x, y) = \frac{x\beta_n}{1-\beta_n},$$

$$P_{n,n}^{[\beta_n, \gamma_n]}(\varphi_y^1(s); x, y) = \frac{y\gamma_n}{1-\gamma_n},$$

$$P_{n,n}^{[\beta_n, \gamma_n]}(\varphi_x^2(t); x, y) = \frac{1}{n} \frac{x}{(1-\beta_n)^3} (-nx\beta_n^3 + nx\beta_n^2 + 1),$$

$$P_{n,n}^{[\beta_n, \gamma_n]}(\varphi_y^2(s); x, y) = \frac{1}{n} \frac{y}{(1-\gamma_n)^3} (-ny\gamma_n^3 + ny\gamma_n^2 + 1),$$

$$P_{n,n}^{[\beta_n, \gamma_n]}(\varphi_x^3(t); x, y) = -\frac{1}{n^2} \frac{x}{(\beta_n - 1)^5}$$

$$(n^2x^2\beta_n^5 - 2n^2x^2\beta_n^4 + n^2x^2\beta_n^3 - 3nx\beta_n^2 + 3nx\beta_n + 2\beta_n + 1),$$

$$P_{n,n}^{[\beta_n, \gamma_n]}(\varphi_y^3(s); x, y) = -\frac{1}{n^2} \frac{y}{(\gamma_n - 1)^5}$$

$$(n^2y^2\gamma_n^5 - 2n^2y^2\gamma_n^4 + n^2y^2\gamma_n^3 - 3ny\gamma_n^2 + 3ny\gamma_n + 2\gamma_n + 1),$$

$$P_{n,n}^{[\beta_n, \gamma_n]}(\varphi_x^4(t); x, y) = -\frac{1}{n^3} \frac{x}{(\beta_n - 1)^7}$$

$$\begin{aligned} & (-n^3x^3\beta_n^7 + 3n^3x^3\beta_n^6 - 3n^3x^3\beta_n^5 + n^3x^3\beta_n^4 + 6n^2x^2\beta_n^4 - 12n^2x^2\beta_n^3 \\ & + 6n^2x^2\beta_n^2 - 8nx\beta_n^3 + 4nx\beta_n^2 + nx\beta_n + 3nx + 6\beta_n^2 + 8\beta_n + 1), \end{aligned}$$

$$P_{n,n}^{[\beta_n, \gamma_n]}(\varphi_y^4(s); x, y) = -\frac{1}{n^3} \frac{y}{(\gamma_n - 1)^7}$$

$$\begin{aligned} & (-n^3y^3\gamma_n^7 + 3n^3y^3\gamma_n^6 - 3n^3y^3\gamma_n^5 + n^3y^3\gamma_n^4 + 6n^2y^2\gamma_n^4 - 12n^2y^2\gamma_n^3 + 6n^2y^2\gamma_n^2 \\ & - 8ny\gamma_n^3 + 4ny\gamma_n^2 + ny\gamma_n + 3nx + 6\gamma_n^2 + 8\gamma_n + 1). \end{aligned}$$

verilmiştir [17].

10.2. Lemma

(10.1) de tanımlanan $P_{n,n}^{[\beta_n, \gamma_n]}(f; x, y)$ iki değişkenli Jain operatörleri aşağıdaki koşulları sağlar.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\beta_n = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\gamma_n = 0$$

olmak üzere,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 P_{n,n}^{[\beta, \gamma]} \left(\left(\varphi_x^2(t) + \varphi_y^2(s) \right)^2 ; x, y \right)} \leq \sqrt{2c^2 + 6c}$$

sağlanır.

İspat

$$n^2 P_{n,n}^{[\beta_n, \gamma_n]} \left(\left(\varphi_x^2(t) + \varphi_y^2(s) \right)^2 ; x, y \right)$$

ifadesini açalım;

$$\begin{aligned} n^2 P_{n,n}^{[\beta_n, \gamma_n]} \left(\left(\varphi_x^2(t) + \varphi_y^2(s) \right)^2 ; x, y \right) &= n^2 P_{n,n}^{[\beta_n, \gamma_n]}(\varphi_x^4(t); x, y) + 2n P_{n,n}^{[\beta_n, \gamma_n]}(\varphi_x^2(t); x, y) \times \\ &n P_{n,n}^{[\beta_n, \gamma_n]}(\varphi_y^2(s); x, y) + n^2 P_{n,n}^{[\beta_n, \gamma_n]}(\varphi_y^4(s); x, y) \end{aligned} \quad (10.2.1)$$

Lemma 10.1. de verilen aşağıdaki ifadeler $n \rightarrow \infty$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} P_{n,n}^{[\beta_n, \gamma_n]}(\varphi_x^1(t); x, y) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} P_{n,n}^{[\beta_n, \gamma_n]}(\varphi_y^1(s); x, y) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n P_{n,n}^{[\beta_n, \gamma_n]}(\varphi_x^2(t); x, y) = x$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n P_{n,n}^{[\beta_n, \gamma_n]}(\varphi_y^2(s); x, y) = y$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 P_{n,n}^{[\beta_n, \gamma_n]}(\varphi_x^4(t); x, y) = 3x^2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 P_{n,n}^{[\beta_n, \gamma_n]}(\varphi_y^4(s); x, y) = 3y^2$$

dir.

(10.2.1) ve yukarıda verilenler (i-vi) kullanılarak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 P_{n,n}^{[\beta_n, \gamma_n]} \left(\left(\varphi_x^2(t) + \varphi_y^2(s) \right)^2; x, y \right)} = \sqrt{3x^2 + 2xy + 3y^2}$$

elde edilir.

Teorem 6.3. deki gibi c sabitini seçersek,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 P_{n,n}^{[\beta, \gamma]} \left(\left(\varphi_x^2(t) + \varphi_y^2(s) \right)^2; x, y \right)} \leq \sqrt{2c^2 + 6c}$$

sonucunu elde ederiz.

Şimdi iki değişkenli Jain operatörleri için Voronovskaja tipi sonuç içeren aşağıdaki teoremi verelim.

10.1. Teorem

f fonksiyonu $[0, A]$ aralığında sınırlı ve $(x, y) \in [0, A]$ noktasında ikinci mertebeden türevelere sahipse;

$f \in C(I^2)$ için $n \rightarrow \infty$, β ve $\gamma \rightarrow 0 \forall x, y > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(P_{n,n}^{[\beta_n, \gamma_n]}(f(t, s); x, y) - f(x, y) \right) = \frac{x}{2} f_{xx}(x, y) + \frac{y}{2} f_{yy}(x, y)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

f fonksiyonunun iki değişkenli Taylor formülü;

$$\begin{aligned} f(t, s) = & f(x, y) + [f_x(x, y)(t - x) + f_y(x, y)(s - y)] + \\ & \frac{1}{2} [f_{xx}(x, y)(t - x)^2 + 2f_{xy}(x, y)(t - x)(s - y) + f_{yy}(x, y)(s - y)^2] + \\ & r(t - x, s - y)((t - x)^2 + (s - y)^2) \end{aligned} \quad (10.1.1)$$

şeklindedir.

Burada $r(x, y)$ kalan terimdir.

Bu yüzden

$$r(0,0) = 0 \quad (10.1.2)$$

dır.

Diğer yandan,

Lemma 10.1. ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\beta_n = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\gamma_n = 0$$

koşulları altında,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n P_{n,n}^{[\beta_n, \gamma_n]}(\varphi_x^1(t); x, y) = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n P_{n,n}^{[\beta_n, \gamma_n]}(\varphi_y^1(s); x, y) = 0.$$

$P_{n,n}^{[\beta_n, \gamma_n]}$ pozitif ve $\sqrt{n} \leq n$, $n \in \mathbb{N}_0$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} P_{n,n}^{[\beta_n, \gamma_n]}(\varphi_x^1(t); x, y) = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} P_{n,n}^{[\beta_n, \gamma_n]}(\varphi_y^1(s); x, y) = 0$$

olur ve iki değişkenli Taylor formülünün (10.1.1) her iki tarafına $P_{n,n}^{[\beta_n, \gamma_n]}(f; x, y)$ operatörü uygulanırsa;

$$\begin{aligned} n \left(P_{n,n}^{[\beta_n, \gamma_n]}(f(t, s); x, y) - f(x, y) \right) &= \left[f_x(x, y) n P_{n,n}^{[\beta_n, \gamma_n]}(\varphi_x^1(t); x, y) + \right. \\ &f_y(x, y) n P_{n,n}^{[\beta_n, \gamma_n]}(\varphi_y^1(s); x, y) \left. \right] + \frac{1}{2} \left[f_{xx}(x, y) n P_{n,n}^{[\beta_n, \gamma_n]}(\varphi_x^2(t); x, y) + \right. \\ &2f_{xy}(x, y) \sqrt{n} P_{n,n}^{[\beta_n, \gamma_n]}(\varphi_x^1(t); x, y) \sqrt{n} P_{n,n}^{[\beta_n, \gamma_n]}(\varphi_y^1(s); x, y) + f_{yy}(x, y) n P_{n,n}^{[\beta_n, \gamma_n]}(\varphi_y^2(s); x, y) \left. \right] + \\ &n P_{n,n}^{[\beta_n, \gamma_n]}(r(t - x, s - y)(\varphi_x^2(t) + \varphi_y^2(s); x, y)) \end{aligned} \quad (10.1.3)$$

(10.1.3) de son terimi Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden yararlanılarak;

$$\begin{aligned} n P_{n,n}^{[\beta_n, \gamma_n]}(r(t - x, s - y)(\varphi_x^2(t) + \varphi_y^2(s); x, y)) &\leq \\ \sqrt{n P_{n,n}^{[\beta_n, \gamma_n]}(r(t - x, s - y); x, y)} &\sqrt{n^2 P_{n,n}^{[\beta_n, \gamma_n]}((\varphi_x^2(t) + \varphi_y^2(s))^2; x, y)}. \end{aligned}$$

elde edilir.

(10.1.2) den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n P_{n,n}^{[\beta_n, \gamma_n]}(r(t - x, s - y); x, y)} = r(0,0) = 0 \quad (10.1.4)$$

dır.

Lemma 10.1. ve (10.1.4) ifadesi, (10.1.3) de kullanılırsa;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(P_{n,n}^{[\beta_n, \gamma_n]}(f(t, s); x, y) - f(x, y) \right) = \frac{x}{2} f_{xx}(x, y) + \frac{y}{2} f_{yy}(x, y)$$

elde edilir.

11. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde İki Değişkenli Genelleştirilmiş Jain Operatörlerinin kapalı aralıkta bazı yaklaşım özellikleri ve Süreklilik Modülü yardımıyla yaklaşım hızı incelenmiştir. Ayrıca Lipschitz sınıfındaki fonksiyonlar yardımıyla da yaklaşım hızı incelenmiştir. İki Değişkenli Jain Operatörünün Kantaroviç Tipli Bir Genellemesinin de yaklaşım özellikleri ve süreklilik modülü yardımıyla da yaklaşım hızı belirlenmiştir. Son olarak İki Değişkenli Jain Operatörlerinin Voronovskaja Asimptotik Yaklaşımı elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

1. King, J. P. (1982). Probabilistic analysis of Korovkin's theorem. *Journal of the Indian Mathematical Society*, 44, 51-58.
2. Mirakyan, G. M. (1941). Approximation of continuous function swith the aid of polynomials (Russian). *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 31, 201-205.
3. Jensen, J. L. (1902). Sur une identite d'abel et sur d'autres formules analogues. *Acta Mathematica*, 26(1), 307-318.
4. Dirik, F., and Demirci, K. (2011). Szasz-Mirakjan type operators of two variables providing a better estimation on $[0,1] \times [0,1]$. *Mathematics Vesnik*, 63, 59-66.
5. Agratini, O. (2013). Approximation properties of a class of linear operators. *Mathematics Method Applied Science*, 36, 2353-2358.
6. Patel, P. G. (2019). Some Approximation properties of new families of positive linear operators. *Filomat*, 33:17, 5477-5488.
7. Lorentz, G. G. (1986). Bernstein polynomials. *Chelsea Publ. Comp. New York, NY*, 1986.
8. Patel, P., and Mishra, V. N. (2019). On generalized Szasz-Mirakyan operators. *Arxiv preprint, arxiv: 1508.07896*.
9. Volkov, V. I. (1957). On the convergence of sequences of linear positive operators in the space of continuous functions of two variables. (Russian) *Doklady Akademii Nauk SSSR (N.S.)*, 115, 17-19.
10. Anastassiou, G. A., and Gal, S. G. (2000). Approximation theory: Moduli of continuity and global smoothness preservation. *Birkhauser Baston*, 2000.
11. Gupta, V., and Greubel, G. C. (2015). Moment estimations of new Szasz – Mirakyan – Durrmeyer operators. *Applied Mathematics and Computation*, 271, 540-547.
12. Muraru, C., Doğru, O., and Gülsün, A. (2020). A- Statistical L_p approximation properties of an integral variant of a general positive linear operators. *Tusi Mathematical Research Group*, 11:761, 761-779.
13. Deniz, E. (2016). Quantitative estimates for Jain-Kantorovich operators. *Community Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 65(2), 121-132.
14. Shisha, o., and Mond, B. (1968). The degree of convergence of linear positive operators. *Proceedings of National Academy of Sciences U.S.A*, 60, 1196-1200.
15. Doğru, O., Mohapatra, R. N., and Örkçü, M. (2016). Approximation properties of generalized Jain operators. *Filomat*, 30:19, 2359-2366.

16. Olgun, A., Taşdelen, F., and Erençin, A. (2015). A generalization of Jain's operators. *Applied Mathematics and Computation*, 266, 6-11.



GAZİ GELECEKTİR..