FIR FİLTRELER

Frekans Örnekleme Tasarım Yöntemi

Prof. Dr. İnan GÜLER

Frekans Örnekleme Tasarım Yöntemi

Sinyal ve sistemlerde anlatılan Fourier dönüşüm tasarımı ve pencereli Fourier dönüşümü yöntemlerine ek olarak, frekans örneklemesi başka bir alternatiftir. Frekans örneklemesinin temel özelliği, filtre katsayılarının frekans alanında istenen filtre frekansı yanıtının belirtilen büyüklüklerine göre hesaplanabilmesidir. Dolayısıyla tasarımda bir esneklik vardır.

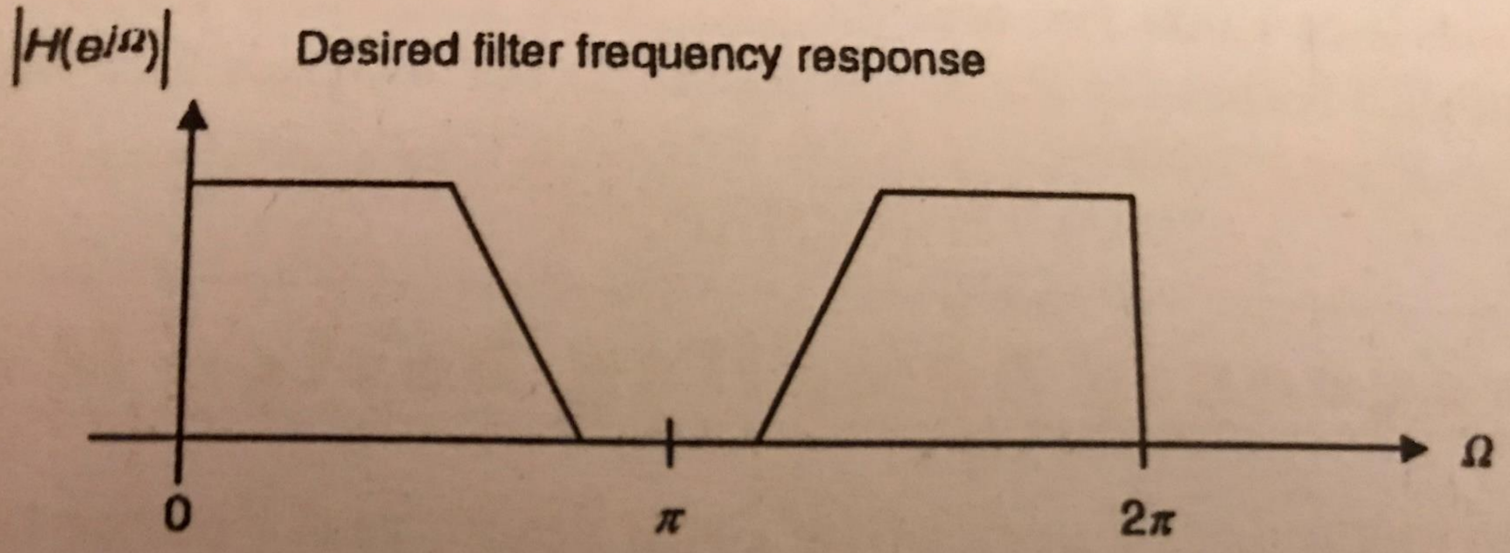
Tasarıma başlamak için, h(n) i $\{n = 0, 1, . . . , N - 1\}$ FIR filtreye yaklaşım sağlayan nedensel dürtü yanıtı (FIR filtre katsayıları) ve H(k) ı, $\{k = 0, 1, . . . , N - 1\}$, buna karşılık gelen ayrık Fourier dönüşüm (DFT) katsayıları olarak kabul edelim.

Aşağıdaki şekilden görüldüğü gibi H(k)'yı $H(k) = H(e^{j\Omega})$ olacak şekilde eşit aralıklarla filtrenin frekans cevabından bulmak mümkündür. Daha sonra ters ayrık Fourier dönüşümü (IDFT) alınarak FIR katsayıları aşağıdaki ifade ile bulunur:

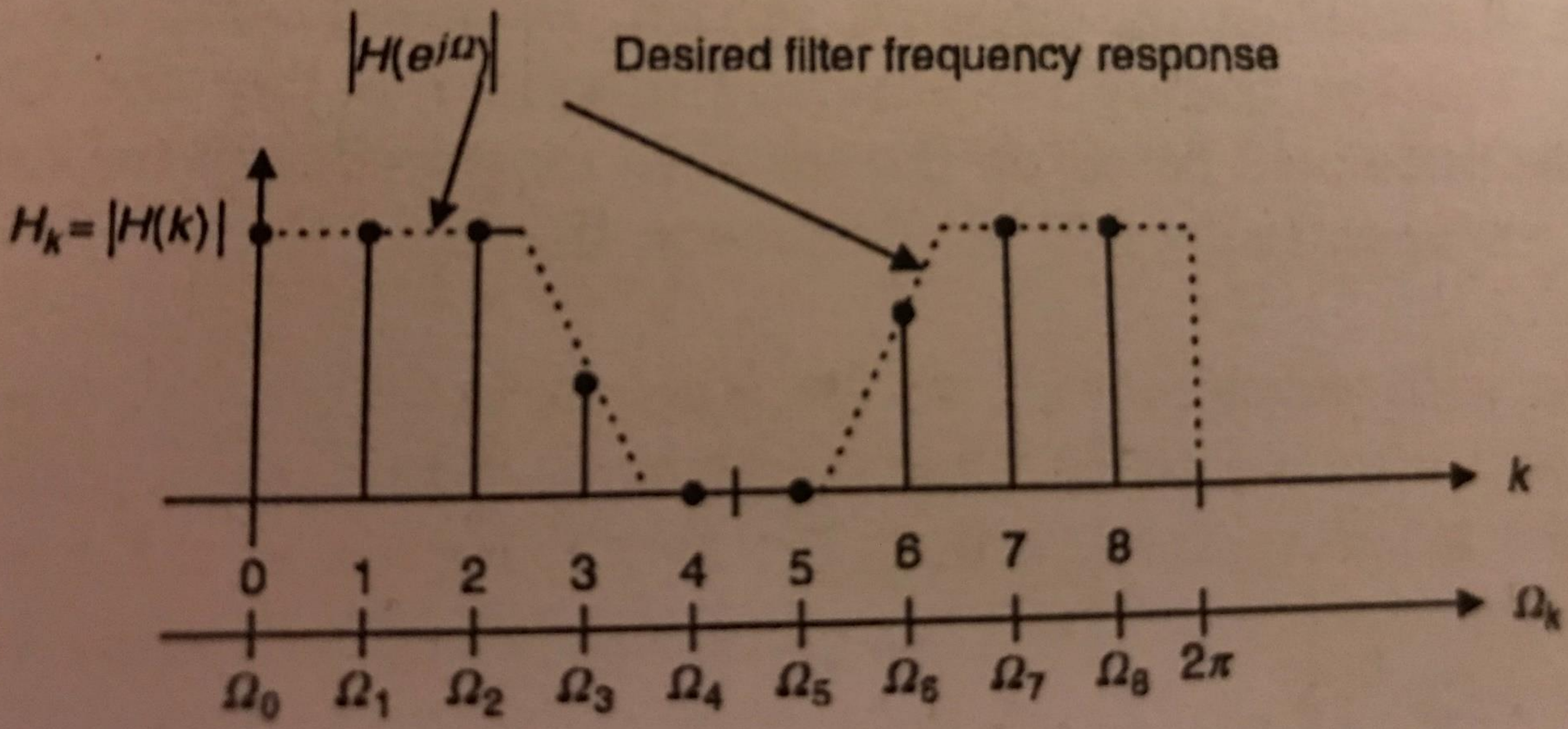
$$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) W_N^{-kn}, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1 \text{ için}$$

$$\text{burada} \quad W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} = \cos\left(\frac{2\pi}{N}\right) - j\sin\left(\frac{2\pi}{N}\right) \qquad (27)$$

FIR filtrenin doğrusal faza sahip olduğu ve $N = 2M+1$ kademelik katsayılara sahip olduğunu kabul ediyoruz.



|H(e^{jΩ})|
Desired filter frequency response
Ω
0
π
2π



|H(e^{jΩ})|
Desired filter frequency response
H_k = |H(k)|
k
0 1 2 3 4 5 6 7 8
Ω_k
Ω_0 Ω_1 Ω_2 Ω_3 Ω_4 Ω_5 Ω_6 Ω_7 Ω_8 2π

(27) denklemi aşağıdaki gibi basitleştirilir.

$$h(n) = \frac{1}{2M+1}\left\{ H_0 + 2\sum_{k=1}^{M} H_k \cos\left(\frac{2\pi k(n-M)}{2M+1}\right)\right\} \quad (28)$$

burada H_k $(k=0,1,\ldots,2M)$, $\Omega_k = \frac{2\pi k}{2M+1}$ ise frekans cevabında örneklenen büyüklük değerleridir.

Bu teknikte tasarım adımları aşağıdaki gibidir.

1. Filtre uzunluğu 2M+1 olarak verilir. 0'dan π'ye normalize frekans cevabı büyüklüğü belirlenir.

$$\Omega_k = \frac{2\pi k}{(2M+1)} \quad k = 0, 1, \ldots, M \text{ deki } H_k \text{ bulunur} \qquad (29)$$

2. FIR filtre katsayıları hesaplanır:

$$h(n) = \frac{1}{2M+1} \left\{ H_0 + 2 \sum_{k=1}^{M} H_k \cos\left(\frac{2\pi k(n-M)}{2M+1} \right) \right\} \qquad (30)$$

$n = 0, 1, \ldots M$

3. Simetriklik durumunu (doğrusal faz gereksinimi) kullanarak geri kalan katsayıların belirlenmesi:

$$h(n) = h(2M-n) \qquad n = M+1, \ldots, 2M \qquad (31)$$

ÖRNEK

7 basamaklı ve kesim frekansı $\Omega_c = 0,3\pi$ radyan olan bir AGF FIR filtreyi frekans örnekleme metodu kullanarak tasarlayalım.

CEVAP

$N = 2M+1 = 7$ ve $M=3$, örneklenen frekanslar

$\Omega_k = \frac{2\pi}{7} k$ radyan $k = 0,1,2,3$ olarak hesaplanır.

Belirlenen frekanslarda H_k değerlerini hesaplayalım:

$\Omega_0 = 0$ radyan $H_0 = 1,0$
$\Omega_1 = (2/7)\pi$ rad $H_1 = 1,0$
$\Omega_2 = (4/7)\pi$ rad $H_2 = 0,0$
$\Omega_3 = (6/7)\pi$ rad $H_3 = 0,0$

(30) no'lu denklemi kullanarak;

$$h(n) = \frac{1}{7}\left\{1 + 2\sum_{k=1}^{3} H_k \cos\{2\pi k(n-3)/7\}\right\} \quad n=0,1,2,3$$

$$= \frac{1}{7}\left\{1 + 2 \cos\{2\pi(n-3)/7\}\right\}$$

Böylece FIR katsayıları hesaplandığında aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

$$h(0) = \frac{1}{7}\{1+2\cos(-6\pi/7)\} = -0{,}11456$$

$$h(1) = \frac{1}{7}\{1+2\cos(-4\pi/7)\} = +0{,}07928$$

$$h(2) = 1/7\{1+2\cos(-2\pi/7)\} = +0{,}32100$$

$$h(3) = 1/7\{1+2\cos(-0\times\pi/7\} = +0{,}42857$$

simetriden $h(4) = h(2) = 0{,}32100$, $h(5) = h(1) = 0{,}07928$

$h(6) = h(0) = -0{,}11456$

Optimal Tasarım Metodu

Bu bölümde, verimliliği ve esnekliği nedeniyle endüstride kullanılan en popüler optimal tasarım yöntemi olan Parks-McClellan algoritması tanıtılmaktadır. Parks-McClellan algoritmasını kullanan FIR filtre tasarımı, bir Chebyshev polinomunda maksimum yaklaşım hatasını istenen filtre büyüklüğü frekans cevabına yaklaştırma noktasında en aza indirme fikrine dayanarak geliştirilmiştir.

Tasarım kriterlerini ve notasyonu özetledikten sonra tasarım prosedürüne odaklanacağız.

İdeal bir frekans cevabı $H_d\,(e^{j\omega T})$ verildiğinde, $E(\omega)$ tahmin hatası aşağıda verilen ifade ile tanımlanır:

$$E(\omega) = W(\omega)\,[H\,(e^{j\omega T}) - H_d\,(e^{j\omega T})] \qquad (32)$$

Burada H (ejωT) tasarlanacak doğrusal fazlı FIR filtresinin frekans cevabı, W(ω) optimizasyon işlemi sırasında belirli frekans bantlarını diğerleri üzerinde vurgulamak için kullanılan ağırlık fonksiyonudur. Bu işlem Denklem (33) 'te gösterilen FIR katsayıları üzerindeki hatayı en aza indirecek şekilde tasarlanmıştır.

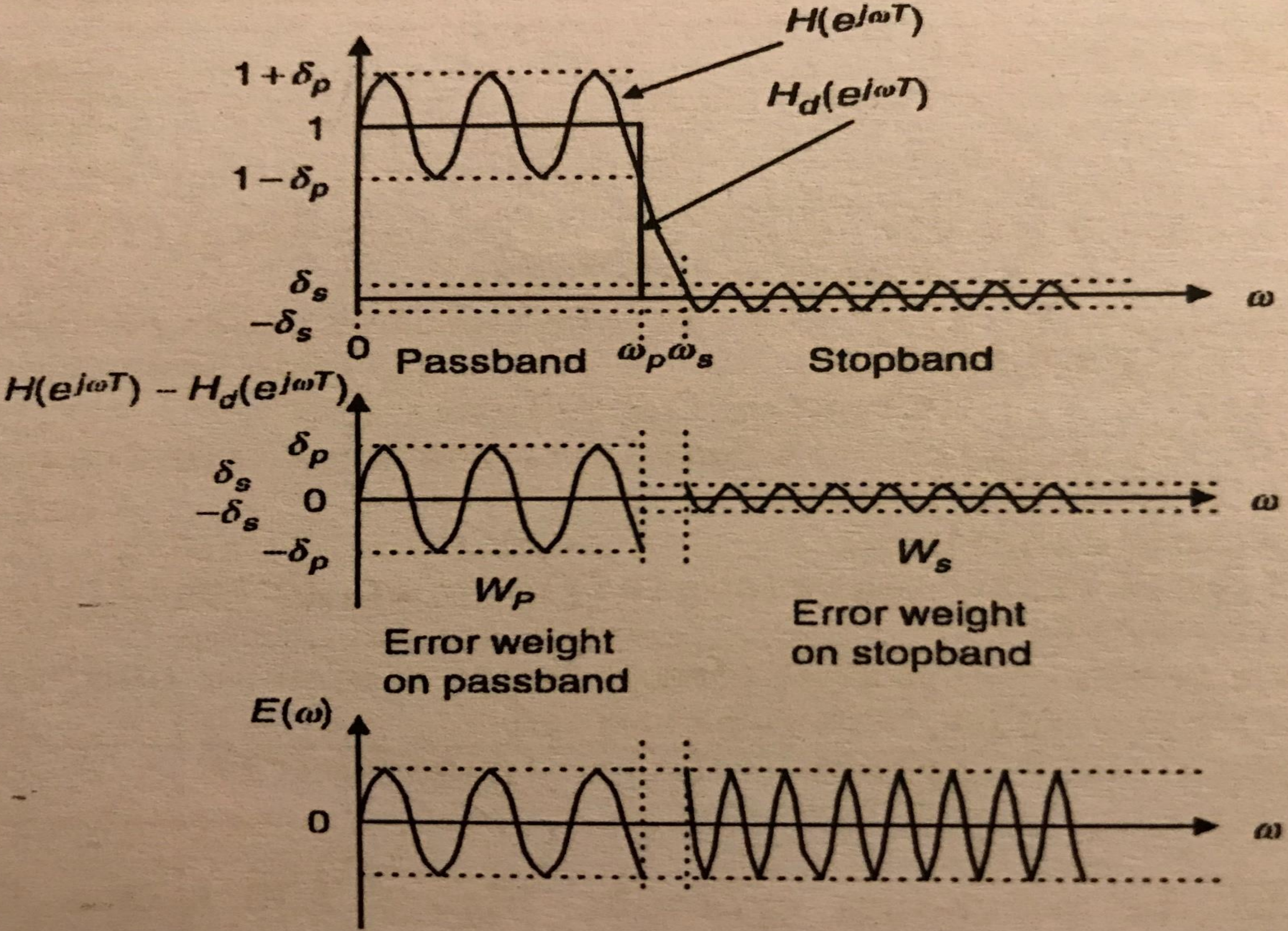
$$min\ (max\ |E(\omega)| \qquad (33)$$

Bu dersin kapsamı dışında olan Remez değişim algoritması sayesinde, büyüklük yanıtı ideale eşit bir yaklaşıma sahip en iyi FIR filtresini elde edilebilir. Elde edilen filtreler, algoritmaların istenen frekans yanıtı ile gerçek frekans yanıtı arasındaki maksimum hatayı en aza indirgemesi açısından en uygunudur. Bunlara genellikle minimax filtreleri denir.

Şimdi, tasarım prosedüründe kullanılacak notasyonlara bakalım. Aşağıdaki Şekil, Parks-McClellan ve Remez değişim algoritmaları ile tasarlanan FIR filtresinin özelliklerini göstermektedir. Şeklin üst grafiğinde gösterildiği gibi, geçiş bandı frekans tepkisi ve durdurma bandı frekans tepkisi birbirleriyle örtüşmektedir. δ_p, geçiş bandındaki dalgalanmasının büyüklüğü (ripple) belirtmek için kullanılırken δ_s, durdurma bandı büyüklüğü zayıflamasını belirtir. *dB* olarak ifade edersek;

$$\delta_p\,[dB] = 20 \log_{10} (1 + \delta_p)$$

$$\delta_s[dB] = 20 \log_{10} (1 + \delta_s)$$



$H(e^{j\omega T})$
$H_d(e^{j\omega T})$
$1+\delta_p$
1
$1-\delta_p$
δ_s
$-\delta_s$
0
Passband
ω_p ω_s
Stopband
ω
$H(e^{j\omega T}) - H_d(e^{j\omega T})$
δ_p
δ_s
0
$-\delta_s$
$-\delta_p$
ω
W_P
W_s
Error weight on passband
Error weight on stopband
$E(\omega)$
0
ω

Şekilde ortada gösterilen grafik, ideal frekans yanıtı ile gerçek frekans yanıtı arasındaki hatayı açıklar. Genel olarak, geçiş bandı ve durdurma bandındaki hata büyüklükleri farklıdır. Optimizasyon işlemi tüm bandı içerdiğinden bu durum optimizasyonu dengesiz hale getirir. Bir banttaki hata büyüklüğü diğerine yada diğerlerine üstün geldiğinde, optimizasyon işlemi küçük büyüklükteki bir hata nedeniyle katkısını yeniden ortaya çıkarabilir. Hata büyüklüklerini dengelemek için bir ağırlık fonksiyonu eklenebilir. Akla gelen fikir küçük ağırlık faktörü ile birlikte daha büyük hatayı ağırlıklandırmak (çarpmak) olabilir.

Geçiş bandı hatasını ağırlıklandırmak için bir W_p ağırlık faktörü ve durdurma bandı hatasını ağırlıklandırmak için W_s kullanalım. Şekildeki alt grafik ağırlıklı hatayı gösterir ve her iki banttaki hata büyüklükleri aynı seviyededir. Ağırlık faktörlerinin seçimi aşağıdaki tasarım prosedüründe daha ayrıntılı olarak açıklanmaktadır.

Parks-McClellan Algoritması için Optimal FIR Filtre Tasarım Prosedürü

1. DSP sisteminin geçiş bandı ve durdurma bandı frekansları, geçiş bandı dalgalanması, durdurma bandı zayıflaması, filtre sırası ve örnekleme frekansı gibi bant kenarı frekanslarını belirtin.
2. Bandın kenar frekanslarını Nyquist sınırına normalleştirin (katlama frekansı = $f_s/2$) ve ideal büyüklükleri belirtin.
3. Eğer dB değerleri olarak verildiyse, geçirme bandı dalgalanmasının (ripple) ve durdurma bandı zayıflamasının mutlak değerlerini aşağıdaki ifadeleri kullanarak hesaplayın:

$$\delta_p = 10^{(\delta p\ dB/20)} - 1 \qquad (34)$$

$$\delta_s = 10^{(-\delta s\ dB/20)} - 1 \qquad (35)$$

Daha sonra aşağıdaki ifadeyi uygulayın:

$$\delta_p / \delta_s = \text{Kesir formu} = \text{pay/payda} = W_s / W_p \qquad (36)$$

Bunu takiben geçirme ve durdurma bantlarındaki hata ağırlık faktörlerini aşağıdaki gibi belirtin:

W_s = Payda

W_p = Pay (37)

4. Filtre katsayılarını hesaplamak için Remez algoritmasını uygula
5. Eğer özellikler sağlanmıyorsa filtre derecesini arttır ve 1-4 basamaklarını tekrar et.

ÖRNEK

Aşağıdaki özelliklere sahip bir AGFn filtre tasarlayalım.

DSP sistem örnekleme oranı = 8000 Hz

Geçiş bandı = 0–800 Hz

Durdurma bandı = 1000–4000 Hz

Geçiş bandı dalgalanması = 1 dB

Durdurma bandı zayıflaması = 40 dB

Filtre derecesi = 53

ÇÖZÜM

Teknik özelliklerden alçak geçiren durdurma bandımız var. Normalleştirme yapıyoruz ve ideal büyüklükleri aşağıdaki gibi belirliyoruz.

Örnekleme frekansı: fs / 2 = 8000 / 2 = 4000 Hz

0 Hz için: 0 = 4000 ¼ 0, büyüklük: 1

800 Hz için: 800 /4000 = 0.2, büyüklük: 1

1000 Hz için: 1000 / 4000 = 0.25, büyüklük: 0

4000 Hz için: 4000 / 4000 = 1, büyüklük: 0

Ardından, ağırlıkları belirleriz:

$$\delta_p = 10^{(1/20)} - 1 = 0{,}1220$$

$$\delta_s = 10^{(-40/20)} - 1 = 0{,}01$$

(36) nolu denklemi uygulayalım:

$$\delta_p / \delta_s = 12{,}2 \approx 12 / 1 = W_s / W_p$$

Buradan;

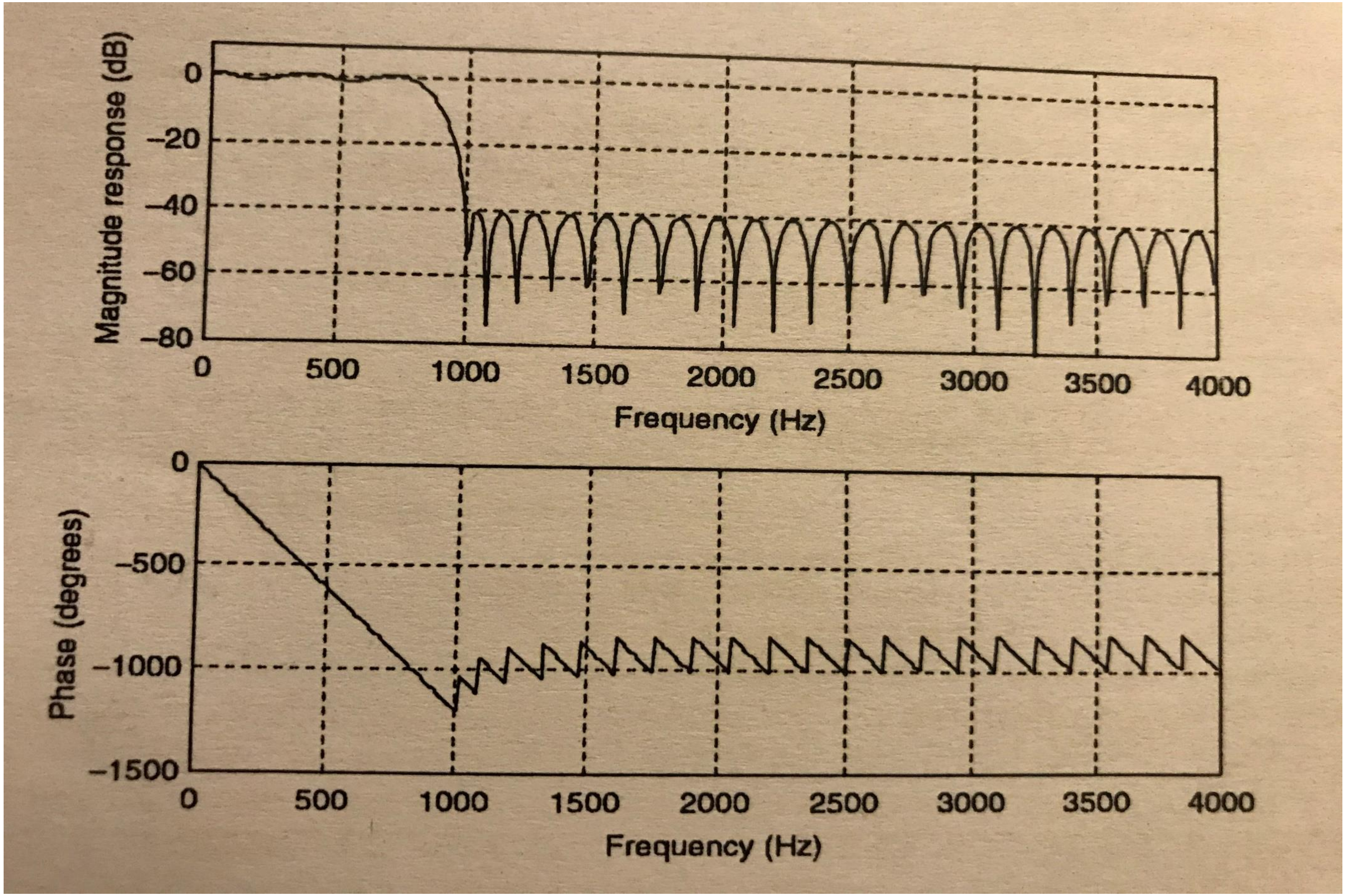
$$W_s = 12 \text{ ve } W_p = 1$$

MATLAB Remez algoritmasını kullanarak Aşağıdaki çizelgedeki sonuçlar elde edilir.

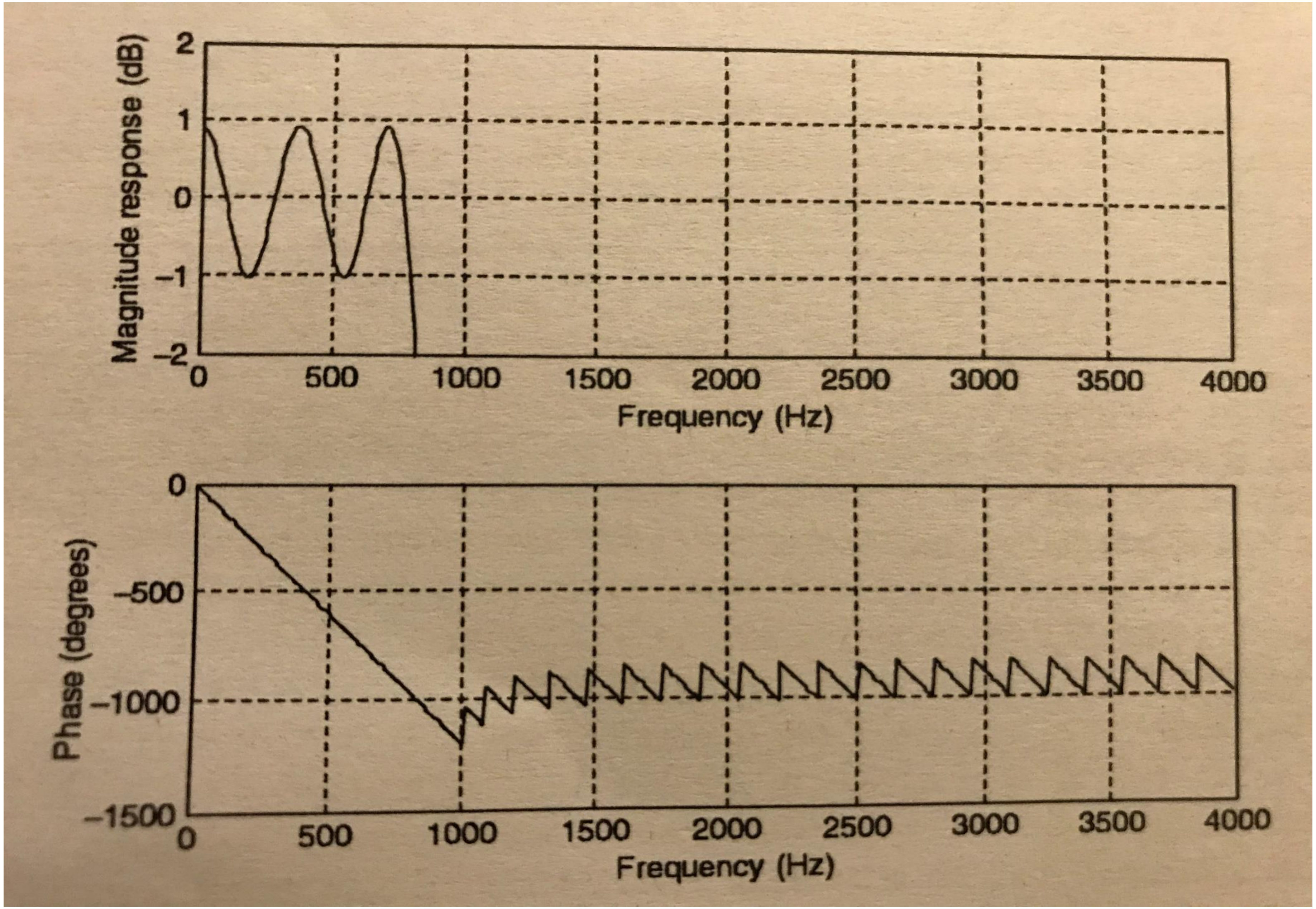
B: FIR Filter Coefficients (optimal design method)

$b_0 = b_{53} = -0.006075$	$b_1 = b_{52} = -0.00197$
$b_2 = b_{51} = 0.001277$	$b_3 = b_{50} = 0.006937$
$b_4 = b_{49} = 0.013488$	$b_5 = b_{48} = 0.018457$
$b_6 = b_{47} = 0.019347$	$b_7 = b_{46} = 0.014812$
$b_8 = b_{45} = 0.005568$	$b_9 = b_{44} = -0.005438$
$b_{10} = b_{43} = -0.013893$	$b_{11} = b_{42} = -0.015887$
$b_{12} = b_{41} = -0.009723$	$b_{13} = b_{40} = 0.002789$
$b_{14} = b_{39} = 0.016564$	$b_{15} = b_{38} = 0.024947$
$b_{16} = b_{37} = 0.022523$	$b_{17} = b_{36} = 0.007886$
$b_{18} = b_{35} = -0.014825$	$b_{19} = b_{34} = -0.036522$
$b_{20} = b_{33} = -0.045964$	$b_{21} = b_{32} = -0.033866$
$b_{22} = b_{31} = 0.003120$	$b_{23} = b_{30} = 0.060244$
$b_{24} = b_{29} = 0.125252$	$b_{25} = b_{28} = 0.181826$
$b_{26} = b_{27} = 0.214670$	

Faz ve frekans cevapları aşağıdaki şekillerde gösterilmiştir.



Geçirme bandındaki detaylı frekans cevabı aşağıdaki şekillerde gösterilmiştir.

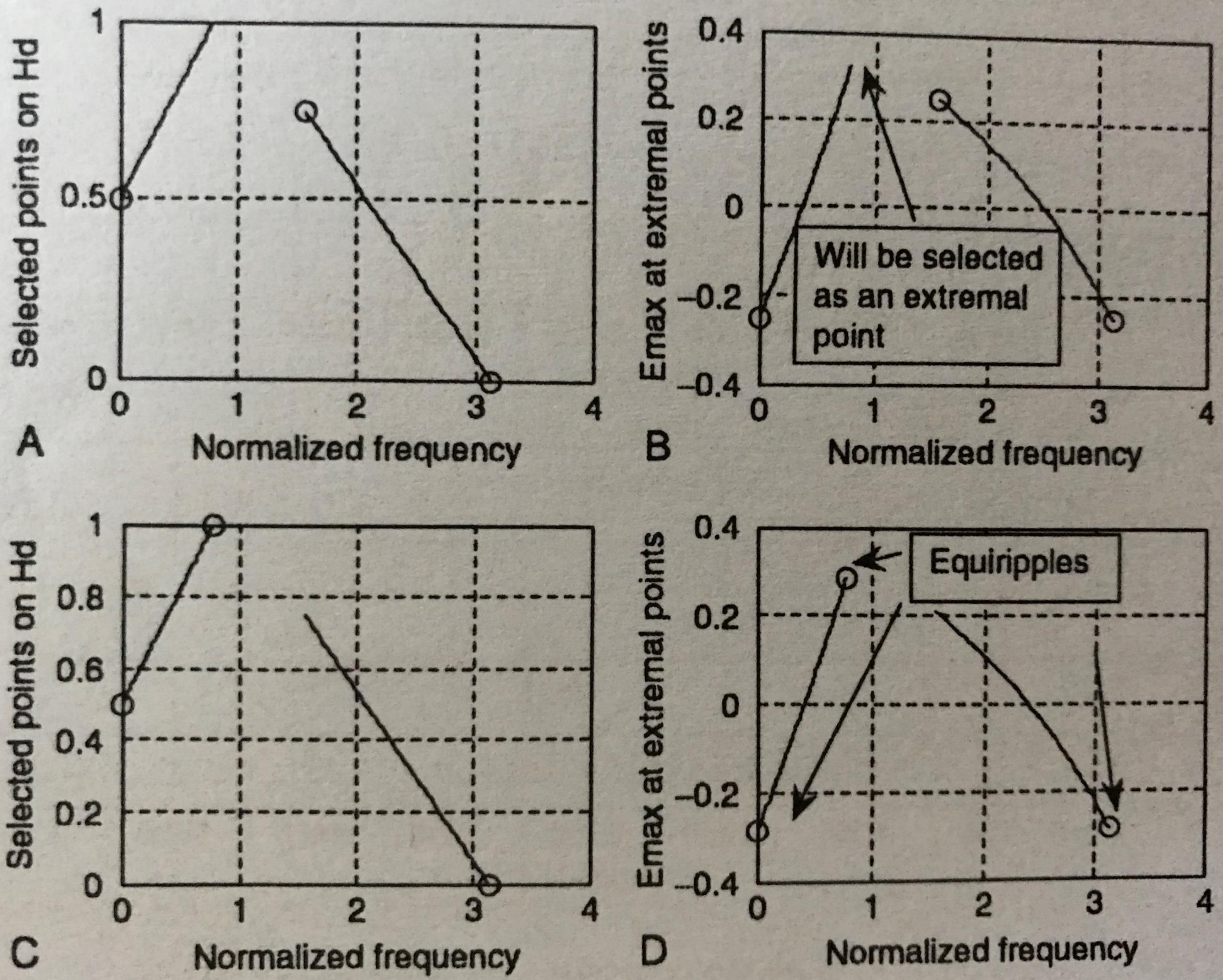


ÖRNEK

(32) denkleminde verilen Remez değişim algoritmasının aşağıda denklemi verilen 3 kademeli doğrusal fazlı FIR filtresinde nasıl olduğunu gösterelim

$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_0 z^{-2}$$

Aşağıda Şekil A'da ideal frekans cevap özellikleri görülmektedir. Şekilde $\Omega = 0$ radyanda kazancın doğrusal olarak 0,5 den $\Omega = \pi/4$ radyanda 1'e yükseldiği görülüyor. $\Omega = \pi/4$ ve [redacted] $\Omega = \pi/2$ radyan arasındaki band geçiş bandıdır. Son olarak filtre kazancının doğrusal bir şekilde $\Omega = \pi/2$ de 0,75 den $\Omega = \pi$ radyanda 0'ra düştüğünü görüyoruz.


Selected points on Hd
Normalized frequency
A
Emax at extremal points
Will be selected as an extremal point
Normalized frequency
B
Selected points on Hd
Normalized frequency
C
Emax at extremal points
Equiripples
Normalized frequency
D

Basit olması bakımından ağırlık faktörü (çarpan) 1 alalım, yani $W(\Omega) = 1$.
(32) denklemi bu duruma göre

$$E(\Omega) = H(e^{j\Omega}) - H_d(e^{j\Omega})$$

olacaktır.
$z = e^{j\Omega}$ kabul ederek $H(z)$ yi dönüştürelim:

$$H(e^{j\Omega}) = b_0 + b_1 e^{-j\Omega} + b_0 e^{-j2\Omega}$$

Euler özdeşliğini $(e^{j\Omega} + e^{-j\Omega} = 2\cos\Omega)$ kullanarak

$$H(e^{j\Omega}) = e^{-j\Omega}(b_1 + 2b_0\cos\Omega)$$

Doğrusal faz kaydırma terimini $(e^{-j\Omega})$ dikkate almadan Chebyshev gerçek büyüklük fonksiyonunu elde etmiş olduk, yani

$$H(e^{-j\Omega}) = b_1 + 2b_0\cos\Omega$$

Değiştirme teoremi bir Chebyshev polinomunun $\{H(e^{j\Omega})\}$ ideal büyüklük cevabına $\{H_d(e^{j\Omega})\}$ uç (extremal) frekanslarda yaklaştırılmasını ifade eder. Buna göre

$E(\Omega_k) = -E(\Omega_{k+1})$ $\Omega_0, \Omega_1, \ldots, \Omega_{m+1}$ frekansları için

ve $|E(\Omega_k)| = E_{max}$

Fakat Değiştirme Teoremi bunun algoritmasının nasıl olacağını açıklamaz. Remez Değişim algoritması bu problemin çözümüne yardımcı olur.

Bu konuda aşağıdaki adımlar takip edilir.

1. Verilen $N=2M+1$ derecesinde başlangıç extremal frekansları $\Omega_0, \Omega_1, \dots \Omega_{M+1}$ olarak seç (Bu frekanslar ilk seferde düzgün dağılımlı olmalı)
2. Değişim teoremini sağlamak için aşağıdaki denklemi çöz.

$$-(-1)^k E = W(\Omega_k)\left[H_d(e^{j\Omega_k}) - H(e^{j\Omega_k})\right], \quad \Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_{M+1} \text{ için}$$

Dikkat edilirse, $H(e^{j\Omega}) = b_1 + 2b_0 \cos\Omega$ olduğundan çözüm üç bilinmeyeni kapsar (b_0, b_1, ve E_{max}).

3. Band kenarlarını kapsayan extremal katsayıları noktaları belirleyin ve $M+2$ extremal noktayı E_{max} için en geniş hata değerlerini kapsamasını sağlayın.
4. Eğer extremal frekanslar değiştirilmedi ise katsayıları çıkışa ver. Değilse yeni bir extremal frekans seti seçerek 2. adıma git.

Şimdi Remez değişim algoritmasını kullanarak uygulama yapalım.

Birinci İterasyon

1. Düzgün dağılımlı extremal noktalar kullanalım: $\Omega_0 = 0$, $\Omega_1 = \pi/2$, $\Omega_2 = \pi$. Bunların ideal büyüklükleri yukarıda verilen Şekil A da "o" olarak gösterilmiştir.
2. Değişim algoritması aşağıdaki denklemin sağlanmasını ister:

$$-(-1)^k E = H_d(e^{j\Omega}) - (b_1 + 2b_0 \cos\Omega)$$

b_0, b_1 ve E bilinmiyenlerini bulmak için extremal noktalarını uyguladığımızda;

$$\begin{cases} -E = 0{,}5 - b_1 - 2b_0 \\ E = 0{,}75 - b_1 \\ -E = 0 - b_1 + 2b_0 \end{cases}$$

Bu denklemler çözüldüğünde

$b_0 = 0{,}125$, $b_1 = 0{,}5$, $E = 0{,}25$, $H(e^{j\Omega}) = 0{,}5 + 0{,}25\cos\Omega$

3. Band kenarları ve hataların da belirleyecek şekilde aşağıdaki denklemi kullanarak extremal noktaları buluruz (Şekil B)

$$E(\Omega) = H_d(e^{j\Omega}) - 0{,}5 - 0{,}25\cos\Omega$$

Bu extremal noktalar Şekil B de "o" olarak gösterilmiş ve hata değerleri aşağıda çizelgede verilmiştir.

Ω	0	$\pi/4$	$\pi/2$	π
E_{max}	$-0{,}25$	$0{,}323$	$0{,}25$	$-0{,}25$

4. $\Omega = \pi/4$ deki band kenarı diğerlerine göre daha büyük bir hataya sahip olduğundan extremal frekans olarak seçilmesi gerekir. $\Omega = \pi/2$ deki extremal noktayı sildikten sonra yeni bir extremal nokta en geniş hata değerlerine göre

$$\Omega_0 = 0$$
$$\Omega_1 = \pi/4$$
$$\Omega_2 = \pi$$

bulunur.

Bu değerlerdeki extremal noktalar Şekil c'de 0,5, 1 ve 0 olarak gösterilmiştir.

İkinci İterasyon

Değişim teoremini yeni bir extremal nokta setine uygulayalım.

$$\begin{cases} -E = 0{,}5 - b_1 - 2b_0 \\ E = 1 - b_1 - 1{,}4142 b_0 \\ -E = 0 - b_1 - 2b_0 \end{cases}$$

Bu denklemlerin çözülmesi sonucunda

$b_0 = 0{,}125$, $b_1 = 0{,}537$, $E = 0{,}287$, $H(e^{j\Omega}) = 0{,}537 + 0{,}25\cos\Omega$

Belirlenen extremal noktalar ve band kenarları hataları ile birlikte aşağıdaki çizelgede verilmiş ve Şekil D'de gösterilmiştir.

Ω	0	$\pi/4$	$\pi/2$	π
E_{max}	$-0{,}287$	$0{,}287$	$0{,}213$	$-0{,}287$

0, $\pi/4$ ve π de aynı maksimum hatalar bulunduğundan iterasyon sonlandırılır ve filtrenin transfer fonksiyonu

$$H(z) = 0{,}125 + 0{,}537 z^{-1} + 0{,}125 z^{-2}$$

Şekil D'de görüldüğü gibi extremal noktalar olan $\Omega_0 = 0$, $\Omega_1 = \pi/4$, $\Omega_2 = \pi$ de eşit dalgacıklar (ripple) elde edilmesi sağlanmıştır. İşaretler değişiyor ve maksimum mutlak hata 0,287 değeri her noktada elde edildi.

Bu basit örnekte iki iterasyonda katsayılar belirlendi.