



RİESZ UZAYLARINDA SINIRSIZ SIRA SÜREKLİ OPERATÖRLER

Merve ÖZBEK GÜNACAR

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

HAZİRAN 2021

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
 - Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
 - Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
 - Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
 - Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,
- bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Merve ÖZBEK GÜNACAR

30/06/2021

RİESZ UZAYLARINDA SINIRSIZ SIRA SÜREKLİ OPERATÖRLER
(Yüksek Lisans Tezi)

Merve ÖZBEK GÜNACAR

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Haziran 2021

ÖZET

Bu tezde, Riesz uzaylarında sıra yakınsama ve sınırsız sıra yakınsama kavramları ve özellikleri detaylı bir şekilde incelenmiştir. Sonra bunlara bağlı verilen sıra sürekli ve sınırsız sıra sürekli operatörlerin özellikleri, bu operatör uzaylarının sıra sınırlı operatör uzayları içinde nasıl oturduğu verilmiştir.

Bilim Kodu : 20404
Anahtar Kelimeler : Sıra yakınsama, sınırsız sıra yakınsama
Sayfa Adedi : 69
Danışman : Prof. Dr. Bahri TURAN

UNBOUNDED ORDER CONTINUOUS OPERATORS ON RIESZ SPACES

(M. Sc. Thesis)

Merve ÖZBEK GÜNACAR

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

June 2021

ABSTRACT

In this thesis, the concepts and properties of order convergence and unbounded order convergence in Riesz spaces are examined in detail. Then, depending on these, the properties that order continuous and unbounded order continuous operators provide in order bounded operator spaces are given.

Science Code : 20404

Key Words : Order convergence, unbounded order convergence

Page Number : 69

Supervisor : Prof. Dr. Bahri TURAN

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim süresince ve tez çalışmamın her aşamasında bilgi birikimini benimle paylaşan, eleştirileriyle yol gösteren, sonsuz sabırla beni çalışmaya teşvik eden ve güven veren danışmanım Sayın Prof. Dr. Bahri TURAN'a, yardımlarını esirgemeyen arkadaşlarıma ve her zaman yanımda olan aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER.....	3
2.1. Riesz Uzayları	3
2.2. Riesz Uzaylarında Operatörler	7
3. SIRA YAKINSAMA VE SIRA SÜREKLİ OPERATÖRLER.....	11
3.1. Sıra Yakınsama ve Özellikleri	11
3.2. Sıra Sürekli Operatörler	34
4. SINIRSIZ SIRA YAKINSAMA	43
4.1. Sınırsız Sıra Yakınsama ve Özellikleri	43
5. SINIRSIZ SIRA SÜREKLİ OPERATÖRLER	53
5.1. Sınırsız Sıra Sürekli Dualler.....	53
5.2. Sınırsız Sıra Sürekli Operatörler	59
6. SONUÇ VE ÖNERİLER	65
KAYNAKLAR	67
ÖZGEÇMİŞ	69

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
x^+	x' 'in pozitif kısmı
x^-	x' 'in negatif kısmı
$ x $	x' 'in modülü
$x_\alpha \uparrow x$	Yukarı yönlendirilmiş ve supremumu x olan net
$x_\alpha \downarrow x$	Aşağı yönlendirilmiş ve infimumu x olan net
$x \vee y$	x ile y 'nin supremumu
$x \wedge y$	x ile y 'nin infimumu
$\sup A$	A kümesinin supremumu
$\inf A$	A kümesinin infimumu
E^δ	E in Dedekind tamlaması
$E^\sim$	E nin sıra duali
$L_b(E, F)$	E den F ye tanımlı sıra sınırlı operatörlerin kümesi
$L_o(E, F)$	E den F ye tanımlı sıra sürekli operatörlerin kümesi
$L_\sigma(E, F)$	E den F ye tanımlı σ - sıra sürekli operatörlerin kümesi
$E_o^\sim$	E nin sıra sürekli duali
$L_{uo}(E, F)$	E den F ye tanımlı sınırsız sıra sürekli operatörlerin kümesi
$L_{\sigma uo}(E, F)$	E den F ye tanımlı σ - sınırsız sıra sürekli operatörlerin kümesi
$E_{uo}^\sim$	E nin sınırsız sıra sürekli duali

1. GİRİŞ

1930'lu yıllarda F. Riesz, L. V. Kantorovich ve H. Freudenthal tarafından ilk çalışmaları yapılan Riesz uzayları teorisi yıllar içinde gelişerek analizi yapılmış ve fonksiyon cebirleri, diferansiyel denklemler, fuzzy uzaylar, ... gibi matematiğin çok farklı alanlarının yanı sıra matematiksel ekonomide de kendisine uygulama alanları bulmuştur [1-5].

Önemli bir çalışma alanı da sıralamadan doğan yakınsama kavramları ve yakınsamalarla elde edilen süreklilik kavramlarıdır. Bu tezde bunlardan önemli iki tanesi ele alınarak derinlemesine incelenmiştir. Bunlar *sıra yakınsama* ve *sınırsız sıra yakınsama* kavramları ile bunlara bağlı tanımlanan süreklilik kavramlarıdır.

E bir Riesz uzayı, $(x_\alpha) \subseteq E$ net ve $x \in E$ olmak üzere, her α için $\alpha_0 \leq \alpha$ iken

$|x_\alpha - x| \leq y_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde E içinde (y_α) neti ve α_0 varsa (x_α) , x e sıra yakınsaktır denir ve $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ şeklinde gösterilir. Her $u \in E^+$ için $|x_\alpha - x| \wedge u \xrightarrow{o} 0$ ise (x_α) , x e sınırsız sıra yakınsak denir ve $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ ile gösterilir.

Sınırsız sıra yakınsamanın incelenmesi, Birkhoff'un Ergodik teoremi ile bağlantılı olarak 1940'lı yılların sonlarında Nakano tarafından başlatılmıştır. 'Sınırsız sıra yakınsama' adı R. De Marr (1964) tarafından önerilmiştir. O zamandan beri yakınsamanın sınırsız versiyonlarını kullanarak araştırma fikri, çeşitli makalelerde kullanılarak son zamanlarda [6], [7], [8] makalelerinde yoğun olarak incelenmiştir.

E ve F Riesz uzay $T: E \rightarrow F$ bir operatör olmak üzere, E içinde $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ olan her (x_α) ağı için F içinde $Tx_\alpha \xrightarrow{o} Tx$ ise T ye *sıra sürekli* operatör denir. Sıra sürekli operatörlerin kümesi $L_n(E, F)$ biçiminde gösterilir. E içinde $x_n \xrightarrow{o} x$ olan her (x_n) dizisi için F içinde $Tx_n \xrightarrow{o} Tx$ ise T ye σ - *sıra sürekli* denir. σ - *sıra sürekli* operatörlerin kümesi $L_c(E, F)$ biçiminde gösterilir. Sıra süreklilik ile ilgili çalışmalar 1940'lı yıllarda T. Ogasawara tarafından ortaya atılan tanım ile başlamıştır ve halen güncelliğini sürdürmektedir.

E ve F Riesz uzayı, $T: E \rightarrow F$ bir operatör olsun. E içinde $x_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ olan her (x_α) ağı için F içinde $Tx_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ ise T ye *sınırsız sıra sürekli operatör* denir. Sınırsız sıra sürekli ve sıra sınırlı operatörlerin kümesi $L_{uo}(E, F)$ biçiminde gösterilir. Sınırsız sıra sürekli operatörler ilk olarak Akbar Bahramnezhad ve Kazem Haghnejad Azar ‘ın ‘Unbounded order continuous operators on Riesz spaces ‘ makalesinde incelenmiştir [9].

Bu çalışmada giriş kısmından sonra ikinci kısımda gerekli kullanacağımız tanımlar ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde sıra yakınsama kavramı incelenmiştir. Alt uzayın sıra yoğun, majorizing , sıra yakınsamaya göre yoğun ve regüler olması durumlarında, alt uzayda sıra yakınsama ile üst uzaydaki sıra yakınsama ilişkisi detaylandırılmıştır. E Riesz uzayı $Y \subseteq X$ Riesz alt uzayı olmak üzere Y regülerken Y içinde $y_\alpha \xrightarrow{o} y$ ise X içinde $y_\alpha \xrightarrow{o} y$ olduğu ve Y içinde $y_\alpha \downarrow 0$ ise X içinde $y_\alpha \downarrow 0$ olduğu verilmiştir. Bu kısım aynı dönem yüksek lisans yapan Sinem Simay Etyemez ile birlikte çalışılmıştır.

Sonrasında *sıra sürekli*, σ – *sıra sürekli* operatörlerin özellikleri, sıra sürekli operatörlerin uzayı $L_o(E, F)$ ve σ -sıra sürekli operatörlerin uzayı $L_\sigma(E, F)$ nin $L_b(E, F)$ içinde nasıl oturduğu incelenmiş, örnekler detaylandırılmıştır.

Dördüncü bölümde sınırsız sıra yakınsama ve özellikler incelenmiştir. Sıra yakınsama için gösterilen özellikler sınırsız sıra yakınsama için de Sinem Simay Etyemez ile birlikte çalışılmıştır.

Beşinci bölümde 2018 yılında yayımlanan makalede [9] ilk kez tanımlanan sınırsız sıra sürekli kavramı incelenmiştir. İlk olarak sınırsız sıra sürekli dualler sonra genel sınırsız sıra sürekli operatörler verilmiştir. E Riesz uzayı üzerinde tanımlı herhangi bir f fonksiyoneli sınırsız sıra sürekli iken f^+ , f^- ve $|f|$ nin de sıra sürekli olduğu gösterilmiştir. Reel sayılarda sıra yakınsama ile sınırsız sıra yakınsamanın denk olduğu verilmiştir. E Riesz uzayı olmak üzere E nin sınırsız sıra sürekli dualinin E nin sıra sürekli duali içinde ideal olduğu gösterilmiş ancak her zaman band olmadığını veren örnek incelenmiştir. Bir operatörün uo – sürekliliği ile o – sürekliliğinin ve $u\sigma o$ – sürekliliği ile σo – sürekliliğinin hangi durumlarda denk olduğu çalışılmıştır. Çalışma boyunca tüm Riesz uzayları Arşimedyan olarak alınmıştır.

2. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

Bu bölümde çalışmamız için gerekli temel kavramlar ve bazı teoremler [4, 5, 10] kullanılarak verilmiştir.

2.1. Riesz Uzayları

2.1.1. Tanım

E bir reel vektör uzayı ve “ $\leq$ ”, E de bir sıralama bağıntısı olsun.

- i. Her $x, y, z \in E$ için $x \leq y$ iken $x + z \leq y + z$
- ii. Her $x, y \in E$ için $\lambda \geq 0$ olmak üzere $x \leq y$ iken $\lambda x \leq \lambda y$

koşulları sağlanıyorsa E ye *sıralı vektör uzayı* denir.

2.1.2. Tanım

E sıralı vektör uzay olsun. Her $x, y \in E$ için, $\{x, y\}$ ikilisinin E içinde supremumu veya infumumu var ise E ye *Riesz uzayı* denir.

$x, y \in E$ için ;

$$\sup\{x, y\}: x \vee y$$

$$\inf\{x, y\}: x \wedge y$$

şeklinde gösterilir.

2.1.3. Tanım

$(\wedge, \leq)$ yönlendirilmiş bir küme ve $E \neq \emptyset$ bir küme olsun. $\wedge$ dan E de tanımlı her fonksiyona E de bir *net* denir.

2.1.4. Tanım

$\{x_\alpha\}$, E Riesz uzayında bir net olmak üzere her $x_\beta, x_\gamma \in \{x_\alpha\}$ için $x_\beta \leq x_\delta$ ve $x_\gamma \leq x_\delta$ olacak şekilde en az bir $x_\delta \in \{x_\alpha\}$ varsa $\{x_\alpha\}$ netine *yukarı yönlendirilmiş net* denir ve $x_\alpha \uparrow$ şeklinde gösterilir.

Benzer şekilde her $x_\beta, x_\gamma \in \{x_\alpha\}$ için $x_\delta \leq x_\beta$ ve $x_\delta \leq x_\gamma$ olacak şekilde en az bir

$x_\delta \in \{x_\alpha\}$ varsa $\{x_\alpha\}$ netine *aşağı yönlendirilmiş net* denir ve $x_\alpha \downarrow$ şeklinde gösterilir.

$x_\alpha \uparrow$ ve $\sup x_\alpha = x$ ise $x_\alpha \uparrow x$ şeklinde, $x_\alpha \downarrow$ ve $\inf x_\alpha = x$ ise $x_\alpha \downarrow x$ şeklinde gösterilir.

2.1.5. Tanım

Bir Riesz uzayının boştan farklı ve üstten (alttan) sınırlı her altkümesinin bir supremumu (infimumu) varsa o Riesz uzayına *Dedekind tam Riesz uzayı* denir.

2.1.6. Tanım

E bir Riesz uzayı, $x \in E$ olsun.

- i. $x \vee 0$ elemanına x in *pozitif kısmı* denir ve x^+ şeklinde gösterilir.
- ii. $(-x) \vee 0$ elemanına x in *negatif kısmı* denir ve x^- şeklinde gösterilir.
- iii. $x \vee (-x)$ elemanına x in *modülü* denir ve $|x|$ şeklinde gösterilir.

2.1.1. Teorem

E Riesz uzayı, x, y, z ve $\lambda \in \mathbf{R}$ olmak üzere aşağıdakiler sağlanır.

1) $||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$ dir.

2) $|x \vee z - y \vee z| \leq |x| - |y|$ ve $|x \wedge z - y \wedge z| \leq |x| - |y|$ dir.

$$3) \quad |\lambda x + \lambda y| \leq |\lambda| |x + y| \quad \text{ve} \quad |\lambda x - \lambda y| \leq |\lambda| |x - y|$$

2.1.2. Teorem

E Riesz uzayı, $\emptyset \neq A \subseteq E$ bir küme olmak üzere $\inf A$, $\sup A$ var ve $\sup A = a \in E$ ise aşağıdakiler sağlanır.

$$i) \quad -A := \{-a : a \in A\} \text{ kümesinin infimumu var ve } \inf(-A) = -\sup A \text{ dir.}$$

$$ii) \quad \text{Her } x \text{ vektörü için } x + A := \{x + a : a \in A\} \text{ kümesinin supremumu var ve} \\ \sup(x + A) = x + \sup A \text{ dir.}$$

$$iii) \quad \text{Her } \lambda \in \mathbf{R} \text{ ve } \lambda \geq 0 \text{ için } \lambda A := \{\lambda a : a \in A\} \text{ kümesinin supremumu var ve} \\ \sup(\lambda A) = \lambda \sup A \text{ dir.}$$

$$iv) \quad E \text{ içinde } A \subseteq B \text{ ise } \inf B \leq \inf A \text{ ve } \sup A \leq \sup B \text{ dir.}$$

2.1.3. Teorem

E Riesz uzayı $x, y, z \in E$ olmak üzere aşağıdakiler sağlanır.

$$1) \quad x \vee y = -[(-x) \wedge (-y)] \quad \text{ve} \quad x \wedge y = -[(-x) \vee (-y)] .$$

$$2) \quad x + y = x \wedge y + x \vee y .$$

$$3) \quad x + (y \vee z) = (x + y) \vee (x + z) .$$

$$4) \quad \text{Her } \alpha \geq 0 \text{ için, } \alpha(x \vee y) = (\alpha x) \vee (\alpha y) \text{ ve } \alpha(x \wedge y) = (\alpha x) \wedge (\alpha y) .$$

2.1.7. Tanım

E Riesz uzayında her $x \in E^+$ ve her $n \in \mathbf{N}$ için $n^{-1}x \downarrow 0$ ise E ye *Archimedian Riesz uzayı* denir.

2.1.8. Tanım

E bir Riesz uzayı ve $x, y \in E$ olsun. $|x| \wedge |y| = 0$ ise x ile y birbirine diktir denir ve $x \perp y$ şeklinde gösterilir. $\emptyset \neq A \subseteq E$ için $A^d = \{y \in E: \forall x \in A, x \perp y\}$ kümesine A nın *diki* denir.

$A \cap A^d = \{0\}$ dır.

2.1.9. Tanım

E Riesz uzayı ve $(x_n) \subseteq E$ bir dizi olsun. $n \neq m$ için $x_n \perp x_m$ oluyorsa x_n e *dik dizi* denir.

2.1.10. Tanım

E bir Riesz uzayı $A \subseteq E$ alt küme olmak üzere $x \in A$ olsun. Her $y \in E$ için $|y| \leq |x|$ iken $y \in A$ oluyorsa A ya *solid küme* denir.

A solid alt uzay ise A ya *ideal* denir.

2.1.11. Tanım

E bir Riesz uzayı ve A, E de ideal olsun. Her $\emptyset \neq B \subseteq A$ için $\sup B \in E$ iken $\sup B \in A$ oluyorsa A ya *band* denir.

Bir A idealinin band olduğunu göstermek için $(x_\alpha) \subseteq A$ neti için $0 \leq x_\alpha \uparrow x$ iken $x \in A$ olduğunu göstermek yeterlidir.

2.1.12. Tanım

E bir Riesz uzayı ve $\|\cdot\|$ E üzerinde norm olsun. Her $x, y \in E$ için $|x| \leq |y|$ iken

$\|x\| \leq \|y\|$ ise bu norma *örgü norm* denir. Üstelik E , bu norma göre tamsa *Banach örgüsü* denir.

2.1.1. Lemma

E bir Riesz uzayı, $\{x_\alpha\}$, $\{y_\alpha\}$ E Riesz uzayında bir net ve $x \in E$ olmak üzere aşağıdakiler sağlanır.

- i) $x_\alpha \downarrow x$ ise $-x_\alpha \uparrow -x$ dır.
- ii) $x_\alpha \downarrow x$ ve $y_\alpha \downarrow y$ ise $(x_\alpha + y_\alpha) \downarrow (x + y)$ dır.
- iii) $x_\alpha \downarrow x$ ise $\lambda \geq 0$ olmak üzere $\lambda x_\alpha \downarrow \lambda x$ dır.
- iv) $x_\alpha \uparrow x$ ise $(x - x_\alpha) \downarrow 0$ dır.

2.2. Riesz Uzaylarında Operatörler

2.2.1. Tanım

$(E, \leq)$ sıralı vektör uzayı ve $A \subseteq E$ olsun. Eğer $A \subseteq [a, b]$ olacak şekilde $a, b \in E$ varsa A ya *sıra sınırlı küme* denir.

E, F sıralı vektör uzayı olsun. E nin sıra sınırlı alt kümelerini F nin sıra sınırlı alt kümelerine dönüştüren $T : E \rightarrow F$ operatörüne *sıra sınırlı operatör* denir. Sıra sınırlı operatörlerin kümesi $L_b(E, F)$ ile gösterilir.

- $L_b(E, F) = \{T \mid T: E \rightarrow F \text{ sıra sınırlı operatör}\} \subseteq L(E, F)$ dir. Operatörlerin toplamı ve skalerle çarpma işlemlerine göre $L_b(E, F)$ bir reel vektör uzayıdır.
- E ve F Riesz uzayı her $S, T \in L_b(E, F)$ ve her $x \in E^+$ için $S \leq T \Leftrightarrow S(x) \leq T(x)$ sırlaması ile $L_b(E, F)$ sıralı vektör uzayıdır.

2.2.2. Tanım

E ve F sıralı vektör uzayı ve $T : E \rightarrow F$ lineer operatör olsun. Her $x \in E^+$ için $T(x) \in F^+$ ise T operatörüne *pozitif operatör* denir

Her pozitif operatör sıra sınırlıdır.

2.2.3. Tanım

E ve F Riesz uzayı olsun. $T : E \rightarrow F$ bir operatör olmak üzere $T \vee (-T) \in L(E, F)$ varsa bu operatöre T nin modülü denir ve $|T|$ şeklinde gösterilir.

2.2.1. Teorem

E ve F Riesz uzayı, F Dedekind tam Riesz uzay iken $L_b(E, F)$ operatör uzayı Dedekind tam Riesz uzayıdır. Bu durumda $L_b(E, F)$ nin örgü operasyonları her $S, T \in L_b(E, F)$ ve her $x \in E^+$ için

$$T^+(x) = \sup \{Ty : 0 \leq y \leq x\}$$

$$T^-(x) = \sup \{-Ty : 0 \leq y \leq x\}$$

$$|T|(x) = \sup \{|Ty| : |y| \leq x\}$$

$$[S \vee T](x) = \sup \{S(y) + T(z) : y, z \in E^+ \text{ ve } y + z = x\},$$

$$[S \wedge T](x) = \inf \{S(y) + T(z) : y, z \in E^+ \text{ ve } y + z = x\}$$

dir.

2.2.4. Tanım

E ve F Riesz uzayı, $T : E \rightarrow F$ operatör olsun. Eğer her $x, y \in E$ için,

- 1) $x \perp y$ iken $Tx \perp Ty$ ise T ye dikliği koruyan operatör denir.
- 2) $T(x \vee y) = Tx \vee Ty$ ise T ye Riesz homomorfizmi ya da örgü homomorfizmi denir.

Dikliği koruyan operatörler pozitif ise örgü homomorfizmidir. Tersine örgü homomorfizmi pozitif diklik koruyan operatördür.

2.2.1. Lemma

E ve F Riesz uzayı $T: E \rightarrow F$ sıra sınırlı ve dikliği koruyan operatör olmak üzere bu durumda $|T|$ vardır ve yukarıdaki vurgudan dolayı örgü homomorfizmidir.

Ayrıca her $x \in E$ için $|T(x)| = |T||x|$ dir.

3. SIRA YAKINSAMA VE SIRA SÜREKLİ OPERATÖRLER

3.1. Sıra Yakınsama ve Özellikleri

Bu bölümde sıra yakınsama konusu temel oluşturmak için [8] de verilen “Uo-convergence and its applications to Cesàro means in Banach lattices” isimli makale detaylı olarak incelenmiştir.

3.1.1. Tanım

E Riesz uzayı, $(x_\alpha) \subseteq E$ net ve $x \in E$ olsun. Her α için $\alpha_0 \leq \alpha$ iken

$|x_\alpha - x| \leq y_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde $(y_\alpha) \subseteq E$ neti ve α_0 varsa (x_α) neti, x e *sıra yakınsaktır* denir ve $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ şeklinde gösterilir.

3.1.1. Lemma

E Riesz uzayı, $(x_\alpha), (y_\alpha) \subseteq E$ net, $x, y \in E$ ve $a, b \in \mathbf{R}$ olsun. Aşağıdakiler sağlanır.

(i) $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ ve $x_\alpha \xrightarrow{o} y$ ise $x = y$ dir.

(ii) $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ ve $y_\alpha \xrightarrow{o} y$ için

- $ax_\alpha + by_\alpha \xrightarrow{o} ax + by$

- $x_\alpha \vee y_\alpha \xrightarrow{o} x \vee y$

- $x_\alpha \wedge y_\alpha \xrightarrow{o} x \wedge y$

- $x_\alpha^+ \xrightarrow{o} x^+$

- $x_\alpha^- \xrightarrow{o} x^-$

- $|x_\alpha| \xrightarrow{o} |x|$

(iii) Her α için $x_\alpha \geq y$ ve $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ ise $x \geq y$ dir.

(iv) $x_\alpha \uparrow (x_\alpha \downarrow)$ ve $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ ise $x_\alpha \uparrow x (x_\alpha \downarrow x)$ dir.

İspat

(i) $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ ise her α için $\alpha_1 \leq \alpha$ iken $|x_\alpha - x| \leq p_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde $(p_\alpha) \subseteq E$ neti ve α_1 vardır. $x_\alpha \xrightarrow{o} y$ ise her α için $\alpha_2 \leq \alpha$ iken $|x_\alpha - y| \leq q_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde $(q_\alpha) \subseteq E$ neti ve α_2 vardır. $\wedge$ yukarı yönlendirilmiş olduğundan $\alpha_1 \leq \alpha_3$ ve $\alpha_2 \leq \alpha_3$ olacak şekilde

$\alpha_3 \in \Lambda$ vardır. Her α için $\alpha_3 \leq \alpha$ iken Teorem 2.1.1 den

$$\begin{aligned} 0 \leq |x - y| &= |x - x_\alpha + x_\alpha - y| \\ &\leq |x - x_\alpha| + |x_\alpha - y| \\ &\leq (p_\alpha + q_\alpha) \downarrow 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Buradan $|x - y| = 0$ ve böylece $x - y = 0$ elde edilir.

- $p_\alpha \downarrow 0$ ve $q_\alpha \downarrow 0$ ise $|a|p_\alpha \downarrow 0$ ve $|b|q_\alpha \downarrow 0$ dır.

Dolayısıyla Lemma 2.1.1 den $(|a|p_\alpha + |b|q_\alpha) \downarrow 0$ olur. Ayrıca Teorem 2.1.1 den

$$|ax_\alpha + by_\alpha - ax - by| \leq |a||x_\alpha - x| + |b||y_\alpha - y| \leq (|a|p_\alpha + |b|q_\alpha) \downarrow 0$$

bulunur. O halde $ax_\alpha + by_\alpha \xrightarrow{o} ax + by$ elde edilir. Teorem 2.1.1 ve Tanım 2.1.6 göz önüne alınarak aşağıdakiler elde edilir.

- $|x_\alpha \vee y_\alpha - x \vee y| = |x_\alpha \vee y_\alpha - x \vee y_\alpha + x \vee y_\alpha - x \vee y|$
 $\leq |x_\alpha \vee y_\alpha - x \vee y_\alpha| + |x \vee y_\alpha - x \vee y|$
 $\leq |x_\alpha - x| + |y_\alpha - y|$
 $\leq (p_\alpha + q_\alpha) \downarrow 0$

bulunur. O halde $x_\alpha \vee y_\alpha \xrightarrow{o} x \vee y$ elde edilir.

- $|x_\alpha \wedge y_\alpha - x \wedge y| = |x_\alpha \wedge y_\alpha - x \wedge y_\alpha + x \wedge y_\alpha - x \wedge y|$
 $\leq |x_\alpha \wedge y_\alpha - x \wedge y_\alpha| + |x \wedge y_\alpha - x \wedge y|$
 $\leq |x_\alpha - x| + |y_\alpha - y|$
 $\leq (p_\alpha + q_\alpha) \downarrow 0$

bulunur. O halde $x_\alpha \wedge y_\alpha \xrightarrow{o} x \wedge y$ elde edilir.

- $|x_\alpha^+ - x^+| = |(x_\alpha \vee 0) - (x \vee 0)|$
 $\leq |x_\alpha - x|$
 $\leq p_\alpha \downarrow 0$

bulunur. O halde $x_\alpha^+ \xrightarrow{o} x^+$ elde edilir.

- $|x_\alpha^- - x^-| = |(-x_\alpha \vee 0) - (-x \wedge 0)|$
 $= |(x - x_\alpha) \vee 0|$
 $\leq |x - x_\alpha|$
 $\leq p_\alpha \downarrow 0$

bulunur. O halde $x_\alpha^- \xrightarrow{o} x^-$ elde edilir.

- $||x_\alpha| - |x|| = |(x_\alpha^+ + x_\alpha^-) - (x^+ - x^-)|$
 $= |(x_\alpha^+ - x^+) + (x_\alpha^- - x^-)|$
 $\leq |x_\alpha^+ - x^+| + |x_\alpha^- - x^-|$
 $\leq p_\alpha \downarrow 0$

bulunur. O halde $|x_\alpha| \xrightarrow{o} |x|$ elde edilir.

(ii) $x_\alpha \geq 0$ ve $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ olsun. (ii) den $x_\alpha^+ \xrightarrow{o} x^+$ ve $x_\alpha \geq 0$ olduğundan $x_\alpha^+ = x_\alpha$ dir.
 $x_\alpha^+ \xrightarrow{o} x^+$ ve $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ ise $x^+ = x$ dir. Yani $x \geq 0$ olur. $(x_\alpha - y) \geq 0$ ve (ii) den
 $(x_\alpha - y) \xrightarrow{o} (x - y)$ dir. Yukarıdaki ispattan $(x - y) \geq 0$ olduğundan $x \geq y$ dir.

(iii) $x_\alpha \uparrow$ ve $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ olsun. Lemma 2.1.1 den $-x_\alpha \downarrow$ ve her $x \in E$ için $(x - x_\alpha) \downarrow$ dir.
 $x^- \leq |x|$ olduğundan keyfi $\beta \leq \alpha$ için

$$\begin{aligned} \beta \leq \alpha &\Rightarrow x_\beta \leq x_\alpha \\ &\Rightarrow -x_\alpha \leq -x_\beta \\ &\Rightarrow x - x_\alpha \leq x - x_\beta \\ &\Rightarrow -(x - x_\beta) \leq -(x - x_\alpha) \\ &\Rightarrow -(x - x_\beta) \vee 0 \leq -(x - x_\alpha) \vee 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (x - x_\beta)^- \leq (x - x_\alpha)^-$$

olduğu düşünülürse $(x - x_\beta)^- \leq (x - x_\alpha)^- \leq |x - x_\alpha|$ bulunur. Ayrıca $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ olduğundan

$0 \leq (x - x_\beta)^- \leq (x - x_\alpha)^- \leq |x - x_\alpha| \leq p_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde (p_α) neti vardır. Buradan

$$0 \leq (x - x_\beta)^- \leq p_\alpha \downarrow 0 \Rightarrow -(x - x_\beta) \vee 0 = 0$$

$$\Rightarrow -x + x_\beta \leq 0$$

$$\Rightarrow x_\beta \leq x$$

olur. O halde x, x_β için bir üst sınır oldu. Her α için Teorem 2.1.2 kullanılarak

$$0 \leq (x - x_\alpha) \leq |x - x_\alpha| \leq p_\alpha \Rightarrow 0 \leq \inf_\alpha (x - x_\alpha) \leq p_\alpha \downarrow 0$$

$$\Rightarrow \inf_\alpha (x - x_\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow x = \sup_\alpha (x_\alpha)$$

bulunur. Böylece $x_\alpha \uparrow x$ elde edilir.

3.1.2. Lemma

E Riesz uzayı ve $(x_n) \subseteq E$ için aşağıdakiler sağlanır.

(i) $x_n \xrightarrow{o} 0$ ise (x_n) sıra sınırlıdır.

(ii) $x_n \xrightarrow{o} x$ ise (x_n) sıra sınırlıdır.

İspat

(i) $x_n \xrightarrow{o} 0$ ise $n_0 \leq n$ iken $|x_n| \leq y_n \downarrow 0$ olacak şekilde en az bir n_0 vardır. Her $n \in N$ için $n_0 \leq n$ iken $y_n \leq y_{n_0}$ dir. Buradan $n_0 \leq n$ iken $|x_n| \leq y_n \leq y_{n_0}$ elde edilir.

$|x_1| \vee |x_2| \vee |x_3| \vee \dots \vee |x_{n_0-1}| = z$ alalım. Keyfi $x_k \in (x_n)$ seçelim.

1.durum : $k \geq n_0$ için $|x_k| \leq y_{n_0} \leq y_{n_0} + z$

2.durum : $k < n_0$ için $|x_k| \leq z \leq y_{n_0} + z$ dir. O halde $(x_n) \subseteq [-y_{n_0} - z, y_{n_0} + z]$ olup (x_n) sıra sınırlıdır.

(ii) $x_n \xrightarrow{o} x$ ise $x_n - x \xrightarrow{o} 0$ ve ispat (i) den $x_n - x$ sınırlıdır. En az bir $u \in X^+$ için

$(x_n - x) \subseteq [-u, u]$ olduğundan $(x_n) \subseteq [-u - |x|, u + |x|]$ dir. Dolayısıyla (x_n) sıra sınırlıdır.

3.1.2. Tanım

E Dedekind tam Riesz uzayı ve $(x_\alpha) \subseteq E$ sıra sınırlı net olsun. Her α ve β için

$V_\alpha(\bigwedge_{\beta \geq \alpha}(x_\beta)) = \liminf_\alpha(x_\alpha)$ ifadesine alt limit ve $\bigwedge_\alpha(V_{\beta \geq \alpha}(x_\beta)) = \limsup_\alpha(x_\alpha)$ ifadesine üst limit denir.

3.1.1. Önerme

E Dedekind tam Riesz uzayı ve $(x_\alpha) \subseteq E$ sıra sınırlı net ve $x \in E$ olsun. $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ olması için gerek ve yeter koşul $x = \limsup_\alpha(x_\alpha) = \liminf_\alpha(x_\alpha)$ olmasıdır.

İspat

E Dedekind tam Riesz uzayı ve $(x_\alpha) \subseteq E$ sıra sınırlı net ve $x \in E$ olmak üzere, tanımı hatırlarsak

$$x = \limsup_\alpha(x_\alpha) = \liminf_\alpha(x_\alpha) \text{ alınır} \quad \limsup_\alpha(x_\alpha) = \bigwedge_\alpha \left(\sup_{\beta \geq \alpha}(x_\beta) \right) = \bigwedge_\alpha (V_{\beta \geq \alpha}(x_\beta))$$

ve $\liminf_\alpha(x_\alpha) = \sup_\alpha \left(\inf_{\beta \geq \alpha}(x_\beta) \right) = V_\alpha(\bigwedge_{\beta \geq \alpha}(x_\beta))$ dir.

$y_\alpha = V_{\beta \geq \alpha}(x_\beta)$ alınır y_α nın azalan olduğunu gösterelim.

$y_{\alpha_1} = V_{\beta \geq \alpha_1}(x_\beta)$ ve $y_{\alpha_2} = V_{\beta \geq \alpha_2}(x_\beta)$ olsun. $\bigwedge$ yukarı yönlendirilmiş olduğundan $\alpha_1, \alpha_2 \in \bigwedge$ olmak üzere $\alpha_1 \leq \alpha_3$ ve $\alpha_2 \leq \alpha_3$ olacak şekilde $\alpha_3 \in \bigwedge$ vardır. $y_{\alpha_3} = V_{\beta \geq \alpha_3}(x_\beta)$ olsun.

$$A_1 = \{x_\beta : \beta \in \Lambda, \beta \geq \alpha_1\}$$

$$A_2 = \{x_\beta : \beta \in \Lambda, \beta \geq \alpha_2\}$$

$$A_3 = \{x_\beta : \beta \in \Lambda, \beta \geq \alpha_3\}$$

şeklinde tanımlansın. $\alpha_1 \leq \alpha_3$ ve $\alpha_2 \leq \alpha_3$ iken $A_3 \subseteq A_1$ ve $A_3 \subseteq A_2$ olduğundan

$\sup A_3 \leq \sup A_1$ ve $\sup A_3 \leq \sup A_2$ olup $y_{\alpha_3} \leq y_{\alpha_1}$ ve $y_{\alpha_3} \leq y_{\alpha_2}$ elde edilir.

$z_\alpha = \bigwedge_{\beta \geq \alpha} (x_\beta)$ alınırsa z_α artandır . Gösterelim.

$z_{\alpha_1} = \bigwedge_{\beta \geq \alpha_1} (x_\beta)$ ve $z_{\alpha_2} = \bigwedge_{\beta \geq \alpha_2} (x_\beta)$ olsun. Λ yukarı yönlendirilmiş olduğundan $\alpha_1, \alpha_2 \in \Lambda$ olmak üzere $\alpha_1 \leq \alpha_3$ ve $\alpha_2 \leq \alpha_3$ olacak şekilde $\alpha_3 \in \Lambda$ vardır.

$z_{\alpha_3} = \bigwedge_{\beta \geq \alpha_3} (x_\beta)$ olsun.

$$B_1 = \{x_\beta : \beta \in \Lambda, \beta \geq \alpha_1\}$$

$$B_2 = \{x_\beta : \beta \in \Lambda, \beta \geq \alpha_2\}$$

$$B_3 = \{x_\beta : \beta \in \Lambda, \beta \geq \alpha_3\}$$

şeklinde tanımlansın. $\alpha_1 \leq \alpha_3$ ve $\alpha_2 \leq \alpha_3$ seçildiğinden $B_3 \subseteq B_1$ ve $B_3 \subseteq B_2$ olduğundan

$\inf B_1 \leq \inf B_3$ ve $\inf B_2 \leq \inf B_3$ olup $z_{\alpha_1} \leq z_{\alpha_3}$ ve $z_{\alpha_2} \leq z_{\alpha_3}$ elde edilir. Hipotez göz önüne alındığında $y_\alpha \downarrow x$ ve $z_\alpha \uparrow x$ dir.

$u_\alpha = y_\alpha - z_\alpha$ olsun. u_α nın azalan olduğunu gösterelim.

Her α için $z_\alpha = \bigwedge_{\beta \geq \alpha} (x_\beta) \leq \bigvee_{\beta \geq \alpha} (x_\beta) = y_\alpha$ olduğundan $y_\alpha - z_\alpha \geq 0$ olur.

$u_{\alpha_1} = y_{\alpha_1} - z_{\alpha_1}$ ve $u_{\alpha_2} = y_{\alpha_2} - z_{\alpha_2}$ olsun. Λ yukarı yönlendirilmiş olduğundan

$\alpha_1, \alpha_2 \in \Lambda$ olmak üzere $\alpha_1 \leq \alpha_3$ ve $\alpha_2 \leq \alpha_3$ olacak şekilde $\alpha_3 \in \Lambda$ vardır.

$u_{\alpha_3} = y_{\alpha_3} - z_{\alpha_3}$ olsun. y_α azalan olduğundan $y_{\alpha_3} \leq y_{\alpha_1}$ ve $y_{\alpha_3} \leq y_{\alpha_2}$ ve z_α artan olduğundan $z_{\alpha_1} \leq z_{\alpha_3}$ ve $z_{\alpha_2} \leq z_{\alpha_3}$ olmasından $-z_{\alpha_3} \leq -z_{\alpha_1}$ ve $-z_{\alpha_3} \leq -z_{\alpha_2}$ dir. Buradan $y_{\alpha_3} - z_{\alpha_3} \leq y_{\alpha_1} - z_{\alpha_1}$ ve

$y_{\alpha_3} - z_{\alpha_3} \leq y_{\alpha_2} - z_{\alpha_2}$ yani $u_{\alpha_3} \leq u_{\alpha_1}$ ve $u_{\alpha_3} \leq u_{\alpha_2}$ dir. Dolayısıyla u_α azalandır.

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \inf_{\alpha}(u_{\alpha}) = \inf_{\alpha}(y_{\alpha} - z_{\alpha}) \\
 &= \inf_{\alpha}(y_{\alpha}) + \inf_{\alpha}(-z_{\alpha}) \\
 &= \inf_{\alpha}(y_{\alpha}) - \sup_{\alpha}(z_{\alpha}) \\
 &= x - x \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

olduğundan $\inf_{\alpha}(u_{\alpha}) = 0$ dır.

$x \geq \bigwedge_{\beta \geq \alpha}(x_{\beta}) = z_{\alpha}$ ve $x_{\alpha} \leq \bigvee_{\beta \geq \alpha}(x_{\beta}) = y_{\alpha}$ olduğundan

$x_{\alpha} - x \leq \bigvee_{\beta \geq \alpha}(x_{\beta}) - \bigwedge_{\beta \geq \alpha}(x_{\beta}) = u_{\alpha}$ dır.

$x \leq \bigvee_{\beta \geq \alpha}(x_{\beta})$ ve $x_{\alpha} \geq \bigwedge_{\beta \geq \alpha}(x_{\beta})$ olduğundan

$x - x_{\alpha} \leq \bigvee_{\beta \geq \alpha}(x_{\beta}) - \bigwedge_{\beta \geq \alpha}(x_{\beta}) = u_{\alpha}$ dır. Dolayısıyla $|x - x_{\alpha}| \leq u_{\alpha} \downarrow 0$ olacak şekilde (u_{α}) bulunduğundan $x_{\alpha} \xrightarrow{o} x$ dir.

Tersine $x_{\alpha} \xrightarrow{o} x$ olsun. Her ise her α için $\alpha_0 \leq \alpha$ iken $|x_{\alpha} - x| \leq y_{\alpha} \downarrow 0$ olacak şekilde $(y_{\alpha}) \subseteq E$ neti ve α_0 vardır. $\alpha_0 \leq \alpha$ için $|x_{\alpha} - x| \leq y_{\alpha}$ olduğundan $-y_{\alpha} \leq x_{\alpha} - x \leq y_{\alpha}$ dır.

$$\begin{aligned}
x_\alpha - x \leq y_\alpha &\Rightarrow x_\alpha \leq y_\alpha + x \\
&\Rightarrow \bigvee_{\beta \geq \alpha} (x_\beta) \leq \bigvee_{\beta \geq \alpha} (y_\alpha + x) = x + \bigvee_{\beta \geq \alpha} (y_\beta) \\
&\Rightarrow \bigwedge_\alpha (\bigvee_{\beta \geq \alpha} (x_\beta)) \leq x + \bigwedge_\alpha (\bigvee_{\beta \geq \alpha} (y_\beta)) = x + \bigwedge_\alpha (y_\alpha) = x \\
&\Rightarrow \limsup_\alpha (x_\alpha) \leq x
\end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
-y_\alpha \leq x_\alpha - x &\Rightarrow x - y_\alpha \leq x_\alpha \\
&\Rightarrow \bigwedge_{\beta \geq \alpha} (x - y_\beta) \leq \bigwedge_{\beta \geq \alpha} (x_\beta) \\
&\Rightarrow x - \bigvee_{\beta \geq \alpha} (y_\beta) \leq \bigwedge_{\beta \geq \alpha} (x_\beta) \\
&\Rightarrow x - \bigwedge_\alpha (\bigvee_{\beta \geq \alpha} (x_\beta)) \leq x - \bigwedge_\alpha (y_\alpha) = x - 0 = \bigvee_\alpha (\bigwedge_{\beta \geq \alpha} (x_\beta)) \\
&\Rightarrow x \leq \bigvee_\alpha (\bigwedge_{\beta \geq \alpha} (x_\beta)) \\
&\Rightarrow x \leq \liminf_\alpha (x_\alpha)
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca her $\beta \geq \alpha$ ve keyfi sabit $\alpha \geq \gamma$ için

$$\begin{aligned}
\bigwedge_{\beta \geq \alpha} (x_\beta) \leq x_\gamma \leq \bigvee_{\beta \geq \alpha} (x_\beta) &\Rightarrow \bigwedge_{\beta \geq \alpha} (x_\beta) \leq x_\gamma \leq \bigwedge_\alpha (\bigvee_{\beta \geq \alpha} (x_\beta)) \\
&\Rightarrow \bigvee_\alpha (\bigwedge_{\beta \geq \alpha} (x_\beta)) \leq x_\gamma \leq \bigwedge_\alpha (\bigvee_{\beta \geq \alpha} (x_\beta)) \\
&\Rightarrow \bigvee_\alpha (\bigwedge_{\beta \geq \alpha} (x_\beta)) \leq \bigwedge_\alpha (\bigvee_{\beta \geq \alpha} (x_\beta))
\end{aligned}$$

olur. Yani $x \leq \liminf_\alpha (x_\alpha) \leq \limsup_\alpha (x_\alpha) \leq x$ dir.

O halde $x = \limsup_\alpha (x_\alpha) = \liminf_\alpha (x_\alpha)$ elde edilir.

3.1.3. Tanım

E Riesz uzayı ve $Y \subseteq E$ Riesz alt uzayı olsun.

(i) Her $0 < x \in E$ için $0 < y \leq x$ olacak şekilde en az bir $y \in Y$ varsa Y ye E içinde *sıra yoğun* denir.

(ii) Her $x \in E$ için $x \leq y$ olacak şekilde en az bir $y \in Y$ varsa Y ye *majorizing* denir.

(iii) Her $x \in E$ için $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ olacak şekilde $(x_\alpha) \subseteq Y$ neti varsa Y ya E içinde *sıra yakınsamaya göre yoğun* denir.

(iv) $A \subseteq Y$ olsun. Y içinde $\inf A$ var ve E içindeki $\inf A$ ya eşit ise Y ye *regüler* denir.

3.1.3. Lemma

E Riesz uzayı ve $Y \subseteq E$ Riesz alt uzayı olsun. Aşağıdakiler denktir.

(i) Y regülerdir.

(ii) Y içinde $\sup A$ var ise E içinde $\sup A$ vardır ve bu ikisi birbirine eşittir.

(iii) Y içinde $y_\alpha \xrightarrow{o} y$ ise E içinde $y_\alpha \xrightarrow{o} y$ dir.

(iv) Y içinde $y_\alpha \downarrow 0$ ise E içinde $y_\alpha \downarrow 0$ dır.

İspat

($i \Rightarrow ii$) Y içinde $\sup A = y_0$ olsun. E içinde $\sup A = y_0$ olduğunu gösterelim.

$B_Y = \{y \in Y : \forall x \in A, x \leq y\}$ ve $B_X = \{y \in E : \forall x \in A, x \leq y\}$ ile tanımlansın.

$\inf B_Y = y_0$ ve Y regüler olduğundan $\inf B_X = y_0$ dır. Buradan $\sup A = \inf B_X = y_0$ elde edilir.

($i \Rightarrow iii$) Y içinde $y_\alpha \xrightarrow{o} y$ ise her α için $\alpha_0 \leq \alpha$ iken (Y içinde $z_\alpha \downarrow 0$) $|y_\alpha - y| \leq z_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde $(z_\alpha) \subseteq Y$ neti ve α_0 vardır. Y regüler olduğundan E içinde $z_\alpha \downarrow 0$ dır. Buradan E içinde

$|y_\alpha - y| \leq z_\alpha \downarrow 0$ yani E içinde $y_\alpha \xrightarrow{o} y$ dir.

($iii \Rightarrow i$) $A \subseteq Y$ ve Y içinde $\inf A = y_0$ olsun. $C_Y = \{y \in Y : \forall x \in A, y \leq x\}$ ve

$C_X = \{y \in E : \forall x \in A, y \leq x\}$ olsun. Hipotezden $\sup C_Y, Y$ içinde var ve $\sup C_Y = y_0$ olduğundan E içinde de $\sup C_Y$ vardır ve $\sup C_Y = y_0$ dır.

(iii $\Rightarrow$ iv) Y içinde $y_\alpha \downarrow 0$ ise $y_\alpha \xrightarrow{o} 0$ dır. Hipotezden E içinde $y_\alpha \xrightarrow{o} 0$ olur. Dolayısıyla Lemma 3.1.1 (iv) den E içinde $y_\alpha \downarrow 0$ elde edilir.

(iv $\Rightarrow$ i) $A \subseteq Y, Y$ içinde $\inf A$ var ve $\inf A = y_0$ olsun. E içinde $\inf A$ var ve

$\inf A = y_0$ olduğunu gösterelim. A alttan sınırlıdır. $B = \{\bigwedge_{i=1}^n a_i : a_i \in A\}$ olmak üzere

$A \subseteq B$ dir. Her $b_1, b_2 \in B$ için $b_1 = \bigwedge_{i=1}^n a_i$, $b_2 = \bigwedge_{j=1}^m c_j$ olacak şekilde $n, m \in \mathbb{N}$ ve $a_i, c_j \in A$ vardır.

$b_3 = a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots a_n \wedge c_1 \wedge c_2 \wedge \cdots c_m$ olsun.

$$d_k = \begin{cases} a_k, 1 \leq k \leq n \\ c_k, n+1 \leq k \leq m+n \end{cases}$$

olmak üzere $d_k \in A, b_3 = \bigwedge_{k=1}^{n+m} d_k$ olduğundan $b_3 \in B$ ve $b_3 \leq b_1$ ve $b_3 \leq b_2$ olduğundan B azalandır. $B \downarrow y_0$ olduğunu gösterelim. Bunun için $\inf A = \inf B$ olduğunu göstermek yeterlidir. $A \subseteq B$ olduğundan Teorem 2.1.2 den Y içinde $\inf B \leq \inf A$ dır. Her $a \in A$ için $y_0 \leq a$ ve her

$b \in B$ için $b = \bigwedge_{i=1}^n a_i$ olduğundan $y_0 \leq b$ olur. Buradan Y içinde $y_0 \leq \inf B$ elde edilir. Dolayısıyla $\inf A = \inf B = y_0$ dır. B azalan olduğundan $(b - y_0) \downarrow 0$ dır ve

$\inf_{b \in B} (b - y_0) = \left(\inf_{b \in B} b \right) - y_0 = y_0 - y_0 = 0$ olur. Hipotezden E içinde $\inf_{b \in B} (b - y_0) = 0$ dır. Buradan $\left(\inf_{b \in B} b \right) - y_0 = 0$ olduğundan $\left(\inf_{b \in B} b \right) = y_0$ bulunur. Yukarıdakine benzer şekilde E içinde $\inf A = \inf B = y_0$ olduğu gösterilir.

3.1.1. Sonuç

E Riesz uzayı olmak üzere ,

(a) Y, E nin ideali

veya

(b) E normlu örgü ve Y sıra sürekli norma sahip ve bu norma göre E in tam alt Riesz uzayı

ise yukarıdaki şıklardan biri sağlanıyorsa Y regülerdir.

İspat

a) Lemma 3.1.3 (iv) den $(y_\alpha) \subseteq Y$ neti için Y içinde $y_\alpha \downarrow 0$ iken E içinde $y_\alpha \downarrow 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. E içinde her α için $0 \leq y_\alpha$ dır. E içinde bir başka alt sınır $z \in E$ ve $0 \leq z \leq y_\alpha$ olsun. Y içinde $y_\alpha \downarrow 0$ olduğundan $z = 0$ dır.

b) Lemma 3.1.3 (iv) den $(y_\alpha) \subseteq Y$ neti için Y içinde $y_\alpha \downarrow 0$ iken E içinde $y_\alpha \downarrow 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. E içinde her α için $0 \leq y_\alpha$ dır. E içinde bir başka alt sınır $z \in E$ ve $0 \leq z \leq y_\alpha$ olsun. E örgü norma sahip olduğundan $0 \leq \|z\| \leq \|y_\alpha\|$ dır. Y sıra sürekli norma sahip olduğundan $\|y_\alpha\| \downarrow 0$ dır. Buradan $z = 0$ dır.

3.1.1. Örnek

$\mathbf{R}^{[0,1]} = \{f|f: [0,1] \rightarrow \mathbf{R} \text{ tüm fonksiyonlar}\}$ ve $Y, [0,1]$ üzerinde tanımlı, reel değerli sürekli fonksiyonların uzayı yani $Y = C[0,1]$ olsun.

Ayrıca $E = \{f: C[0,1] \rightarrow \mathbf{R} \text{ fonksiyon ve } f = g + h, g \in Y \text{ ve } h: [0,1] \rightarrow \mathbf{R} \text{ sonlu tane nokta hariç her yerde sıfır olan bir fonksiyon}\}$ olsun. $\mathbf{R}^{[0,1]}$ den indirgenen sıralama ile E nin sıralı vektör uzayı olduğunu ve $Y \subseteq E$ olduğunu görmek kolaydır. E nin $\mathbf{R}^{[0,1]}$ in Riesz alt uzayı olduğunu gösterelim. Bunun için $f \in E$ iken $|f| \in E$ olduğunu göstermek yeterlidir. $f \in E$ ise $g \in Y$ ve h sonlu tane nokta hariç her yerde sıfır olan bir fonksiyon olmak üzere $f = g + h$ biçiminde yazılabilir. h ın bir $x_0 \in [0,1]$ noktasından sıfırdan farklı diğer yerlerde sıfır olduğunu varsayabiliriz. Bu durumda yapılırsa ise n tane noktada da benzer şekilde yapılır. $f = g + h$ ise $\mathbf{R}^{[0,1]}$ içinde $|f| = |g + h|$ ve her $x \in [0,1]$ için

$$|f|(x) = |f(x)| = |g(x) + h(x)| \text{ dir.}$$

1.Durum : $|g(x_0)| \leq |g(x_0) + h(x_0)|$ olsun.

$t: [0,1] \rightarrow \mathbf{R}$

$$x \rightarrow t(x) = \begin{cases} |g(x_0) + h(x_0)| - |g(x_0)|, & x = x_0 \\ 0, & x \neq x_0 \end{cases}$$

ile tanımlı t bir fonksiyondur.Bu durumda $|f| = |g| + t$ dir.

- $x = x_0$ için $(|g| + t)(x_0) = |g|(x_0) + t(x_0)$

$$= |g(x_0)| + (|g(x_0) + h(x_0)| - |g(x_0)|)$$

$$= |g(x_0) + h(x_0)|$$

$$= |f(x_0)|$$

$$= |f|(x_0)$$
- $x \neq x_0$ için $(|g| + t)(x) = |g|(x) + t(x)$

$$= |g(x)| + (|g(x) + h(x)| - |g(x)|)$$

$$= |g(x) + h(x)|$$

$$= |f(x)|$$

$$= |f|(x)$$

olur.

2.Durum : $|g(x_0) + h(x_0)| \leq |g(x_0)|$ olsun.

$s: [0,1] \rightarrow \mathbf{R}$

$$x \rightarrow s(x) = \begin{cases} |g(x_0)| - |g(x_0) + h(x_0)|, & x = x_0 \\ 0, & x \neq x_0 \end{cases}$$

ile tanımlı s bir fonksiyondur.Bu durumda $|f| = |g| - s$ dir.

- $x = x_0$ için $(|g| - s)(x_0) = |g|(x_0) - s(x_0)$

$$= |g(x_0)| - (|g(x_0)| - |g(x_0) + h(x_0)|)$$

$$= |g(x_0) + h(x_0)|$$

$$= |f(x_0)|$$

$$= |f|(x_0)$$

- $x \neq x_0$ için $(|g| - s)(x) = |g|(x) + s(x)$

$$= |g(x)|$$

$$= |g(x) + h(x)|$$

$$= |f(x)|$$

$$= |f|(x)$$

olur.

3.Durum : $|g(x_0) + h(x_0)| = |g(x_0)|$ olsun. Bu durumda $|f| = |g|$ dir.

- $x = x_0$ için $|g|(x_0) = |g(x_0)|$

$$= |g(x_0) + h(x_0)|$$

$$= |f(x_0)|$$

$$= |f|(x_0)$$
- $x \neq x_0$ için $|g|(x) = |g(x)|$

$$= |g(x) + h(x)|$$

$$= |f(x)|$$

$$= |f|(x)$$

olur.

Böylece tüm durumlar göz önüne alındığında $|f| \in E$ bulunur.

Y nin E içinde sıra yakınsamaya göre yoğun olduğunu gösterelim.

$f \in E$ için $f = g + h$, $g \in Y$ ve h , bir $x_0 \in [0,1]$ noktasında sıfırdan farklı diğer yerlerde sıfır olsun. Eğer $g(x_0) = h(x_0)$ ise $f = g$ olacağından $(f_n) = f$ sabit dizisi için $(f_n) \subseteq Y$ ve $f_n \xrightarrow{o} f$ dir.

$f = 0 + \chi_{\{\frac{1}{2}\}}$ alırsak $f_n \xrightarrow{o} f$ ve $(f_n) \subseteq Y = C[0,1]$ dizisinin nasıl oluşturulduğunu gösterelim. Benzer şekilde herhangi bir $f \in E$ için yapılabilir.

$$f_n(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} \\ t2^n - 2^{n-1} + 1, & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} \leq t < \frac{1}{2} \\ -t2^n + 2^{n-1} + 1, & \frac{1}{2} \leq t < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n} \\ 0, & \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$f_n \geq 0$ olduğunu gösterelim.

- $0 \leq t \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}$ için $f_n(t) = 0 \geq 0$ dır.
- $\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} \leq t < \frac{1}{2}$ için $2^n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} \right) \leq t2^n < -\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow 2^{n-1} - 1 \leq t2^n < 2^{n-1}$$

$$\Rightarrow -1 \leq t2^n - 2^{n-1} < 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq t2^n - 2^{n-1} + 1 < 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq f_n(t) < 1$$

dir.

- $\frac{1}{2} \leq t < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n}$ için $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} < -t \leq -\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow -2^{n-1} - 1 < -t2^n \leq -2^{n-1}$$

$$\Rightarrow -1 < -t2^n + 2^{n-1} \leq 0$$

$$\Rightarrow 0 < -t2^n + 2^{n-1} + 1 \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 < f_n(t) \leq 1$$

dir.

- $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^n} \leq t \leq 1$ için $f_n(t) = 0 \geq 0$ dır.

Dolayısıyla her $n \in \mathbb{N}^+$ için $f_n \geq 0$ dir.

Her $n \in \mathbb{N}^+$ için $f_{n+1} \leq f_n$ olduğunu gösterelim.

$$f_{n+1}(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} \\ t2^{n+1} - 2^n + 1, & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} \leq t < \frac{1}{2} \\ -t2^{n+1} + 2^n + 1, & \frac{1}{2} \leq t < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}} \\ 0, & \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$\blacksquare 0 \leq t \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} \Rightarrow 0 \leq t \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} \text{ ve } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\Rightarrow f_n(t) = 0 \text{ ve } f_{n+1}(t) = 0$$

$$\Rightarrow f_{n+1}(t) \leq f_n(t)$$

$$\blacksquare \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} \leq t < \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} \leq t < \frac{1}{2} \text{ ve } \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} \leq t < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f_n(t) = t2^n - 2^{n-1} + 1 \text{ ve } f_{n+1}(t) = -t2^{n+1} + 2^n + 1$$

$$t < \frac{1}{2} \Rightarrow t2^n < 2^{n-1}$$

$$\Rightarrow t2^n(2-1) < 2^{n-1}(2-1)$$

$$\Rightarrow t2^{n+1} - t2^n < 2^n - 2^{n-1}$$

$$\Rightarrow t2^{n+1} - 2^n < t2^n - 2^{n-1}$$

$$\Rightarrow t2^{n+1} - 2^n + 1 < t2^n - 2^{n-1} + 1$$

$$\Rightarrow f_{n+1}(t) \leq f_n(t)$$

$$\blacksquare \frac{1}{2} \leq t < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq t < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n} \text{ ve } \frac{1}{2} \leq t < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\Rightarrow f_n(t) = -t2^n + 2^{n-1} + 1 \text{ ve } f_{n+1}(t) = -t2^{n+1} + 2^n + 1$$

$$\frac{1}{2} \leq t \Rightarrow 2^{n-1} \leq t2^n$$

$$\Rightarrow 2^{n-1}(2-1) < t2^n(2-1)$$

$$\Rightarrow 2^n - 2^{n-1} \leq t2^{n+1} - t2^n$$

$$\Rightarrow -t2^{n+1} + t2^n \leq -t2^n + 2^{n+1}$$

$$\Rightarrow -t2^{n+1} + t2^n + 1 \leq -t2^n + 2^{n+1} + 1$$

$$\Rightarrow f_{n+1}(t) \leq f_n(t)$$

$$\blacksquare \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}} \leq t < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n} \Rightarrow f_n(t) = -t2^n + 2^{n-1} + 1 \text{ ve } f_{n+1}(t) = 0$$

Her $n \in \mathbb{N}^+$ için $f_n \geq 0$ olduğundan $f_{n+1}(t) = 0 \leq f_n(t)$ dir.

$$\blacksquare \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n} \leq t \leq 1 \Rightarrow f_n(t) = 0 \text{ ve } f_{n+1}(t) = 0$$

$$\Rightarrow f_{n+1}(t) \leq f_n(t)$$

elde edilir. Dolayısıyla her $n \in \mathbb{N}^+$ için $f_{n+1} \leq f_n$ olur.

$f_n \downarrow f$ olduğunu gösterelim.

(f_n) azalan olduğundan $\mathbf{R}$ de $f_n(t)$ azalan dizidir. $\mathbf{R}$ de azalan bir dizinin limiti ile infimumu aynı olacağından dizinin limitini inceleyelim. Her $t \in [0,1]$ için $t \neq \frac{1}{2}$ iken $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = 0$ olduğunu gösterelim. $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ ise $0 \leq t < \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n_0}}$ olacak şekilde bir

$n_0 \in \mathbf{N}$ vardır. (f_n) tanımından $f_n(t) = 0$ dır. Ayrıca (f_n) azalan ve pozitif olduğundan $n_0 \leq n$ iken

$0 \leq f_n(t) \leq f_{n_0}(t) = 0$ olur. Buradan $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = 0$ elde edilir.

$t \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ ise $\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n_0}} \leq t \leq 1$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbf{N}$ vardır. (f_n) tanımından

$f_{n_0}(t) = 0$ dır. Ayrıca (f_n) azalan ve pozitif olduğundan $n_0 \leq n$ iken

$0 \leq f_n(t) \leq f_{n_0}(t) = 0$ olur. Buradan $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = 0$ elde edilir.

Dolayısıyla $f_n \xrightarrow{o} f$ olduğundan Y, E içinde sıra yakınsamaya göre sıra yoğundur. Y nin E içinde sıra yoğun olmadığını gösterelim. Y nin E içinde sıra yoğun olduğunu varsayalım.

$0 < r \leq \chi_{\left\{\frac{1}{2}\right\}}$ olacak şekilde $r \in Y$ vardır. Her $t \in [0,1]$ için $t \neq \frac{1}{2}$ iken

$0 \leq r(t) \leq \chi_{\left\{\frac{1}{2}\right\}}(t) = 0$ ve her $t \in [0,1]$ için $t \neq \frac{1}{2}$ iken $r(t) = 0$ olur. r sürekli olduğu için $r\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ dır. O halde $r = 0$ olur. Bu ise kabulümüzle çelişir. O halde Y, E içinde sıra yoğundur.

3.1.1. Teorem

E Riesz uzayı ve Y, E in Riesz alt uzayı olsun. Aşağıdakiler denktir.

(i) Y, E içinde *sıra yoğun* ve *majorizing*dir.

(ii) Her $x \in E$ için $x = \sup\{y \in Y: y \leq x\}$ dir.

(iii) Her $x \in E$ için $x = \inf\{y \in Y: y \geq x\}$ dir.

İspat

(i $\Rightarrow$ ii) Y sıra yoğun ve majorizing olsun .

$A = \{y \in Y: 0 \leq y \leq x\}$ ve önce $x \geq 0$ alalım. $0 \in A$ olduğundan $A \neq \emptyset$ dır.

Şimdi $\sup A = x$ olduğunu gösterelim. Bunun için $\sup A = x$ olmadığını varsayalım. Bu durumda her $y \in A$ için $y \leq z$ ve $z < x$ olacak şekilde bir $z \in E$ vardır. $x - z > 0$ ve Y sıra yoğun olduğundan $0 < u \leq x - z$ olacak şekilde $u \in Y$ vardır. Buradan

$z \leq u + z \leq x$ bulunur. Ayrıca her $y \in A$ için $y \leq z$ olduğundan $u + y \leq u + z \leq x$ elde edilir. $u + y \in Y$ ve $u + y \leq x$ olduğundan $u + y \in A$ dır. Kabulden her $y \in A$ için $u + y \leq z$ olur. Y vektör uzayı olduğundan $2u + y \in Y$ dır. Herhangi bir $n > 2$ için

$nu + y \leq z$ kabul edelim. Buradan her

$y \in A$ için $nu + u + y = (n + 1)u + y \leq u + z \leq x$ dır. Yani her $n \in \mathbf{N}^+$ ve her $y \in A$ için $y \geq 0$ olduğundan $0 < nu \leq nu + y \leq z$ elde edilir. E Riesz uzayı olduğundan

$u = 0$ bulunur ki bu çelişkidir. O halde $\sup A = x$ dir.

Şimdi $B = \{y \in Y: y \leq x\}$, A ve B nin tanımlarından $A \subseteq B$ dır. O halde

$x = \sup A \leq \sup B$ olur. Her $y \in B$ için $y \leq x$ olduğundan $\sup B \leq x$ dir. Yani $x \geq 0$ için $\sup\{y \in Y: y \leq x\} = x$ olduğu gösterildi. Şimdi $x \in X$ keyfi olsun.

$C = \{y \in Y: y \leq x\}$ olmak üzere $y_0 \in C$ seçelim . $y_0 \in Y$ ve $y_0 \leq x$ dır.

$[y_0, x] - y_0 = [0, x - y_0]$ olduğunu görmek kolaydır. İspatın ilk kısmı göz önüne alınırsa $\sup\{([y_0, x] - y_0) \cap Y\} = \sup\{[0, x - y_0] \cap Y\} = x - y_0$ bulunur. Buradan da $\sup\{[y_0, x] \cap Y\} = x_0 - y_0 + y_0 = x$ elde edilir. Herhangi bir $y \in C$ için

$$y \leq x \Rightarrow \sup_{y \in C} y \leq x$$

$$\Rightarrow \sup C \leq x = \sup\{[y_0, x] \cap Y\}$$

olur. Diğer yandan $[y_0, x] \cap Y \subseteq C$ olduğundan $x = \sup\{[y_0, x] \cap Y\} \leq \sup C$ bulunur. Yani $\sup C = x$ olur.

(ii $\Rightarrow$ iii) Her $x \in E$ için $x = \sup\{y \in Y: y \leq x\}$ olsun.

$-x = \sup\{y \in Y: y \leq -x\}$ olur. Buradan

$$x = -\sup\{y \in Y: y \leq -x\}$$

$$= \inf\{-y \in Y: x \leq -y\}$$

$$= \inf\{u \in Y: x \leq u\} \text{ elde edilir.}$$

(iii $\Rightarrow$ ii) Her $x \in E$ için $x = \inf\{y \in Y: y \geq x\}$ olsun.

$$-x = \inf\{y \in Y: y \geq -x\}$$

$$x = -\inf\{y \in Y: y \geq -x\}$$

$$= \inf\{-y \in Y: x \geq -y\}$$

$$= \inf\{u \in Y: x \geq u\}$$

elde edilir.

(ii $\Rightarrow$ i) $0 < x \in E$ ve en az bir $y \in Y$ için $0 < y \leq x$ olduğunu gösterelim .

$0 < x$ ve $\{y \in Y: y \leq x\} = A$ olsun. $x = \sup\{y \in Y: y \leq x\}$ olduğundan $A \neq \emptyset$ dir.

En az bir $y \in Y$ için $y \leq x$ ise en az bir $y \in Y$ için $y^+ \leq x$ dir. Öncelikle en az bir $y \in Y$ için

$y^+ \neq 0$ olduğunu gösterelim. Her $y \in Y$ için $y^+ = 0$ olsun. Her $y \in Y$ için

$y \leq y^+ \leq x$ ise $\sup_{y \in A} y \leq \sup_{y^+ \in A} y^+$ dir . Buradan $x \leq 0$ bulunup çelişki elde edilir.

$y \in Y$ için $0 < y \leq x$ olduğu gösterildi. Şimdi majorizing olduğunu gösterelim.

$0 < x \in E$ ve en az bir $y \in Y$ için $x \leq y$ olduğunu gösterelim. (ii) $\Rightarrow$ (iii) sağlandığından (iii) den $\{y \in Y: y \geq x\} = B$ alınırsa

$x = \inf\{y \in Y: y \geq x\}$ olduğundan $B \neq \emptyset$ bulunur ve en az bir $y \in Y$ için $x \leq y$ sağlanır.

Teorem

E ve Y Riesz uzayı, Y sıra yoğun ve majorizing, $(x_\alpha) \subseteq Y$ olsun. Y içinde $(x_\alpha) \xrightarrow{o} 0$ olması için gerek ve yeter şart E içinde $(x_\alpha) \xrightarrow{o} 0$ olmasıdır.

İspat

Y içinde $(x_\alpha) \xrightarrow{o} 0$ olsun.[11] Teorem 1.23 den sıra yoğun alt örgüler regülerdir ve Lemma 3.1.3 (iii) den Y içinde $(x_\alpha) \xrightarrow{o} 0$ iken E içinde $(x_\alpha) \xrightarrow{o} 0$ dır. Şimdi E içinde $(x_\alpha) \xrightarrow{o} 0$ alalım.

$(x_\alpha) \xrightarrow{o} 0$ ise $\alpha_0 \leq \alpha$ iken $|x_\alpha| \leq y_\alpha \downarrow 0$ olacak α_0 ve $(y_\alpha) \subseteq E$ neti vardır.

$A = \{y \in Y: \exists \alpha \text{ için } y_\alpha \leq y\}$ olarak tanımlayalım. Y majorizing olduğundan $A \neq \emptyset$ dır. $z \in E$ ve her α ve her $y \in A$ için,

$$\begin{aligned}
0 \leq z \leq y &\Rightarrow z \leq \inf\{y \in Y: \exists \alpha \text{ için } y_\alpha \leq y\} \Rightarrow z \leq y_\alpha \\
&\Rightarrow 0 \leq \inf_\alpha z \leq \inf_\alpha y_\alpha = 0 \\
&\Rightarrow z = 0
\end{aligned}$$

bulunur. O halde E içinde $\inf A = 0$ dır. Şimdi Y içinde $\inf A = 0$ olduğunu gösterelim.

$$B_1 = \{x \in E: \forall a \in A \text{ için } x \leq a\}$$

$$B_2 = \{x \in Y: \forall a \in A \text{ için } x \leq a\}$$

olarak tanımlayalım . $B_2 \subseteq B_1$ olduğundan,

$$0 \leq \inf_Y A \leq \inf_X A = 0 \Rightarrow \inf_Y A = 0$$

bulunur. $A = \{y \in Y: \exists \alpha \text{ için } y_\alpha \leq y\}$ için $y_1, y_2 \in A$ iken $y_{\alpha_1} \leq y_1$ ve $y_{\alpha_2} \leq y_2$ olacak şekilde en az bir $y_{\alpha_1}, y_{\alpha_2}$ vardır. $y_\alpha \downarrow$ olduğundan $y_{\alpha_3} \leq y_{\alpha_1}$ ve $y_{\alpha_3} \leq y_{\alpha_2}$ olacak şekilde en az bir α_3 vardır. $y_3 = y_1 \wedge y_2 \in Y$ alalım.

$y_{\alpha_3} \leq y_{\alpha_3} \wedge y_{\alpha_2} \leq y_1 \wedge y_2 = y_3$ olduğundan $y_3 \in A$, $y_3 \leq y_1$ ve $y_3 \leq y_2$ dir. Yani $A \downarrow$ dır.

Ayrıca $\alpha_0 \leq \alpha$ iken $|x_\alpha| \leq y_\alpha$ olması ve A nın tanımından Y içinde $(x_\alpha) \xrightarrow{o} 0$ dır.

3.1.4. Tanım

E Riesz uzayı ve L bir Dedekind tam Riesz uzayı olsun. Eğer,

- (i) E ye Riesz izomorfik olacak şekilde L nin bir Y Riesz alt uzayı vardır.
- (ii) Y, L nin majorizing ve sıra yoğun Riesz alt uzayıdır

şartları sağlanırsa L ye E Riesz uzayının *Dedekind tamlaması* denir.

[4] Teorem 32.5 den her Riesz uzayının Dedekind tamlaması vardır ve bu E^δ biçimine gösterilir.

3.1.2. Sonuç

E Riesz uzayı; E^δ , E in Dedekind tamlaması ve $(y_\alpha) \subseteq E$ net olsun. E içinde $(x_\alpha) \xrightarrow{o} 0$ olması için gerek ve yeter şart E^δ içinde $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ olmasıdır.

İspat

E , E^δ içinde sıra yoğun ve majorizingdir. Dolayısıyla Teorem 3.1.2 den istenen elde edilir.

3.1.2. Teorem

E Riesz uzayı ve Y , E in regüler Riesz alt uzayı olsun. Y^δ , E^δ nin regüler Riesz alt uzayıdır.

İspat

E Dedekind tam alalım. $J: Y \rightarrow E^\delta$ gömme dönüşümü olmak üzere Y , E de regüler olduğundan Y içinde $(x_\alpha) \xrightarrow{o} 0$ ise E içinde $(x_\alpha) \xrightarrow{o} 0$ dır. Benzer şekilde, E^δ içinde regüler olduğundan E^δ içinde $(x_\alpha) \xrightarrow{o} 0$ dır. O halde J sıra süreklidir. [10] Teorem 4.12 den dolayı J nin Y^δ genişlemesi vardır ve buna T diyelim. $T: Y^\delta \rightarrow E^\delta$ sıra sürekli bir operatör ve $T|_Y = J$ dir. Şimdi $a \in Y^\delta$ alalım. Y , Y^δ içinde sıra yoğun olduğundan Y^δ da $0 \leq y_\alpha \uparrow a^+$ ve $0 \leq z_\alpha \uparrow a^-$ olacak şekilde $(y_\alpha), (z_\alpha) \subseteq Y$ netleri vardır. T sıra sürekli olduğundan E içinde $T(y_\alpha) = y_\alpha \xrightarrow{o} a^+ = T(a^+)$ ve

$T(z_\alpha) = z_\alpha \xrightarrow{o} a^- = T(a^-)$ dir. Ayrıca E içinde $y_\alpha - z_\alpha = T(y_\alpha - z_\alpha) \xrightarrow{o} T(a) = a$ olur.

$a^+ \wedge a^- = 0$ olduğundan her α için Y^δ içinde $y_\alpha \wedge z_\alpha = 0$ olacağı için

$y_\alpha = (y_\alpha \wedge z_\alpha) + (y_\alpha - z_\alpha)^+$ ve diklikten dolayı $y_\alpha = (y_\alpha - z_\alpha)^+$ dır. Buradan E içinde $T[(y_\alpha - z_\alpha)^+] \xrightarrow{o} T(a^+)$ ve $T[(y_\alpha - z_\alpha)^+] = (y_\alpha - z_\alpha)^+ \xrightarrow{o} a^+ = T(a)^+$ olduğundan $T(a^+) = T(a)^+$ bulunur. Bu da T nin örgü homomorfizm olması demektir. Şimdi T nin birebirliğini göstermek için $Ta = 0$ alalım. T örgü homomorfizm olduğundan

$|Ta| = T|a| = 0$ olur. Ayrıca, Y^δ içinde sıra yoğun olduğundan $0 \leq y_\alpha \uparrow |a|$ olacak şekilde $(y_\alpha) \subseteq Y$ neti vardır. Buradan $0 \leq y_\alpha = T(y_\alpha) \leq T|a| = 0$ elde edilir. Bu da her α için $y_\alpha = 0$ demektir. $y_\alpha \uparrow |a|$ olduğundan $|a| = 0$ ve böylece $a = 0$ bulunur.

$T: Y^\delta \rightarrow E^\delta$ birebirdir.

$(y_\alpha) \subseteq T(Y^\delta)$ ve $y_\alpha \xrightarrow{o} 0$ dır. $(y_\alpha) \subseteq T(Y^\delta)$ ise görüntü tanımından $T(x_\alpha) = y_\alpha$ olacak şekilde $(x_\alpha) \subseteq Y^\delta$ vardır. $T: Y^\delta \rightarrow T(Y^\delta)$ lattice izomorfizmi olduğundan $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ dır. T sıra sürekli olduğundan E^δ içinde $T(x_\alpha) = (y_\alpha) \xrightarrow{o} 0$ dır.

3.1.3. Lemma

E Riesz uzayı ve Y, E in regüler sıra tam Riesz alt uzayı olsun. Y içinde (y_α) sıra sınırlı neti için E içinde $(y_\alpha) \xrightarrow{o} x \in E$ ise Y içinde $(y_\alpha) \xrightarrow{o} x \in Y$ dır.

İspat

Sonuç 3.1.2 den E içinde yakınsama ile E^δ içinde yakınsama denktir. E^δ içinde çalışabileceğimiz için E yi sıra tam alalım. Önerme 3.1.1 den E içinde

$x = \inf_\alpha \sup_{\beta \geq \alpha} y_\beta = \sup_\alpha \inf_{\beta \geq \alpha} y_\beta$ dır. Hipotezden Y sıra tam olduğundan Y içinde infimum ve supremum vardır. Ayrıca Y sıra tam ve regüler olduğundan $x \in Y$ ve Y içinde $(y_\alpha) \xrightarrow{o} x$ dır.

3.1.3. Sonuç

E Riesz uzayı ve Y, E nin regüler Riesz alt uzayı olsun.

Y içinde $(x_\alpha) \xrightarrow{o} 0$ olması için gerek ve yeter şart Y içinde (x_α) sıra sınırlı neti için E içinde $(x_\alpha) \xrightarrow{o} 0$ olmasıdır.

İspat

(x_α) sıra sınırlı net ve Y içinde $(x_\alpha) \xrightarrow{o} 0$ ise Y, E içinde regüler olduğu için Lemma 3.1.3 den ve hipotezden Y^δ, E^δ da regülerdir. Sonuç 3.1.2 den E içinde $(x_\alpha) \xrightarrow{o} 0$ ise E^δ içinde $(x_\alpha) \xrightarrow{o} 0$ dır. Lemma 3.1.4 den E^δ Dedekind tam olduğundan Y^δ da $(x_\alpha) \xrightarrow{o} 0$ olur. Sonuç 3.1.2 den Y^δ içinde $(x_\alpha) \xrightarrow{o} 0$ ise Y içinde $(x_\alpha) \xrightarrow{o} 0$ dır.

3.1.4. Tanım

E , Riesz uzayı, $A \subseteq E$ olsun. Eğer her $(x_\alpha) \subseteq A, x \in E$ için $(x_\alpha) \xrightarrow{o} x$ iken $x \in A$ ise A *sıra kapalı* denir.

3.1.4. Sonuç

Y, E in regüler Riesz alt uzayı olsun. Y, E de sıra yakınsamaya göre yoğun ise Y, E de sıra yoğundur. Ek olarak Y sıra tam ise Y, E nin idealidir.

İspat

Teorem 3.1.3 den Y^δ, E^δ nin regüler Riesz alt uzayıdır. Y^δ nin E^δ içinde ideal olduğunu gösterelim. Öncelikle her $a \in E^\delta, b \in Y^\delta$ için $0 \leq a \leq b$ iken $a \in Y^\delta$ olduğunu gösterelim.

$[0, a] = \{z \in E^\delta : 0 \leq z \leq a\}$ olsun. E, E^δ içinde sıra yoğun olduğundan E^δ içinde

$a = \sup([0, a] \cap E)$ dir. $x \in ([0, a] \cap E)$ ise E içinde $(y_\alpha) \xrightarrow{o} x$ olacak şekilde (y_α) neti vardır. E, E^δ içinde regüler olduğundan E^δ içinde $y_\alpha \xrightarrow{o} x$ dır. $z_\alpha = |y_\alpha| \wedge b$ olarak tanımlayalım. Her α için $0 \leq z_\alpha \leq b$ olduğundan $(z_\alpha), Y^\delta$ içinde sıra sınırlıdır ve E^δ içinde $z_\alpha \xrightarrow{o} x$ olduğundan Lemma 3.1.4 den $x \in Y^\delta$ dır. Buradan

$([0, a] \cap E) \subseteq ([0, a] \cap Y^\delta)$ olur. Bu da $a = \sup([0, a] \cap E) \leq \sup([0, a] \cap Y^\delta)$ demektir. Diğer yandan her $x \in ([0, a] \cap Y^\delta)$ için $x \leq a$ olduğundan

$\sup([0, a] \cap Y^\delta) \leq a$ dır. O halde E^δ içinde $a = \sup([0, a] \cap Y^\delta)$ dır. Böylece Y^δ sıra kapalı olduğundan $a \in Y^\delta$ dır. O halde Y^δ, E^δ içinde idealdir. Şimdi $0 < x \in E^+$ alalım. Y, E içinde sıra yakınsamaya göre yoğun olduğundan $(y_\alpha) \xrightarrow{o} x$ olacak şekilde $(y_\alpha) \subseteq Y$ vardır. Buradan E içinde $|y_\alpha| \wedge x \xrightarrow{o} x$ dır. $z = |y_{\alpha_0}| \wedge x > 0$ olacak şekilde en az bir α_0 vardır. Y^δ, X^δ içinde ideal olduğundan $z \in Y^\delta$ dır. Y, Y^δ içinde sıra yoğun olduğundan $0 < y \leq z \leq x$ olacak şekilde $y \in Y$ vardır. O halde Y, E içinde sıra yoğundur.

3.2. Sıra Sürekli Operatörler

Bu bölümde [10] da verilen “Positive operators” kitabı sıra sürekli operatörler kısmı incelenerek detaylanmıştır.

3.2.1. Tanım

E ve F Riesz uzayı $T: E \rightarrow F$ bir operatör olsun.

Her $(x_\alpha) \subseteq E$ ağı için E içinde $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ iken F içinde $Tx_\alpha \xrightarrow{o} Tx$ ise T ye *sıra sürekli* operatör denir. Sıra sürekli operatörlerin kümesi $L_o(E, F)$ biçiminde gösterilir.

$$L_o(E, F) = \{T \in L_b(E, F) : T \text{ sıra sürekli}\}$$

Her $(x_n) \subseteq E$ dizisi için E içinde $x_n \xrightarrow{o} x$ iken F içinde $Tx_n \xrightarrow{o} Tx$ ise T ye σ - *sıra sürekli* denir. σ - sıra sürekli operatörlerin kümesi $L_\sigma(E, F)$ biçiminde gösterilir.

$$L_\sigma(E, F) = \{T \in L_b(E, F) : T \text{ } \sigma\text{-sıra sürekli}\}$$

3.2.1. Teorem

$T: E \rightarrow F$ pozitif operatör olsun.

- 1) T nin sıra sürekli olması için gerek ve yeter şart E içinde $x_\alpha \downarrow 0$ iken F içinde $Tx_\alpha \downarrow 0$ olmasıdır.
- 2) T nin sıra sürekli olması için gerek ve yeter şart E içinde $0 \leq x_\alpha \uparrow x$ iken F içinde $Tx_\alpha \uparrow Tx$ olmasıdır.

İspat

1) T sıra sürekli ve E içinde $(x_\alpha) \downarrow 0$ alalım. $Tx_{\alpha_1}, Tx_{\alpha_2} \in F$ olmak üzere $(x_\alpha) \downarrow$ olduğundan $x_{\alpha_3} \leq x_{\alpha_1}$ ve $x_{\alpha_3} \leq x_{\alpha_2}$ olacak şekilde $x_{\alpha_3} \in x_\alpha$ vardır. T pozitif olduğundan $Tx_{\alpha_3} \leq Tx_{\alpha_1}$ ve $Tx_{\alpha_3} \leq Tx_{\alpha_2}$ elde edilir. O halde $T(x_{\alpha_3}) \downarrow$ dır. Şimdi $\inf Tx_{\alpha_3} = 0$ olduğunu gösterelim.

Her α için $0 \leq z \leq Tx_\alpha$ olsun. $x_\alpha \downarrow 0$ olduğundan $x_\alpha \xrightarrow{0} 0$ dır. T sıra sürekli olduğundan $T(x_\alpha) \xrightarrow{0} 0$ bulunur. Lemma 2.1.1 den $T(x_\alpha) \downarrow 0$ elde edilir.

Tersine E içinde $x_\alpha \downarrow 0$ iken F içinde $Tx_\alpha \downarrow 0$ alalım. $x_\alpha \xrightarrow{0} 0$ ise en az bir $(y_\alpha) \subseteq E$ için $\alpha_0 \leq \alpha$ iken $|x_\alpha| \leq y_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde (y_α) vardır. Buradan

$$|Tx_\alpha| \leq T|x_\alpha| \leq Ty_\alpha \downarrow 0 \text{ ve}$$

$z_\alpha = Ty_\alpha$ olmak üzere $|Tx_\alpha| \leq z_\alpha \downarrow 0$ elde edilir. O halde $Tx_\alpha \xrightarrow{0} 0$ olarak bulunur.

2) T sıra sürekli alalım ve E içinde $0 \leq x_\alpha \uparrow x$ iken F içinde $Tx_\alpha \uparrow Tx$ olduğunu Lemma 2.1.1 göz önüne alarak gösterelim.

$x_\alpha \uparrow x$ olduğundan $(x - x_\alpha) \downarrow 0$ dır. Hipotez ve 1.şıktan $T(x - x_\alpha) \downarrow 0$ dır. T nin lineerliğinden $(Tx - Tx_\alpha) \downarrow 0$ elde edilir. Bu da $Tx_\alpha \uparrow Tx$ demektir.

Tersine E içinde $0 \leq x_\alpha \uparrow x$ olsun . F içinde $Tx_\alpha \uparrow Tx$ iken T nin sıra sürekli olduğunu gösterelim.

$x_\alpha \downarrow 0$ ise $-x_\alpha \uparrow 0$ dır. Hipotezden $T(-x_\alpha) \uparrow T0 = 0$ dır. T nin lineerliğinden $-Tx_\alpha \uparrow 0$ olur. $Tx_\alpha \downarrow 0$ bulunur. 1.şıktan T sıra sürekli dir.

3.2.1. Örnek

Bir σ – sıra sürekli operatör sıra sürekli olmak zorunda değildir.

İspat

$E = \{f|f: [0,1] \rightarrow \mathbf{R}, f \text{ Lebesgue integrallenebilir fonksiyon}\}$ olmak üzere

$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ ve $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ işlemleri ile E bir vektör uzayıdır.

‘Her $x \in [0,1]$ için $f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow f \leq g$ ’ sıralaması ile E bir Riesz uzayıdır.

Şimdi $f_\alpha \uparrow f$ olması için gerek ve yeter şartın her $x \in [0,1]$ için $f_\alpha(x) \uparrow f(x)$ olduğunu gösterelim. Öncelikle $f_\alpha \uparrow f$ alalım. $f_\alpha \uparrow$ ve $\sup f_\alpha = f$ dir. Her x için $f_\alpha(x) \uparrow$ olduğunu gösterelim. $f_\alpha \uparrow$ ise her $\alpha_1, \alpha_2 \in \Lambda$ için en az bir $\alpha_3 \in \Lambda$ vardır öyle ki $f_{\alpha_1} \leq f_{\alpha_3}$ ve $f_{\alpha_2} \leq f_{\alpha_3}$ tür. $f_{\alpha_1} \leq f_{\alpha_3}$ ve

$f_{\alpha_2} \leq f_{\alpha_3}$ olduğundan her x için $f_{\alpha_1}(x) \leq f_{\alpha_3}(x)$ ve $f_{\alpha_2}(x) \leq f_{\alpha_3}(x)$ dir. O halde $f_\alpha(x) \uparrow$ dır.

$h: [0,1] \rightarrow \mathbf{R}$

$$h(x) = \sup[f_\alpha(x)]$$

biçiminde tanımlayalım. Her α ve her $x \in [0,1]$ için $f_\alpha \leq f$ ise $f_\alpha(x) \leq f(x)$ olduğundan $\{f_\alpha(x)\}$ üstten sınırlıdır. $\mathbf{R}$ Dedekind tam olduğundan $\sup f_\alpha(x) \in \mathbf{R}$ dir. Yani h anlamlıdır. Supremumun tekliğinden h iyi tanımlıdır. Her $x \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned} f_\alpha(x) \leq f(x) &\Rightarrow \sup_{\alpha} f_\alpha(x) \leq f(x) \\ &\Rightarrow h(x) \leq f(x) \end{aligned}$$

Buradan $h \leq f$ dir. h in tanımından dolayı her α ve her x için $f_\alpha(x) \leq h(x)$ ise noktasal sıralamaya göre $f_\alpha \leq h$ dir. $\sup f_\alpha = f$ olduğundan $f \leq h$ elde edilir , o halde $h = f$ dir. Yani $\sup f_\alpha(x) = f(x)$ bulunur.

$T: E \rightarrow \mathbf{R}$

$$T(f) = \int_0^1 f(x) dx$$

Her $f, g \in E$ için $T(f + g) = T(f) + T(g)$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} T(f + g) &= \int_0^1 (f + g)(x) dx = \int_0^1 (f(x) + g(x)) dx \\ &= \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 g(x) dx = T(f) + T(g) \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi her $\lambda \in \mathbf{R}$ ve her $f \in E$ için

$$T(\lambda f) = \int_0^1 (\lambda f)(x) dx = \lambda \int_0^1 f(x) dx = \lambda T(f)$$

olduğundan T lineerdir. $x \in \mathbf{R}^+$ ve $f \in E^+$ olsun. O halde $f(x) \geq 0$ olur. Dolayısıyla $\int_0^1 f(x) dx \geq 0$ dır. O halde $T(x) \in \mathbf{R}^+$ olduğundan T pozitifdir.

[12] Teorem 18.11 den $f_n \uparrow f$ ise $\int_0^1 f_n(x) dx \uparrow \int_0^1 f(x) dx$ dir. Buradan

T σ - *sıra süreklidir*. Diğer yandan

$\mathcal{F} = \{A : A \subseteq [0,1] \text{ ve } A \text{ sonlu}\}$ olarak tanımlarsak

$S = \{\chi_A \mid A \in \mathcal{F}\} \subseteq E$ ve $S \uparrow$ ve $S \uparrow \mathbf{1}$ dir.

$\chi_{A_1}, \chi_{A_2} \in S$ için $A_1 \subseteq [0,1], A_2 \subseteq [0,1]$ sonlu kümelerdir. $A_3 = A_1 \cup A_2$ alırsak $A_3 \in \mathcal{F}$ dir. $A_1 \subseteq A_3$ ve $A_2 \subseteq A_3$ olduğundan $\chi_{A_1} \leq \chi_{A_3}$ ve $\chi_{A_2} \leq \chi_{A_3}$ dır.

Her x için ;

1.Durum : $x \in A_1$ ise $x \in A_3$ dır. Buradan $\chi_{A_1}(x) = 1$ ve $\chi_{A_3}(x) = 1$ olduğundan

$\chi_{A_1}(x) = \chi_{A_3}(x)$ dır. O halde $\chi_{A_1}(x) \leq \chi_{A_3}(x)$ olup $\chi_{A_1} \leq \chi_{A_3}$ bulunur.

2.Durum : $x \in A_3$ ve $x \notin A_1$ ise $\chi_{A_1}(x) = 0$ ve $\chi_{A_3}(x) = 1$ olduğundan

$\chi_{A_1}(x) \leq \chi_{A_3}(x)$ olup buradan $\chi_{A_1} \leq \chi_{A_3}$ bulunur.

3.Durum : $x \notin A_1$ ve $x \notin A_3$ ise $\chi_{A_1}(x) = 0$ ve $\chi_{A_3}(x) = 0$ olduğundan $\chi_{A_1}(x) = \chi_{A_3}(x)$ ve $\chi_{A_1}(x) \leq \chi_{A_3}(x)$ olup buradan $\chi_{A_1} \leq \chi_{A_3}$ bulunur. Benzer şekilde $\chi_{A_2} \leq \chi_{A_3}$ elde edilir. 0 halde $S \uparrow$ dır.

Şimdi $\sup_{A \in \mathcal{F}} \chi_A = \mathbf{1}$ olduğunu gösterelim. Her $x \in [0,1]$ için $\chi_A(x) \leq 1 = \mathbf{1}(x)$ olduğundan

$\chi_A \leq \mathbf{1}$ dir. $\chi_A(x) \leq \lambda < 1$ olsun. $\{x\} \in \mathcal{F}$ olduğundan $A_0 = \{x\}$ alırsak $\chi_{A_0}(x) = 1$ olur. Hipotezden $\chi_{A_0}(x) = 1 \leq \lambda < 1$ dır. Dolayısıyla $1 < 1$ çelişki elde edilir. O halde $S \uparrow \mathbf{1}$ dir.

İspatın ilk kısmından $\chi_A \uparrow \mathbf{1}$ bulunur. $T(\chi_A) \uparrow T(\mathbf{1})$ değildir, gösterelim.

$$T(\chi_A) = \int_0^1 \chi_A(x) dx = \int_A dx = 0$$

$$T(\mathbf{1}) = \int_0^1 \mathbf{1}(x) dx = \int_0^1 dx = 1$$

dir. O halde $T(\chi_A) \uparrow T(\mathbf{1})$ değildir. Dolayısıyla T sıra sürekli değildir.

Teorem

$T: E \rightarrow F$ sıra sınırlı lineer operatör ve F Dedekind tam olsun. Aşağıdakiler denktir.

- 1) T sıra sürekliidir.
- 2) Her $(x_\alpha) \subseteq E$ için $x_\alpha \downarrow 0$ iken $Tx_\alpha \xrightarrow{o} 0$ dır.
- 3) Her $(x_\alpha) \subseteq E$ için $x_\alpha \downarrow 0$ iken $\inf |Tx_\alpha| = 0$ dır.
- 4) T^+ ve T^- sıra sürekliidir.
- 5) $|T|$ sıra sürekliidir.

İspat

1) $\Rightarrow$ 2) T sıra sürekli olsun. Her $(x_\alpha) \subseteq E$ için $|x_\alpha| = x_\alpha$ ve $x_\alpha \downarrow 0$ olduğundan $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ dır. T nin sıra sürekliliğinden $Tx_\alpha \xrightarrow{o} T0 = 0$ elde edilir.

2) $\Rightarrow$ 3) Her $(x_\alpha) \subseteq E$ için $x_\alpha \downarrow 0$ iken $Tx_\alpha \xrightarrow{o} 0$ alalım. $Tx_\alpha \xrightarrow{o} 0$ ise $\alpha_0 \leq \alpha$ iken

$|Tx_\alpha| \leq y_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde $\alpha_0 \in \Lambda$ ve $(y_\alpha) \subseteq E$ neti vardır.

$$\begin{aligned} 0 \leq |Tx_\alpha| \leq y_\alpha &\Rightarrow 0 \leq \inf |Tx_\alpha| \leq \inf y_\alpha = 0 \\ &\Rightarrow \inf |Tx_\alpha| = 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

3) $\Rightarrow$ 4) F Dedekind tam olduğundan Teorem 2.2.1 den $T^+ \in L_b(E, F)$ dir. Her $x \in E^+$ için

$T^+(x) = \sup\{|T_y| : 0 \leq y \leq x\}$ olduğunu biliyoruz. Şimdi $x_\alpha \downarrow 0$ iken $T^+(x_\alpha) \downarrow 0$ olduğunu gösterelim.

β sabit bir indis olmak üzere $x_\beta = x$ alalım. $x \in E^+$ ve $\beta \leq \alpha$ için $x_\alpha \leq x_\beta = x$ dir.

$0 \leq y \leq x$ olmak üzere Teorem 2.1.1 den $|x \wedge y - x \wedge z| \leq |y - z|$ dır.

$0 \leq y - (y \wedge x_\alpha) = (y \wedge x) - (y \wedge x_\alpha) \leq x - x_\alpha$ elde edilir. $T \leq T^+$ olduğundan

$$\begin{aligned} T(y) - T(y \wedge x_\alpha) &= T(y - y \wedge x_\alpha) \leq T^+(y - y \wedge x_\alpha) \leq T^+(x - x_\alpha) \\ &= T^+(x) - T^+(x_\alpha) \end{aligned}$$

dır. O halde

$$0 \leq T^+(x_\alpha) \leq T^+(x) + T(y \wedge x_\alpha) - T(y) \leq T^+(x) + |T(y \wedge x_\alpha)| - T(y)$$

bulunur. T^+ pozitif olduğundan $T^+(x_\alpha) \downarrow$ dır. Şimdi $\inf T^+(x_\alpha) = 0$ olduğunu gösterelim.

$$0 \leq z \leq T^+(x_\alpha) \leq T^+(x) + |T(y \wedge x_\alpha)| - T(y)$$

$x_\alpha \downarrow 0$ olduğundan ve Teorem 2.1.2 göz önüne alınırsa $(y \wedge x_\alpha) \downarrow 0$ ve hipotezden

$$0 \leq z \leq T^+(x) + \inf_{\alpha} |T(y \wedge x_\alpha)| - T(y) \text{ dır.}$$

$$\begin{aligned} 0 \leq z \leq T^+(x) - T(y) &\Rightarrow 0 \leq z + T(y) \leq T^+(x) \\ &\Rightarrow 0 \leq \sup_{0 \leq y \leq x} (z + Ty) \leq T^+(x) \\ &\Rightarrow 0 \leq z + \sup_{0 \leq y \leq x} Ty \leq T^+(x) \\ &\Rightarrow 0 \leq z + T^+(x) \leq T^+(x) \\ &\Rightarrow z = 0 \end{aligned}$$

dır. O halde T^+ sıra süreklidir. Benzer şekilde T^- nin sıra sürekli olduğu gösterilir.

4) $\Rightarrow$ 5) T^+ ve T^- sıra sürekli ve $L_o(E, F)$ vektör uzayı olduğundan $T^+ + T^- = |T|$ sıra süreklidir.

5) $\Rightarrow$ 1) $|T|$ sıra sürekli olsun . $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ ise $\alpha_0 \leq \alpha$ iken $|x_\alpha - x| \leq y_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde en az bir $\alpha_0 \in \Lambda$ ve $(y_\alpha) \subseteq E$ neti vardır. T nin lineerliğinden Teorem 3.2.1 göz önüne alınırsa,

$$|Tx_\alpha - Tx| = |T(x_\alpha - x)| \leq |T||x_\alpha - x| \leq |T|(y_\alpha) \downarrow 0$$

olduğundan $Tx_\alpha \xrightarrow{o} Tx$ dır. O halde T sıra süreklidir.

Teorem

E ve F Riesz uzayı, E Dedekind tam olsun. $L_o(E, F)$ ve $L_\sigma(E, F)$, $L_b(E, F)$ nin bandleridir.

İspat

Her $T \in L_o(E, F)$ iken Teorem 3.2.2 (v) den $|T| \in L_o(E, F)$ olduğundan Riesz uzayıdır. $L_b(E, F)$ de $|S| \leq |T|$ ve

$T \in L_o(E, F)$ olsun. $x_\alpha \downarrow 0$ olmak üzere $|S|$ pozitif olduğundan $|S|(x_\alpha) \downarrow 0$ dır. Diğer yandan

$0 \leq |S|(x_\alpha) \leq |T|(x_\alpha)$ olması ve $|T|$ nin sıra sürekli olmasından

$0 \leq \inf |S|(x_\alpha) \leq \inf |T|(x_\alpha) = 0$ olur. Buradan $\inf |S|(x_\alpha) = 0$ yani $|S|(x_\alpha) \downarrow 0$ elde edilir. $|S|$ sıra süreklidir. Teorem 3.2.2 den S sıra süreklidir.

$\{T_\lambda\} \subseteq L_o(E, F)$ için $L_b(E, F)$ içinde $0 \leq T_\lambda \uparrow T$ ve E içinde $0 \leq x_\alpha \uparrow x$ olsun. Her λ için

$$\begin{aligned} 0 \leq T(x - x_\alpha) &= T(x) - T(x_\alpha) \\ &\leq T(x) - T_\lambda(x) + T_\lambda(x) - T_\lambda(x_\alpha) \\ &= (T - T_\lambda)(x) + T_\lambda(x - x_\alpha) \end{aligned}$$

bulunur. Lemma 2.1.1 den $(x - x_\alpha) \downarrow 0$ ve T_λ sıra sürekli olduğundan,

$$0 \leq \inf_\alpha \{T(x - x_\alpha)\} \leq \inf [(T - T_\lambda)(x) + T_\lambda(x - x_\alpha)] = (T - T_\lambda)(x) + \inf \{T_\lambda(x - x_\alpha)\}$$

Bu eşitsizlikten $0 \leq \inf_\alpha \{T(x - x_\alpha)\} \leq (T - T_\lambda)(x)$ elde edilir.

$T_\lambda \uparrow T$ olduğundan Lemma 2.1.1 den $(T - T_\lambda) \downarrow 0$ dır. O halde her $x \in E^+$ için

$$(T - T_\lambda)(x) \downarrow 0 \text{ elde edilir. Buradan } 0 \leq \inf_\alpha \{T(x - x_\alpha)\} \leq \inf_\lambda \{(T - T_\lambda)(x)\} = 0 \text{ dır.}$$

Böylece $T(x_\alpha) \uparrow T(x)$ bulunur.

4. SINIRSIZ SIRA YAKINSAMA

4.1. Sınırsız Sıra Yakınsama ve Özellikleri

Bu bölümde sınırsız sıra sürekli operatörler [8] de verilen “Uo-convergence and its applications to Cesàro means in Banach lattices” isimli makale incelenerek detaylandırılmıştır.

4.1.1. Tanım

E Riesz uzayı, $(x_\alpha) \subseteq E$ net ve $x \in E$ olsun. Her $u \in E^+$ ve her α için $\alpha_0 \leq \alpha$ iken

$|x_\alpha - x| \wedge u \leq y_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde $(y_\alpha) \subseteq E$ neti ve α_0 varsa $(x_\alpha), x$ e *sınırsız sıra yakınsaktır* denir ve $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ ile gösterilir.

4.1.1. Lemma

E Riesz uzayı, $(x_\alpha), (y_\alpha) \subseteq E$ net, $x, y \in E$ ve $k, r \in \mathbf{R}$ olsun. Aşağıdakiler sağlanır.

(i) $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ olması için gerek ve yeter koşul $x_\alpha - x \xrightarrow{uo} 0$ olmasıdır.

(ii) $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ ve $x_\alpha \xrightarrow{uo} y$ ise $x = y$ dir.

(iii) $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ ve $y_\alpha \xrightarrow{uo} y$ olmak üzere

- $kx_\alpha + ry_\alpha \xrightarrow{uo} kx + ry$

- $x_\alpha \vee y_\alpha \xrightarrow{uo} x \vee y$

- $x_\alpha \wedge y_\alpha \xrightarrow{uo} x \wedge y$

- $x_\alpha^+ \xrightarrow{uo} x^+$

- $x_\alpha^- \xrightarrow{uo} x^-$

- $|x_\alpha| \xrightarrow{uo} |x|$

(iv) $x_\alpha \uparrow (x_\alpha \downarrow)$ ve $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ ise $x_\alpha \uparrow x$ ($x_\alpha \downarrow x$) dir.

İspat

(i) $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ ise her $u \in E^+$ ve her α için $\alpha_0 \leq \alpha$ iken $|x_\alpha - x| \wedge u \leq y_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde $(y_\alpha) \subseteq E$ neti ve α_0 vardır. Dolayısıyla her $u \in E^+$ ve her α için $\alpha_0 \leq \alpha$ iken $|(x_\alpha - x) - 0| \wedge u \leq y_\alpha \downarrow 0$ eşitsizliği aynı (y_α) neti ve α_0 için sağlanır. Dolayısıyla $x_\alpha - x \xrightarrow{uo} 0$ dır.

(ii) $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ ise her $u \in E^+$ ve her α için $\alpha_1 \leq \alpha$ iken $|x_\alpha - x| \wedge u \leq p_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde $(p_\alpha) \subseteq E$ neti ve α_1 vardır. $x_\alpha \xrightarrow{uo} y$ ise her $u \in E^+$ ve her α için $\alpha_2 \leq \alpha$ iken $|x_\alpha - y| \wedge u \leq q_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde $(q_\alpha) \subseteq E$ neti ve α_2 vardır.

$\wedge$ yukarı yönlendirilmiş olduğundan $\alpha_1, \alpha_2 \in \Lambda$ olmak üzere $\alpha_1 \leq \alpha_3$ ve $\alpha_2 \leq \alpha_3$ olacak şekilde $\alpha_3 \in \Lambda$ vardır. Her $u \in E^+$ ve $\alpha_3 \leq \alpha$ için Teorem 2.1.1 göz önüne alınarak,

$$\begin{aligned} 0 &\leq |x - y| \wedge u = |x - x_\alpha + x_\alpha - y| \wedge u \\ &\leq (|x - x_\alpha| + |x_\alpha - y|) \wedge u \\ &\leq |x - x_\alpha| \wedge u + |x_\alpha - y| \wedge u \\ &\leq p_\alpha + q_\alpha \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 0 \leq |x - y| \wedge u \leq \inf_{\alpha} (p_\alpha + q_\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow |x - y| \wedge u = 0$$

$u = |x - y|$ alınırsa $|x - y| \wedge |x - y| = |x - y| = 0$ olacağından $x = y$ elde edilir.

(iii)

- $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ ise her $u \in E^+$ ve her α için $\alpha_1 \leq \alpha$ iken $|x_\alpha - x| \wedge u \leq p_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde $(p_\alpha) \subseteq E$ neti ve α_1 vardır. $y_\alpha \xrightarrow{uo} y$ ise her $u \in E^+$ ve her α için $\alpha_2 \leq \alpha$ iken $|y_\alpha - y| \wedge u \leq q_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde $(q_\alpha) \subseteq E$ neti ve α_2 vardır. $\wedge$ yukarı yönlendirilmiş olduğundan $\alpha_1, \alpha_2 \in \Lambda$ olmak üzere $\alpha_1 \leq \alpha_3$ ve $\alpha_2 \leq \alpha_3$ olacak şekilde $\alpha_3 \in \Lambda$ vardır. Her $u \in E^+$ ve $\alpha_3 \leq \alpha$ iken $p_\alpha \downarrow 0$ ve $q_\alpha \downarrow 0$ ise $k, r \in \mathbf{R}$ olduğundan $|k|p_\alpha \downarrow 0$ ve $|r|q_\alpha \downarrow 0$ olur. Lemma 2.1.1 den Dolayısıyla

$$(|k|p_\alpha + |r|q_\alpha) \downarrow 0 \text{ dır. Ayrıca Teorem 2.1.1 (1) kullanılarak}$$

$$\begin{aligned} |kx_\alpha + ry_\alpha - kx - ry| \wedge u &= (|k||x_\alpha - x| + |r||y_\alpha - y|) \wedge u \\ &\leq (|k||x_\alpha - x|) \wedge u + (|r||y_\alpha - y|) \wedge u \end{aligned}$$

$$\leq (|k|p_\alpha + |r|q_\alpha) \downarrow 0$$

bulunur. O halde $kx_\alpha + ry_\alpha \xrightarrow{uo} kx + ry$ dir.

- Teorem 2.1.1 (2) göz önüne alınarak

$$\begin{aligned} |x_\alpha \vee y_\alpha - x \vee y| \wedge u &= |x_\alpha \vee y_\alpha - x \vee y_\alpha + x \vee y_\alpha - x \vee y| \wedge u \\ &\leq (|x_\alpha \vee y_\alpha - x \vee y_\alpha| + |x \vee y_\alpha - x \vee y|) \wedge u \\ &\leq (|x_\alpha - x| + |y_\alpha - y|) \wedge u \\ &\leq |x_\alpha - x| \wedge u + |y_\alpha - y| \wedge u \\ &\leq (p_\alpha + q_\alpha) \downarrow 0 \end{aligned}$$

bulunur. O halde $x_\alpha \vee y_\alpha \xrightarrow{uo} x \vee y$ dir.

- $|x_\alpha \wedge y_\alpha - x \wedge y| \wedge u = |x_\alpha \wedge y_\alpha - x \wedge y_\alpha + x \wedge y_\alpha - x \wedge y| \wedge u$

$$\begin{aligned} &\leq (|x_\alpha \wedge y_\alpha - x \wedge y_\alpha| + |x \wedge y_\alpha - x \wedge y|) \wedge u \\ &\leq (|x_\alpha - x| \wedge y_\alpha + x \wedge |y_\alpha - y|) \\ &\leq |x_\alpha - x| \wedge u + |y_\alpha - y| \wedge u \\ &\leq (p_\alpha + q_\alpha) \downarrow 0 \end{aligned}$$

bulunur. O halde $x_\alpha \wedge y_\alpha \xrightarrow{uo} x \wedge y$ dir.

Tanım 2.1.6 ve Teorem 2.1.3 göz önüne alınarak

- $|x_\alpha^+ - x^+| \wedge u = |(x_\alpha \vee 0) - (x \vee 0)| \wedge u$

$$\begin{aligned} &\leq |(x_\alpha - x) \vee 0| \wedge u \\ &\leq |x_\alpha - x| \wedge u \\ &\leq p_\alpha \downarrow 0 \end{aligned}$$

bulunur. O halde $x_\alpha^+ \xrightarrow{uo} x^+$ dir.

- $|x_\alpha^- - x^-| \wedge u = |(x_\alpha \wedge 0) - (x \wedge 0)| \wedge u$

$$\begin{aligned} &\leq |(x_\alpha - x) \wedge 0| \wedge u \\ &\leq |x_\alpha - x| \wedge u \\ &\leq p_\alpha \downarrow 0 \end{aligned}$$

bulunur. O halde $x_\alpha^- \xrightarrow{uo} x^-$ dir.

$$\begin{aligned}
\bullet \quad & ||x_\alpha| - |x|| \wedge u = |(x_\alpha^+ + x_\alpha^-) - (x^+ - x^-)| \wedge u \\
& = |(x_\alpha^+ - x^+) + (x_\alpha^- - x^-)| \wedge u \\
& \leq |x_\alpha^+ - x^+| \wedge u + |x_\alpha^- - x^-| \wedge u \\
& \leq p_\alpha \downarrow 0
\end{aligned}$$

bulunur. O halde $|x_\alpha| \xrightarrow{uo} |x|$ dir.

(iv) $x_\alpha \uparrow$ ve $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ olsun. $x_\alpha \uparrow$ ise Lemma 2.1.1 göz önüne alınarak $(-x_\alpha) \downarrow$ ve dolayısıyla $(x - x_\alpha) \downarrow$ dir. Her keyfi β için bir elemanın negatif kısmı mutlak değerinden küçük eşit olduğu göz önüne alınırsa $(x - x_\beta)^- \leq |x - x_\alpha|$ dir.

$$\begin{aligned}
\beta \leq \alpha & \Rightarrow x_\beta \leq x_\alpha \\
& \Rightarrow -x_\alpha \leq -x_\beta \\
& \Rightarrow x - x_\alpha \leq x - x_\beta \\
& \Rightarrow -(x - x_\beta) \leq -(x - x_\alpha) \\
& \Rightarrow -(x - x_\beta) \vee 0 \leq -(x - x_\alpha) \vee 0 \\
& \Rightarrow (x - x_\beta)^- \leq (x - x_\alpha)^-
\end{aligned}$$

dir. Her $u \in E^+$ için $(x - x_\beta)^- \wedge u \leq (x - x_\alpha)^- \wedge u$ dir.

O halde her $u \in E^+$ için $0 \leq (x - x_\beta)^- \wedge u \leq (x - x_\alpha)^- \wedge u \leq |x - x_\alpha| \wedge u$ olur.

$x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ ise her $u \in E^+$ ve her α için $\alpha_0 \leq \alpha$ iken $|x_\alpha - x| \wedge u \leq p_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde $(p_\alpha) \subseteq E$ neti ve α_0 vardır. O halde,

$$\begin{aligned}
0 & \leq (x - x_\beta)^- \wedge u \leq |x_\alpha - x| \wedge u \leq p_\alpha \downarrow 0 \\
& \Rightarrow [-(x - x_\beta) \vee 0] \wedge u = 0 \\
& \Rightarrow -(x - x_\beta) \vee 0 = 0 \\
& \Rightarrow -x + x_\beta \leq 0 \\
& \Rightarrow x_\beta \leq x
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece x_β, x için bir üst sınır olur.

Her $u \in E^+$ ve her α için $\alpha_0 \leq \alpha$ iken,

$0 \leq (x - x_\alpha) \wedge u = |x - x_\alpha| \wedge u \leq p_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde $(p_\alpha) \subseteq E$ neti ve α_0 vardır. Buradan $0 \leq \inf_\alpha [(x - x_\alpha) \wedge u] \leq \inf_\alpha (p_\alpha) = 0$

$$\begin{aligned}
& \Rightarrow \inf_\alpha [(x - x_\alpha) \wedge u] = 0 \\
& \Rightarrow x + \inf_\alpha (-x_\alpha) = 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow x = \sup_{\alpha} (x_{\alpha})$$

$$\Rightarrow x_{\alpha} \uparrow x$$

elde edilir.

4.1.2. Lemma

$(x_{\alpha}) \subseteq E$ sıra sınırlı neti için $(x_{\alpha}) \xrightarrow{o} 0$ olması için gerek ve yeter şart $(x_{\alpha}) \xrightarrow{uo} 0$ olmasıdır.

İspat

$(\Rightarrow)$ $x_n \xrightarrow{o} 0$ ise $\alpha_0 \leq \alpha$ iken $|x_{\alpha}| \leq y_{\alpha} \downarrow 0$ olacak şekilde α_0 ve en az bir (y_{α}) neti vardır.

Her $u \in E^+$ için $|x_{\alpha}| \wedge u \leq (y_{\alpha} \wedge u) \downarrow 0 \Rightarrow |x_{\alpha}| \wedge u \xrightarrow{o} 0$

$$\Rightarrow (x_{\alpha}) \xrightarrow{uo} 0$$

elde edilir.

$(\Leftarrow)$ $(x_{\alpha}) \xrightarrow{uo} 0$ ise her $u \in E^+$ için $|x_{\alpha}| \wedge u \xrightarrow{o} 0$ dir. (x_{α}) neti sıra sınırlı olduğundan

$|x_{\alpha}| \leq z$ olacak şekilde $z \in E^+$ vardır. Her $u \in E^+$ için $|x_{\alpha}| \wedge z \xrightarrow{o} 0$ dir. $|x_{\alpha}| \wedge z = x_{\alpha}$ olduğundan $(x_{\alpha}) \xrightarrow{o} 0$ dir.

4.1.1. Teorem

E Riesz uzayı ve Y, E in Riesz alt uzayı olsun. Aşağıdakiler denktir.

(i) Y regülerdir.

(ii) Her $(y_{\alpha}) \subseteq Y$ neti için Y içinde $y_{\alpha} \xrightarrow{uo} 0$ ise E içinde $y_{\alpha} \xrightarrow{uo} 0$ dir.

- (iii) Her $(y_\alpha) \subseteq Y$ neti için Y içinde $y_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ olması için gerek ve yeter koşul E içinde $y_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ olmasıdır.

İspat

(ii) $\Rightarrow$ (i) : Y içinde $y_\alpha \downarrow 0$ olsun. Lemma 3.1.3 den $y_\alpha \downarrow 0$ ise her α için $\alpha \leq \alpha_0$ iken $y_{\alpha_0} \leq y_\alpha$ dır. O halde $(y_\alpha)_{\alpha \leq \alpha_0}$ neti sınırlıdır. E içinde $y_\alpha \downarrow$ dır. Hipotez (ii) den her $u \in Y^+$ ve her α için $\alpha_1 \leq \alpha$ iken $y_\alpha \wedge u \leq p_\alpha \downarrow$ olacak şekilde $(p_\alpha) \subseteq E$ neti ve α_1 vardır. Her $u \in Y^+$ için sağlandığından $u = y_{\alpha_0}$ alınır, $y_\alpha = y_\alpha \wedge y_{\alpha_0} \leq p_\alpha \downarrow 0$ bulunur. Lemma 3.1.1. (iv) den $y_\alpha \downarrow$ ve E içinde $y_\alpha \xrightarrow{o} 0$ dır. O halde E içinde $y_\alpha \downarrow 0$ elde edilir. Dolayısıyla Y regülerdir.

(i) $\Rightarrow$ (iii) : Y regüler ve Y içinde $y_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ olsun. E, E^δ içinde regüler olduğundan Y, E^δ içinde regülerdir. E^δ içinde Y nin ürettiği ideale I diyelim. I içinde $y_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ olduğunu gösterelim. $u \in I^+$ alalım. Y regüler olduğundan $0 \leq u \leq y$ olacak şekilde $y \in Y^+$ vardır. Her $z \in Y^+$ için Y içinde $|y_\alpha| \wedge z \xrightarrow{o} 0$ olur. $z = y$ alınır, Y içinde $|y_\alpha| \wedge y \xrightarrow{o} 0$ olur. Y, E^δ içinde regüler olduğundan I içinde $|y_\alpha| \wedge y \xrightarrow{o} 0$ olduğunu gösterelim. Öncelikle I içinde $|y_\alpha| \wedge u \xrightarrow{o} 0$ olduğunu gösterelim. Her $u \in I^+$ ve her α için $\alpha_0 \leq \alpha$ iken $0 \leq |y_\alpha| \wedge u \leq |y_\alpha| \wedge y \leq p_\alpha \downarrow 0$ bulunur. O halde $|y_\alpha| \wedge u \leq p_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde (p_α) neti vardır. [6] Lemma 3.4 den E^δ içinde $y_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ dır. Sonuç 3.1.2 den E içinde $y_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ dır.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) : Aşıkardır.

4.1.1. Sonuç

(i) E Riesz uzayı ve Y, E in ideali olsun.

(ii) E normlu örgü ve Y, E in norm tam ve sıra sürekli normlu alt örgüsü

olsun. (i) veya (ii) sağlanıyorsa her $(y_\alpha) \subseteq Y$ neti için Y içinde $y_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ olması için gerek ve yeter koşul E içinde $y_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ olmasıdır.

İspat

Sonuç 3.1.1 den Y regüler olup ispat tamamlanır.

4.1.2. Sonuç

E Riesz uzayı ve $x_0 > 0$, E in zayıf birimi olsun. $(x_\alpha) \subseteq E$ net olmak üzere $x_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ olması için gerek ve yeter koşul $|x_\alpha| \wedge x_0 \xrightarrow{o} 0$ olmasıdır.

İspat

E Riesz uzayı ve $x_0 > 0$, E in zayıf birimi olsun. $(x_\alpha) \subseteq E$ net olmak üzere $x_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ ise her

$u \in E^+$ ve her α için $\alpha_0 \leq \alpha$ iken $|x_\alpha - x| \wedge u \leq y_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde $(y_\alpha) \subseteq E$ neti ve

α_0 vardır. $u = x_0$ alınırsa $|x_\alpha| \wedge x_0 \leq y_\alpha \downarrow 0$ ve $|x_\alpha| \wedge x_0 \xrightarrow{o} 0$ elde edilir.

Tersine x_0 in E^δ nın da zayıf birimi olduğunu gösterelim.

E içinde x_0 in ürettiği band $B_{x_0} = \{y \in E : |y| \wedge n x_0 \uparrow |y|\}$ ve [10] Teorem 1.38 den

E^δ içinde x_0 in ürettiği band $B'_{x_0} = \{y \in E^\delta : |y| \wedge n x_0 \uparrow |y|\}$ dir.

$B_{x_0} = E$ olduğunu biliyoruz. $B'_{x_0} = E^\delta$ olduğunu gösterelim. $B'_{x_0} \subseteq E^\delta$ dır. Öncelikle $E^\delta \subseteq B'_{x_0}$ olduğunu gösterelim. Her $y \in E^\delta$ için $|y| \leq z$ ve $z \in E$ olacak şekilde E^δ tanımından z vardır. $E = B_{x_0}$ olduğundan $z \in B_{x_0}$ dır. $z \in B_{x_0}$ ve $|y| \leq z$ için $y \in B_{x_0}$ dır.

$B_{x_0} \subseteq B'_{x_0}$ olduğundan $y \in B'_{x_0}$ bulunur. O halde $B'_{x_0} = E^\delta$ olduğu gösterilmiştir.

Şimdi E^δ içinde $|x_\alpha| \wedge x_0 \xrightarrow{o} 0$ olsun. Her $u \in E^+$ için E^δ içinde $|x_\alpha| \wedge u \xrightarrow{o} 0$ olduğunu gösterelim. Bunu göstermek için $\lim sup(|x_\alpha| \wedge u) = 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. Her

$u \in E^+$ için Teorem 2.1.2 (ii) göz önüne alınarak,

$$0 \leq \left[\lim sup(|x_\alpha| \wedge u) \right] \wedge x_0$$

$$= \lim \sup(|x_\alpha| \wedge u \wedge x_0)$$

$$\leq \lim \sup(|x_\alpha| \wedge x_0)$$

$$= 0$$

olur. Buradan $\lim \sup(|x_\alpha| \wedge u) \wedge x_0 = 0$ elde edilir. x_0 zayıf birim ve zayıf birim tanımından [10] Teorem 1.47 den

$\lim \sup(|x_\alpha| \wedge u) = 0$ olur. Benzer şekilde $\lim \inf(|x_\alpha| \wedge u) = 0$ dır. O halde

$\lim \sup(|x_\alpha| \wedge u) \wedge x_0 = \lim \inf(|x_\alpha| \wedge u) = 0$ olduğundan Önerme 3.1.1 den E^δ içinde

$|x_\alpha| \wedge u \xrightarrow{o} 0$ olur. Sonuç 3.1.2 den E^δ içinde $|x_\alpha| \wedge u \xrightarrow{o} 0$ olması için gerek ve yeter koşul E içinde $|x_\alpha| \wedge u \xrightarrow{o} 0$ olmasıdır.

4.1.3. Sonuç

E Riesz uzayı, $(x_n) \subseteq E$ dik dizi olsun. O halde E içinde $x_n \xrightarrow{uo} 0$ dır.

İspat

E^δ, E in Dedekind tamlaması olmak üzere $(x_n) \subseteq E$ dik dizi ise $(x_n), E^\delta$ içinde de dik dizi olduğunu gösterelim. E içinde $n \neq m$ için $|x_n| \wedge |x_m| = 0$ alalım. E^δ içinde de $n \neq m$ için $|x_n| \wedge |x_m| = 0$ olduğunu gösterelim. $0 < z \leq |x_n| \wedge |x_m|$ olacak şekilde

$z \in E^\delta$ varsayalım. E, E^δ içinde sıra yoğun olduğundan $0 < x \leq |x_n| \wedge |x_m|$ olacak şekilde $x \in E$ vardır. Bu ise E içinde $|x_n| \wedge |x_m| = 0$ olması ile çelişir. Dolayısıyla $(x_n), E^\delta$ içinde dik dizidir.

Keyfi $z \in X_+^\delta$ için $y_1 = V_{k=1}^\infty(|x_k| \wedge z)$, $y_2 = V_{k=2}^\infty(|x_k| \wedge z), \dots, y_n = V_{k=n}^\infty(|x_k| \wedge z)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
y_n &= \bigvee_{k=n}^{\infty} (|x_k| \wedge z) = |x_n| \vee \bigvee_{k=n+1}^{\infty} (|x_k| \wedge z) \\
&\geq x_n \wedge y_{n+1} \\
&\geq y_{n+1}
\end{aligned}$$

olduğundan (y_n) azalandır.

Keyfi $z \in E_+^\delta$ için $y_n = \bigvee_{k=n}^{\infty} (|x_k| \wedge z)$ olmak üzere $y_n \downarrow 0$ olduğunu gösterelim. Her n için $0 \leq y \leq y_n$ iken $y = 0$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$$0 \leq y \wedge |x_1| = y_2 \wedge |x_1| = \left[\sum_{k=2}^{\infty} (|x_k| \wedge z) \right] \wedge |x_1| = \bigvee_{k=2}^{\infty} (|x_k| \wedge z \wedge |x_1|) = 0$$

$$0 \leq y \wedge |x_n| = y_{n+1} \wedge |x_n| = \left[\sum_{k=n+1}^{\infty} (|x_k| \wedge z) \right] \wedge |x_n| = \bigvee_{k=2}^{\infty} (|x_k| \wedge z \wedge |x_n|) = 0$$

bulunur. O halde her n için $x \wedge y_n = 0$ olur.

Buradan $y = y \wedge y_1 = y \wedge [\sum_{k=1}^{\infty} (|x_k| \wedge z)] = \bigvee_{k=1}^{\infty} (|x_k| \wedge z \wedge y) = 0$ olur. Dolayısıyla $y_n \downarrow 0$ dır. O halde E^δ içinde $x_n \xrightarrow{uo} 0$ ise E içinde $x_n \xrightarrow{uo} 0$ dır.

5. SINIRSIZ SIRA SÜREKLİ OPERATÖRLER

Bu bölümde [9] de verilen “Unbounded order continuous operators on Riesz spaces,” isimli makale detaylı olarak incelenip bazı sonuçlar elde edilmiştir. İlk olarak sınırsız sıra dualer, sonra genel sınırsız sıra sürekli operatörler verilmiştir.

5.1. Sınırsız Sıra Sürekli Dualler

5.1.1. Tanım

E ve F Riesz uzayı, $T: E \rightarrow F$ bir operatör olsun.

a) E içinde $x_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ olan her (x_α) ağı için F içinde $Tx_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ ise T ye *sınırsız sıra sürekli operatör* (uo-sürekli) denir. Sınırsız sıra sürekli ve sıra sınırlı operatörlerin kümesi $L_{uo}(E, F)$ biçiminde gösterilir.

b) E içinde $x_n \xrightarrow{uo} 0$ olan her (x_n) dizisi için F içinde $Tx_n \xrightarrow{uo} 0$ ise T ye *sınırsız sıra σ -sürekli operatör* (σ -sürekli) denir. Sınırsız σ - sıra sürekli ve sıra sınırlı operatörlerin kümesi $L_{u\sigma o}(E, F)$ biçimine gösterilir.

$L_{uo}(E, F)$ sınırsız sıra sürekli ve sıra sınırlı operatörlerin kümesi , $F = \mathbf{R}$ alındığında

$L_{uo}(E, \mathbf{R}) = E_{uo}^\sim$ ve $L_{u\sigma o}(E, \mathbf{R}) = E_{u\sigma o}^\sim$ şeklinde gösterilir ve sırasıyla E nin sınırsız sıra sürekli duali, sınırsız sıra σ -sürekli duali denir.

5.1.1. Teorem

E ve F Riesz uzayı olmak üzere $L_{uo}(E, F)$ ve $L_{u\sigma o}(E, F)$, $L_b(E, F)$ nin alt vektör uzaylarıdır.

İspat

Her $S, T \in L_{uo}(E, F)$ ve $(x_\alpha) \subseteq E$ neti için , Lemma 4.1.1 (iii) göz önüne alınarak ,

$$\begin{aligned}
x_\alpha \xrightarrow{uo} 0 &\Rightarrow S(x_\alpha) \xrightarrow{uo} S(x) \text{ ve } T(x_\alpha) \xrightarrow{uo} T(x) \\
&\Rightarrow S(x_\alpha) + T(x_\alpha) \xrightarrow{uo} S(x) + T(x) \\
&\Rightarrow (S + T)(x_\alpha) \xrightarrow{uo} (S + T)(x)
\end{aligned}$$

dir. $\lambda \in \mathbf{R}$ için Lemma 4.1.1(iii) göz önüne alınarak ,

$$\begin{aligned}
x_\alpha \xrightarrow{uo} 0 &\Rightarrow Tx_\alpha \xrightarrow{uo} Tx \\
&\Rightarrow \lambda Tx_\alpha \xrightarrow{uo} \lambda Tx \\
&\Rightarrow (\lambda T)(x_\alpha) \xrightarrow{uo} (\lambda T)(x)
\end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde diğeri de gösterilir.

5.1.2. Teorem

E Riesz uzayı üzerinde tanımlı sıra sınırlı herhangi bir f fonksiyoneli için aşağıdakiler denktir.

- 1) f uo – sürekli dir.
- 2) f^+ ve f^- uo – sürekli dir.
- 3) $|f|$ uo – sürekli dir.

İspat

$1 \Rightarrow 2)$ $(x_\alpha) \subseteq E^+$ ve $x_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ olsun. Teorem 2.2.1 den

$f^+(x) = \sup\{f(y): 0 \leq y \leq x\}$ dir. Dolayısı ile her α için

$f^+(x_\alpha) = \sup\{f(y_\alpha): 0 \leq y_\alpha \leq x_\alpha\}$ olacaktır.

Her $\varepsilon_\alpha > 0$ ve $\varepsilon_\alpha \downarrow 0$ için $f^+(x_\alpha) - \varepsilon_\alpha < f(y_\alpha)$ ve $0 \leq y_\alpha \leq x_\alpha$ olacak şekilde (y_α) neti vardır. Buradan $f^+(x_\alpha) < f(y_\alpha) + \varepsilon_\alpha$ bulunur. $(x_\alpha) \xrightarrow{uo} 0$ ve

$0 \leq y_\alpha \leq x_\alpha$ olduğundan $y_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ olur. f uo – sürekli olduğundan $f(y_\alpha) \xrightarrow{uo} 0$ dır.

Her $\lambda \in \mathbf{R}^+$ için ,

$$\begin{aligned}
0 &\leq f^+(x_\alpha) \wedge \lambda \leq (f(y_\alpha) + \varepsilon_\alpha) \wedge \lambda \leq (f(y_\alpha) \wedge \lambda) + (\varepsilon_\alpha \wedge \lambda) \\
&\Rightarrow 0 \leq o - \lim_\alpha f^+(x_\alpha) \wedge \lambda \leq o - \lim_\alpha (f(y_\alpha) \wedge \lambda) + o - \lim_\alpha (\varepsilon_\alpha \wedge \lambda) = 0 \\
&\Rightarrow f^+(x_\alpha) \wedge \lambda \xrightarrow{o} 0 \\
&\Rightarrow f^+(x_\alpha) \xrightarrow{uo} 0
\end{aligned}$$

elde edilir.

$(x_\alpha) \subseteq E$ keyfi net ve $(x_\alpha) \xrightarrow{uo} 0$ olsun. Lemma 4.1.1 den $|x_\alpha| \xrightarrow{uo} 0$ olması ve ispatın ilk kısmındaki (x_α) yerine $|x_\alpha|$ alınırsa $f^+|x_\alpha| \xrightarrow{uo} 0$ olduğu görülür. $|f^+(x_\alpha)| \leq f^+|x_\alpha|$ olmasından da $f^+(x_\alpha) \xrightarrow{uo} 0$ bulunur. Yani f^+ uo – sürekli dir. $f^- = (-f)^+$ olması gözönüne alınırsa f^- nin uo – sürekli olduğu elde edilir.

2) $\Rightarrow$ 3) $|f| = f^+ + f^-$ biçiminde yazılabilmesi ve $E_{uo}^\sim$ vektör uzayı olduğundan

$|f|$ uo – sürekli olur.

3) $\Rightarrow$ 1) Her $x \in E$ için $|fx| \leq |f| |x|$ olması ve her $(x_\alpha) \xrightarrow{uo} 0$ için $|x_\alpha| \xrightarrow{uo} 0$ olması düşünülürse,

$$\begin{aligned}
0 \leq |f(x_\alpha)| &\leq |f||x_\alpha| \Rightarrow 0 \leq uo - \lim_\alpha |f(x_\alpha)| \leq uo - \lim_\alpha |f||x_\alpha| = 0 \\
&\Rightarrow |f(x_\alpha)| \xrightarrow{uo} 0 \\
&\Rightarrow f(x_\alpha) \xrightarrow{uo} 0
\end{aligned}$$

olur.

Her dizi net olduğundan aşağıdaki sonucu elde ederiz.

5.1.1. Sonuç

E Riesz uzayı üzerinde tanımlı sıra sınırlı herhangi bir f fonksiyoneli için aşağıdakiler denktir.

i. f $u\sigma o$ – sürekli.

ii. f^+ ve f^- $u\sigma o$ – sürekli.

iii. $|f|$ $u\sigma o$ – sürekli.

5.1.2. Sonuç

E Riesz uzayı olmak üzere,

i) E_{uo} ve $E_{u\sigma o}$, $E^\sim$ nın Riesz alt uzayıdır.

ii) E_{uo} ve $E_{u\sigma o}$, $E^\sim$ içinde idealdir.

İspat

i) Her $f \in E_{uo}$ için $f^+ \in E_{uo}$ olduğundan E_{uo} , $E^\sim$ nın Riesz alt uzayıdır.

ii) Her $f \in E_{uo}$, $g \in E^\sim$ ve $|g| \leq |f|$ için, $|f| \in E_{uo}$ ve $(x_\alpha) \xrightarrow{uo} 0$ iken $|x_\alpha| \xrightarrow{uo} 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} 0 \leq |g(x_\alpha)| &\leq |g||x_\alpha| \leq |f||x_\alpha| \Rightarrow 0 \leq uo - \lim_\alpha |g(x_\alpha)| \leq uo - \lim_\alpha |f||x_\alpha| = 0 \\ &\Rightarrow |g(x_\alpha)| \xrightarrow{uo} 0 \\ &\Rightarrow g(x_\alpha) \xrightarrow{uo} 0 \end{aligned}$$

olur. Yani $g \in E_{uo}$ olur.

Benzer şekilde $E_{u\sigma o}$ için de gösterilir.

5.1.1. Lemma

$(x_\alpha) \subseteq \mathbf{R}$ bir net olmak üzere $x_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ olması için gerekli ve yeterli koşul $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ olmasıdır.

İspat

$(x_\alpha) \subseteq \mathbf{R}$ bir net olmak üzere $x_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ olsun. $x_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ ise her $\lambda \in \mathbf{R}^+$ için $|x_\alpha| \wedge \lambda \xrightarrow{o} 0$ olmasından $\lambda = 1$ alınırsa $|x_\alpha| \wedge 1 \xrightarrow{o} 0$ dır. $\alpha_0 \leq \alpha$ iken $|x_\alpha| \wedge 1 \leq y_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde en az bir α_0 ve (y_α) neti vardır. $\inf_\alpha y_\alpha = 0$ ise $y_{\alpha_1} - 0 = y_{\alpha_1} < 1$ olacak şekilde bir $y_{\alpha_1} \in (y_\alpha)$ vardır. Ayrıca $y_\alpha \downarrow$ olduğundan $\alpha_1 \leq \alpha$ iken $y_\alpha \leq y_{\alpha_1}$ dir. $\wedge$ indis kümesi yukarı yönlendirilmiş olduğundan $\alpha_0 \leq \alpha_2$ ve $\alpha_1 \leq \alpha_2$ olacak şekilde α_2 vardır.

$\alpha_2 \leq \alpha$ için $|x_\alpha| \wedge 1 \leq y_\alpha \leq y_{\alpha_1} < 1$ olur. Şimdi $\alpha_2 \leq \alpha$ için $|x_\alpha| \leq y_\alpha$ olduğunu gösterelim. Olmadığını varsayalım yani $\alpha_2 \leq \alpha'$ olacak şekildeki en az bir α' için

$|x_{\alpha'}| > y_{\alpha'}$ olsun.

$$\begin{aligned} |x_{\alpha'}| > y_{\alpha'} &\Rightarrow |x_{\alpha'}| \wedge 1 > y_{\alpha'} \wedge 1 = y_{\alpha'} \\ &\Rightarrow |x_{\alpha'}| \wedge 1 > y_{\alpha'} \end{aligned}$$

çelişkisi elde edilir. Buradan $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ elde edilir.

Şimdi tersine $(x_\alpha) \subseteq \mathbf{R}$ bir net olmak üzere $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ alalım. Lemma 4.1.2 den sıra yakınsak her net sınırsız sıra yakınsak olduğundan istenen çıkar.

5.1.1. Önerme

E Riesz uzayı olmak üzere, $E_{uo}^\sim, E_o^\sim$ içinde idealdir.

İspat

Önce $E_{uo}^\sim \subseteq E_o^\sim$ olduğunu gösterelim. Her $f \in E_{uo}^\sim$ için, $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ iken, sıra yakınsak her netin sınırsız sıra yakınsak olması ve Lemma 5.1.1 kullanılarak

$$\begin{aligned} x_\alpha \xrightarrow{o} 0 &\Rightarrow x_\alpha \xrightarrow{uo} 0 \\ &\Rightarrow f(x_\alpha) \xrightarrow{uo} f(0) \\ &\Rightarrow f(x_\alpha) \xrightarrow{o} f(0) \end{aligned}$$

olur. İdeal olduğu Sonuç 5.1.2 de yapıldığı gibi gösterilir.

Şimdi E herhangi bir Riesz uzayı olmak üzere $E_{uo}^{\sim} = E_o^{\sim}$ olur mu sorusunun yanıtını bulalım. Önce her zaman $E_{uo}^{\sim}$ nun band olmadığını veren Turan, B. ve Altın, B. nin yaptığı aşağıdaki örneği inceleyelim.

5.1.1. Örnek

Herhangi bir E Riesz uzayı için $E_{uo}^{\sim}, E^{\sim}$ içinde band olmayabilir.

$E = l_1 = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots) \mid x_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty\}$ dizi uzayı

“ $x, y \in l_1$ için $x \leq y$ ancak ve ancak her i için $x_i \leq y_i$ ” sıralaması ve $\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ normu ile bir Banach örgüsüdür. $n = 1, 2, 3, \dots$ için,

$$f_n: E \rightarrow \mathbf{R}, x = (x_i) \rightarrow f_n(x) = \sum_{i=1}^n x_i$$

fonksiyon dizisini ve

$$f: E \rightarrow \mathbf{R}, x = (x_i) \rightarrow f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Her n için f_n ve f lineer pozitifdir dolayısı ile $f_n, f \in E^{\sim}$ olur, ayrıca $f_n \uparrow f$ olduğunu görmek kolaydır. Şimdi $(f_n) \subseteq E_{uo}^{\sim}$ olduğunu gösterelim.

$(x_\alpha) \subseteq E^+$ bir net ve $x_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ olsun. Her $\lambda \in \mathbf{R}^+$ ve her bir n için $f_n(x_\alpha) \wedge \lambda \xrightarrow{o} 0$ olduğunu göstereceğiz. u, n . yere kadar λ, n den sonrakiler için sıfır olan dizi yani

$u = (\lambda, \lambda, \dots, \lambda, 0, 0, 0, \dots)$ olsun. $u \in E^+$ dır ve kabulden $x_\alpha \wedge u \xrightarrow{o} 0$ dır. $\alpha_0 \leq \alpha$ iken $x_\alpha \wedge u \leq y_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde en az bir α_0 ve (y_α) neti vardır.

$x_\alpha = (x_\alpha^1, x_\alpha^2, x_\alpha^3, \dots) = (x_\alpha^i), \quad y_\alpha = (y_\alpha^1, y_\alpha^2, y_\alpha^3, \dots) = (y_\alpha^i)$ ve E deki sıralamanın özelliklerinden $\alpha_0 \leq \alpha$ iken

$$\begin{aligned} x_\alpha \wedge u &= (x_\alpha^i) \wedge (u^i) \\ &= (x_\alpha^i \wedge u^i) \\ &= (x_\alpha^1 \wedge \lambda, x_\alpha^2 \wedge \lambda, \dots, x_\alpha^n \wedge \lambda, 0, 0, \dots) \end{aligned}$$

$$\leq y_\alpha = (y_\alpha^1, y_\alpha^2, y_\alpha^3, \dots) \downarrow 0$$

dır. Buradan $x_\alpha^1 \wedge \lambda \leq y_\alpha^1, x_\alpha^2 \wedge \lambda \leq y_\alpha^2, \dots, x_\alpha^n \wedge \lambda \leq y_\alpha^n$ ve $y_\alpha = (y_\alpha^1, y_\alpha^2, y_\alpha^3, \dots) \downarrow 0$ olmasından $y_\alpha^1 \downarrow 0, y_\alpha^2 \downarrow 0, \dots, y_\alpha^n \downarrow 0$ olacaktır. Elde edilenler göz önüne alınırsa $\alpha_0 \leq \alpha$ iken

$$\begin{aligned} f_n(x_\alpha) \wedge \lambda &= (x_\alpha^1 + x_\alpha^2 + \dots + x_\alpha^n) \wedge \lambda \\ &\leq x_\alpha^1 \wedge \lambda + x_\alpha^2 \wedge \lambda + \dots + x_\alpha^n \wedge \lambda \\ &\leq (y_\alpha^1 + y_\alpha^2 + \dots + y_\alpha^n) \downarrow 0 \end{aligned}$$

bulunur ki bu da istenendir. $e_1 = (1, 0, 0, \dots), e_2 = (0, 1, 0, \dots), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1, 0, 0, \dots)$ olmak üzere (e_n) dizisi E içinde dik dizidir ve Sonuç 4.1.3 den $e_n \xrightarrow{uo} 0$ dır. Diğer yandan her n için $f(e_n) = 1$ olduğundan f sınırsız sıra sürekli değil yani $f \notin E_{uo}^\sim$ dır. O halde $E_{uo}^\sim, E^\sim$ içinde band değildir.

5.1.3. Sonuç

E herhangi bir Riesz uzayı olmak üzere $E_{uo}^\sim = E_o^\sim$ eşitliği doğru değildir.

İspat

E herhangi bir Riesz uzayı ve $E_{uo}^\sim = E_o^\sim$ olsun. Teorem 3.2.3 den $E_o^\sim, E^\sim$ içinde band olduğundan $E_{uo}^\sim$ band olur ki bu Örnek 5.1.1 ile çelişir.

5.2. Sınırsız Sıra Sürekli Operatörler

Bu kısımda herhangi bir operatörün sınırsız sıra sürekli durumlarını inceleyeceğiz. F Dedekind tam Riesz uzayı olmak üzere $L_{uo}(E, F)$ ve $L_{u\sigma o}(E, F)$ nin $L_b(E, F)$ içinde Riesz alt uzayı olup olmadığı veya ideal olup olmadığı sorusu henüz yanıtlanamamıştır. Bununla birlikte operatörler için bazı özellikler verilecektir.

5.1.2. Tanım

Bir Riesz uzayındaki her dik dizinin supremumu varsa bu uzaya σ – *laterally tam* uzay denir.

5.2.1. Örnek

$\mathbf{R}^A = \{f \mid f: A \rightarrow \mathbf{R} \text{ fonksiyon}\}$ bir σ – laterally tam uzaydır.

Çözüm

$\mathbf{R}^A$ uzayı üzerindeki sıralamanın $f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in A$ için $f(x) \leq g(x)$ olduğu göz önüne alınarak, her n, m ve $n \neq m$ için

$$\begin{aligned} f_n \perp f_m &\Rightarrow |f_n| \wedge |f_m| = 0 \\ &\Rightarrow \text{Her } x \in A \text{ için } |f_n|(x) \wedge |f_m|(x) = 0 \\ &\Rightarrow |f_n(x)| \wedge |f_m(x)| = 0 \end{aligned}$$

dır.

$$\begin{aligned} h: A &\rightarrow \mathbf{R} \\ x &\mapsto h(x) = \sup(f_n(x)) \end{aligned}$$

olarak tanımlayalım. Herhangi bir $x \in A$ için,

- Her $n \in N^+$ için $f_n(x) = 0$ ise , $\sup(f_n(x)) = 0$ olacağından $h(x) = 0 \in \mathbf{R}$ dir.
- En az bir $n_0 \in N^+$ ve $f_{n_0}(x) \neq 0$ olsun. Her $n \in N^+$ ve $n \neq n_0$ için $f_n(x) = 0$ dir. Her $n \in N^+$ için $|f_n(x)| \leq |f_{n_0}(x)|$ olduğundan $(f_n(x)) \subseteq \mathbf{R}$ de sınırlı kümedir. Buradan

$\sup f_n(x) = h(x) \in \mathbf{R}$ olduğundan h anlamlıdır.

Her $x, y \in A$ için

$$\begin{aligned} x = y &\Rightarrow \text{Her } n \in N^+ \text{ için } f_n(x) = f_n(y) \\ &\Rightarrow \sup f_n(x) = \sup f_n(y) \\ &\Rightarrow h(x) = h(y) \end{aligned}$$

olduğundan h iyi tanımlıdır, böylece $h \in \mathbf{R}^A$ dir. Şimdi $\sup_n f_n = h$ olduğunu gösterelim.

• Her $x \in A$ ve her $n \in N^+$ için $f_n(x) \leq h(x)$ olduğundan $f_n \leq h$ dır. (f_n) in başka bir üst sınırı t olsun, her $n \in N^+$ için

$$\begin{aligned} f_n \leq t &\Rightarrow \text{Her } x \in A \text{ için } f_n(x) \leq t(x) \\ &\Rightarrow \sup_n f_n(x) \leq t(x) \\ &\Rightarrow h(x) \leq t(x) \\ &\Rightarrow h \leq t \end{aligned}$$

olduğundan, $\mathbf{R}^A$ bir σ – laterally tam uzaydır.

5.2.1. Önerme

E ve F Riesz uzayı , ayrıca E σ – Dedekind tam ve σ – laterally tam olsun.

$T: E \rightarrow F$ sıra sınırlı olmak üzere T $u\sigma o$ – sürekli olması için gerek ve yeter şart T σ – sıra – sürekli olmasıdır.

İspat

$\Rightarrow$) T $u\sigma o$ – sürekli olsun. $(x_n) \subseteq E$ için $x_n \xrightarrow{o} 0$ olduğundan Lemma 4.1.2 den $(x_n) \xrightarrow{uo} 0$ elde edilir.

T $u\sigma o$ – sürekli olduğundan $Tx_n \xrightarrow{uo} 0$ dır. $x_n \xrightarrow{o} 0$ olduğundan Lemma 3.1.2 den (x_n) sıra sınırlı buradan T sıra sınırlı olduğundan Tx_n sıra sınırlı olur. Buradan $Tx_n \xrightarrow{o} 0$ dır. O halde

T σo – sürekli dir.

Tersine T σo – sürekli olsun . $(x_n) \subseteq E$ içinde $x_n \xrightarrow{uo} 0$ alalım. [14] Teorem 3.9 den

$x_n \xrightarrow{o} 0$ dır. Hipotezden $Tx_n \xrightarrow{o} 0$ ve Lemma 4.1.2 den

$Tx_n \xrightarrow{uo} 0$ bulunur.

Daha önceden pozitif bir operatörün sıra sürekli olması için şu kriter verilmişti;

$T: E \rightarrow F$ pozitif operatör olmak üzere , T nin sıra sürekli olması için gerek ve yeter şart E içinde $x_\alpha \downarrow 0$ iken F içinde $Tx_\alpha \downarrow 0$ olmasıdır. Benzer kriteri sınırsız sıra sürekli operatörler için inceleyelim.

5.2.2. Önerme

E ve F Riesz uzayı olmak üzere,

- 1) $0 \leq T \in L_{uo}(E, F)$ ise E içinde $x_\alpha \downarrow 0$ iken F içinde $Tx_\alpha \downarrow 0$ dır.
- 2) $T: E \rightarrow F$ örten örgü homomorfizm ve E içinde $x_\alpha \downarrow 0$ iken F içinde $Tx_\alpha \downarrow 0$ sağlanıyorsa $T \in L_{uo}(E, F)$ dir.

İspat

1) $0 \leq T \in L_{uo}(E, F)$ olsun . E içinde $x_\alpha \downarrow 0$ iken $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ dır. Lemma 4.1.2 den $x_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ bulunur. O halde $Tx_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ dır. T pozitif olduğundan $Tx_\alpha \downarrow$ ve Lemma 4.1.1 den $Tx_\alpha \downarrow 0$ elde edilir.

2) $x_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ olsun. Her $u \in E^+$ için $|x_\alpha| \wedge u \xrightarrow{o} 0$ dır. $\alpha_0 \leq \alpha$ iken $|x_\alpha| \wedge u \leq y_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde en az bir α_0 ve $(y_\alpha) \subseteq E^+$ neti vardır. T örgü homomorfizmi olduğundan

$T(|x_\alpha| \wedge u) = |Tx_\alpha| \wedge Tu \leq y_\alpha \downarrow 0$ dır. Ayrıca T örten olduğundan her $w \in F^+$ için $Tu = w$ olacak şekilde $u \in E^+$ vardır. Her $w \in F^+$ için ,

$$|Tx_\alpha| \wedge w = |Tx_\alpha| \wedge Tu = T(|x_\alpha| \wedge u) \leq y_\alpha \downarrow 0$$

dır. Buradan $Tx_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ olmasından T uo – sürekli dir.

5.2.1. Sonuç

$T: E \rightarrow F$ örten lattice homomorfizm olmak üzere T $u\sigma o$ – sürekli olması için gerek ve yeter şart T σo – sürekli olmasıdır.

İspat

Her dizi net olduğu için yukarıdaki Önerme 5.2.2 den çıkar.

5.2.2. Sonuç

E ve F Riesz uzayı olsun . $T: E \rightarrow F$ sıra sınırlı, sıra sürekli, dikliği koruyan ve örten bir operatör olmak üzere bu durumda $|T|$ $uo -$ sürekli *dir*.

İspat

T sıra sınırlı ve dikliği koruyan ise Lemma 2.2.1 den $|T|$ vardır ve örgü homomorfizmdir. Ayrıca T örten olduğundan her $y \in F^+$ için, Teorem 2.2.1 göz önüne alınarak

$$\begin{aligned} y \in F^+ &\Rightarrow \exists x \in E \text{ için } T(x) = y \\ &\Rightarrow \exists x \in E \text{ için } |T(x)| = |y| = y \\ &\Rightarrow \exists x \in E \text{ için } |T||x| = y \end{aligned}$$

dir. Şimdi keyfî $y \in F$ için $y = y^+ - y^-$, $y^+, y^- \in F^+$ biçimde yazılabildiği kullanılırsa,

$|T|(x_1) = y^+$ ve $|T|(x_2) = y^-$ olacak şekilde en az bir $x_1, x_2 \in E$ vardır. O halde

$|T|(x_1) - |T|(x_2) = |T|(x_1 - x_2) = y^+ - y^- = y$ olduğundan $|T|$ örtendir. T sıra sürekli olduğundan $|T|$ sıra sürekli ve Önerme 5.2.2 den $|T|$ $uo -$ sürekli *dir*.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

E Riesz uazayı olmak üzere E içindeki bir (x_α) ağının sıra yakınsaması ve sınırsız sıra yakınsaması kavramlarının temelleri oluşturularak, bu yakınsamalar yardımıyla oluşturulan süreklilik kavramlarını çalışmak hedeflenmiştir. E ve F Riesz uzayları olmak üzere E den F ye sıra sürekli operatörler uzayı $L_n(E, F)$ nin özellikleri bilinmektedir. Öncelikle bunlar incelenmiş, benzer özelliklere E den F ye sıra sınırlı sınırsız sıra sürekli operatörler uazayı $L_{uo}(E, F)$ nin sahip olup olmadığı veya hangi koşullarda sahip olduklarını araştırmak hedeflenmiştir. Bunun için 2018 yılında yayınlanmış Unbounded order continuous operators on Riesz spaces isimli makale baz alınmıştır. Eğer $F = R$ alınırsa $L_{uo}(E, R) = E_{uo}^\sim$ sınırsız sıra sürekli dualin $E_o^\sim$ içinde ideal olduğu ama band olmadığı görülmüştür. Genel durum için bazı özellikler elde edilmiş ancak bir çok soru henüz çözüme kavuşmamıştır. Örneğin;

- E ve F Riesz uazayı, $T: E \rightarrow F$ sıra sınırlı sınırsız sıra sürekli operatör ve $|T|$ var ise sınırsız sıra sürekli midir?
- F Dedekind tam Riesz uazayı iken $L_{uo}(E, F)$ uazayı $L_b(E, F)$ içinde ideal midir? Eğer olmadığına dair bir örnek bulunabilir ise E ve F üzerine hangi şartları koyarsak $L_{uo}(E, F)$ ideal olur?
- $E_{uo}^\sim$ band olmadığına örnek verilmiştir. Dolayısı ile $L_{uo}(E, F)$ uazayı $L_o(E, F)$ içinde band değildir. Benzer soru bunun için verilebilir, yani E ve F üzerine hangi şartları koyarsak $L_{uo}(E, F)$ band olur?

Bu soruların olumlu yanıtları elde edilebilirse sıra sürekli operatör uzayları için önceden verilmiş diğer özellikleri araştırmak için bir ilerleme olacağını düşünmekteyiz.

KAYNAKLAR

1. Kamiska, A., and Lee, H. J. (2014). Banach-Saks properties of Musielak-Orlicz and Nakano sequence spaces. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 142(2), 547–558.
2. Wickstead, A. W. (1997). Weak and unbounded order convergence in Banach Lattices. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 24(3), 312–319.
3. Masani, P. R., and Niemi, H. (1989). The integration theory of Banach space valued measures and the Tonelli-Fubini theorems. II. Pettis integration. *Advances in Mathematics*, 75(2), c. 75, 121–167.
4. Luxemburg, W. A. J., and Zaanen, A. C. (1971). *Riesz Spaces, Volume 1* (first edition). Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 514.
5. Luxemburg, W. A. J., and Zaanen, A. C. (1983). *Riesz Spaces, Volume 2* (first edition). Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 719.
6. Gao, N. (2014). Unbounded order convergence in dual spaces. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 419(1), 347-354.
7. Gao, N., and Xanthos, F. (2013). Unbounded order convergence and application to martingales without probability. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 415(2), 931-947.
8. Gao, N., Troitsky, V. G., and Xanthos, F. (2017). Uo-convergence and its applications to Cesàro means in Banach lattices. *Israel Journal of Mathematics*, 220(2), 649-689.
9. Bahramnezhad, A., and Azar, K. H. (2018). Unbounded order continuous operators on Riesz spaces. *Positivity*, 22(3), 837-843.
10. Aliprantis, C. D., and Burkinshaw, O. (2006). *Positive operators*. Netherlands: Springer, 371.
11. Aliprantis, C. D., Burkinshaw, O., and Society, A. M. (2003). *Locally Solid Riesz Spaces with Applications to Economics* (second edition). American Mathematical Society, 344.
12. Aliprantis, C. D., and Burkinshaw, O. (1998). *Principles of Real Analysis* (third edition). Academic Press, 403.
13. Astashkin, S. V., Kalton, N., and Sukochev, F. A. (2008). Cesaro mean convergence of martingale differences in rearrangement invariant spaces. *Positivity*, 12(3), 387



GAZİ GELECEKTİR..