



MM597

MÜHENDİSLİKTE

İLERİ SAYISAL METOTLAR

PROF.DR. NURİ YÜCEL

MM597 MÜHENDİSLİKTE İLERİ SAYISAL METOTLAR

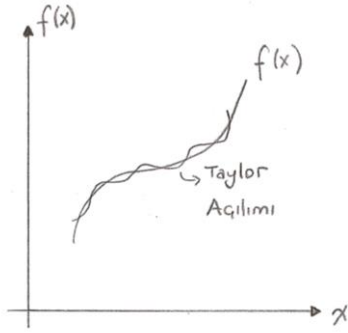
PROF.DR. NURİ YÜCEL

1. DENKLEMLERİN YALAŞIK ÇÖZÜMLERİ

$f(x)=0$ şeklindeki denklemlerin köklerini bulmak gibi problemlerle karşılaşırız.

1.1. Newton-Rapson Metodu

$f(x)=0$ fonksiyonu ile verilen bir denklemin köklerini bulmak için $x=x_0$ 'da Taylor serisine açalım. Yani $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ şeklinde yazabiliriz.



Fourier serisi açılımı için ise aşağıdaki şekilde yazılabilmektedir,

$$f(x) = a_n \cos(b_n x) + c_n \sin(d_n x) + a_{n-1} \cos(b_{n-1} x) + c_{n-1} \sin(d_{n-1} x) + \dots$$

Bir Taylor Serisi açılımı yazarsak; $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots$

Bu seride $x=0$ 'da McLaurin serisi meydana gelmektedir. Bu denklemi çözümlersek kök x_0 'a en yakın değerdir. Bundan ötürü 3. terim ve sonrası 0'a yakınsar.

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x) &= f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) \\ \downarrow & \\ 0 &= f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) \end{aligned} \quad f(x) = 0$$

$$\Rightarrow x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}} \quad (\text{Newton-Raphson Metodu})$$

Örnek-1: $x^2 - 2 = 0$ denkleminin köklerini bulunuz?

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{2} = \pm 1.414213562$$

$$f(x) = x^2 - 2$$

$$f'(x) = 2x$$

$$\Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} \quad (\text{istenilen bir değeri tahmini olarak verebiliriz})$$

$x_0 = 1$ tahmin değeri için,

$$\Rightarrow x_1 = 1 - \frac{1^2 - 2}{2 \cdot 1} = 1.5$$

$$x_2 = 1.5 - \frac{1.5^2 - 2}{2 \cdot 1.5} = 1.4166667$$

$$x_3 = 1.4166667 - \frac{1.4166667^2 - 2}{2 \cdot 1.4166667} = 1.4142157$$

$$x_4 = 1.4142157 - \frac{1.4142157^2 - 2}{2 \cdot 1.4142157} = 1.4142143$$

$$x_5 = 1.4142143 - \frac{1.4142143^2 - 2}{2 \cdot 1.4142143} = 1.4142136 \quad * \text{Çözüm}$$

$$x_6 = 1.4142136$$

Not: Bulunan kök başta kabul edilen x_0 değerine en yakın köke yakınsar.

Örnek-2: $e^{x^2} - x^3 + 3x - 4 = 0$ denkleminin kökünü bulunuz?

$$f(x) = e^{x^2} - x^3 + 3x - 4$$

$$f'(x) = 2xe^{x^2} - 3x^2 + 3$$

$x_0 = 0.5$ tahmin değeri için,

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0.5 - \frac{e^{(0.5)^2} - (0.5)^3 + 3*(0.5) - 4}{2*0.5*e^{(0.5)^2} - 3*(0.5)^2 + 3}$$

$$\Rightarrow x_1 = 0.5 - \frac{e^{(0.5)^2} - (0.5)^3 + 3*(0.5) - 4}{2*0.5*e^{(0.5)^2} - 3*(0.5)^2 + 3} = 0.8794467 \text{ bulunarak iterasyona devam edilir.}$$

$$x_2 = 0.8794467 - \frac{e^{(0.8794467)^2} - (0.8794467)^3 + 3*(0.8794467) - 4}{2*0.8794467 * e^{(0.8794467)^2} - 3*(0.8794467)^2 + 3} = 0.8515428$$

$$x_3 = 0.8515428 - \frac{e^{(0.8515428)^2} - (0.8515428)^3 + 3*(0.8515428) - 4}{2*0.8515428 * e^{(0.8515428)^2} - 3*(0.8515428)^2 + 3} = 0.851049 \text{ *Çözüm}$$

$$x_4 = 0.851049$$

Bulunan kök 0.5'e en yakın köktür.

1.2. Newton'un Değiştirilmiş Metodu

$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} \Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{u(x_n)}{u'(x_n)}$$

$$u'(x_n) = 1 - \frac{f(x_n) * f''(x_n)}{[f'(x_n)]^2}$$

Bu yöntemde iterasyon sayısı azaltılarak çözüme daha rahat ulaşılabilir. Ama çözüm sırasında fonksiyonun ikinci dereceden türevi kullanıldığı için tercih edilmemektedir.

1.3. Secant Metodu

Türevi tanımlamamız gerekirse; $f'(x) = \lim_{x_n - x_{n-1} \rightarrow 0} \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$

Bu tanımı Newton-Rapson modeline uyguladığımızda secant denklemi meydana çıkmaktadır:

$$\Rightarrow \boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{[f(x_n) - f(x_{n-1})]/(x_n - x_{n-1})}}$$
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) * (x_n - x_{n-1})}{[f(x_n) - f(x_{n-1})]}$$

Bu metotta fonksiyonun türevini almıyoruz ama başlangıç değeri olarak bir değer yerine iki değer kullanılmaktadır.

Not: Bir denklemin köklerini bulurken kullanılan metot budur.

Ödevler:

1) $\sqrt[5]{83}$ ($f(x) = x^5 - 83$); sayısının çözümünü 6. basamağa kadar hassas olarak bütün metotlarla çözümleyiniz.

2) $f(x) = x^2 - 2e^{-x} * x^3 - e^{-3x}$ denkleminin köklerini $x_0 = 1$ ve $x_{-1} = 2$ başlangıç değerlerinde bütün metotlarla hesaplayınız.

3) $\sin(x^3 + 2) = \frac{1}{x}$ denkleminin köklerini $x_0 = 1$ ve $x_{-1} = 3$ başlangıç değerlerinde bütün secant metotdu ile hesaplayınız.

2. LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ VE MATRİSİN TERSİNİN AINMASI

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix} \quad 4*4 \text{ Boyutlarında matris}$$

$c_{11}, c_{22}, c_{33}, c_{44}$ köşegen terimler (diagonal)

$C_{ij} = C_{ji}$ ise bu matris simetrik bir matristir

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ 0 & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ 0 & 0 & c_{33} & c_{34} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{bmatrix} \quad \text{Bu matrise üst üçgensel matris (upper triangular) denir}$$

Tersi durumunda ise alt üçgensel matris (lower triangular) denir

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{bmatrix} \quad \text{Köşegen matris (diagonal matrix)}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Birim matris}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 \\ 0 & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ 0 & 0 & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix} \quad \text{Band tipi matris [Üç köşegenli (tri-diagonal) matris]}$$

Bazı Matris Özellikleri

1) İki matrisin toplamı (A ve B gibi) boyutları aynı olmak şartıyla tanımlanır.

$$S = A + B = B + A$$

$$s_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

2) Boyutları aynı olan iki matrisin farkı,

$$S = A - B = -B + A$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

3) İki matrisin çarpımında ilk matrisin sütun sayısı ikinci matrisin satır sayısına eşit ise çarpım işlemi tanımlıdır.

$$S = A * B \neq B * A$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1*2+2*1 & 1*1+2*0 \\ 0*2+1*1 & 0*1+1*0 \\ 1*2+0*1 & 1*1+0*0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Genel formül;
$$P_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

4) Bir matris birim matris ile çarpıldığında sonuç matrisin kendisidir.

$$AI = A = IA$$

5) Eğer C matrisinin tersi C^{-1} mevcutsa $C.C^{-1} = I$ ve $(C^{-1})^{-1} = C$ (Tersinin olması için matris kare matris olmalı ve determinantı "0"dan farklı olmalıdır)

$$C_{ij}^{-1} = \frac{C_{ij} \text{'nin kofaktörü}}{|C|} = \frac{(-1)^{i+j} M_{ji}}{|C|}$$

Örnek-3: $C = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ olduğuna göre C^{-1} nedir?

Determinantını hesaplarsak,

$$|C| = \begin{vmatrix} 8 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 8 \cdot 0 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 4 \cdot 0 - [1 \cdot (-2) \cdot 1 + 8 \cdot 1 \cdot 4 + 0 \cdot 3 \cdot 0] = [(8 \cdot -2 \cdot 0) + (0 \cdot 1 \cdot 1) + (1 \cdot 3 \cdot 4)] - [(1 \cdot -2 \cdot 1) + (8 \cdot 1 \cdot 4) + (0 \cdot 3 \cdot 0)]$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 8 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 8 \cdot 0 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 4 \cdot 0 = 12 - 30 = -18$$

$$c_{11}^{-1} = \frac{(-1)^{1+1} M_{11}}{|C|} = \frac{1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}}{-18} = \frac{-4}{-18} = \frac{4}{18}$$

$$c_{12}^{-1} = \frac{(-1)^{1+2} M_{21}}{|C|} = \frac{-1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}}{-18} = \frac{4}{-18} = -\frac{4}{18}$$

$$c_{13}^{-1} = \frac{(-1)^{1+3} M_{31}}{|C|} = \frac{1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}}{-18} = \frac{2}{-18} = -\frac{2}{18}$$

$$c_{21}^{-1} = \frac{(-1)^{1+2} M_{12}}{|C|} = \frac{-1^* \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{-18} = \frac{1}{-18} = -\frac{1}{18}$$

$$c_{22}^{-1} = \frac{(-1)^{2+2} M_{22}}{|C|} = \frac{1^* \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{-18} = \frac{-1}{-18} = \frac{1}{18}$$

$$c_{23}^{-1} = \frac{(-1)^{2+3} M_{32}}{|C|} = \frac{-1^* \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{-18} = \frac{-5}{-18} = \frac{5}{18}$$

$$c_{31}^{-1} = \frac{(-1)^{3+1} M_{13}}{|C|} = \frac{1^* \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}}{-18} = \frac{14}{-18} = -\frac{14}{18}$$

$$c_{32}^{-1} = \frac{(-1)^{3+2} M_{23}}{|C|} = \frac{-1^* \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}}{-18} = \frac{-32}{-18} = \frac{32}{18}$$

$$c_{33}^{-1} = \frac{(-1)^{3+3} M_{33}}{|C|} = \frac{1^* \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}}{-18} = \frac{-16}{-18} = \frac{16}{18}$$

$$C^{-1} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 4 & -4 & -2 \\ -1 & 1 & 5 \\ -14 & 32 & 16 \end{bmatrix}$$

6) n*n boyutlarındaki bir matrisin determinanı,

$|C| = \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} c_{kj} M_{kj}$ hesaplanabilir. Bu formülde matris içerisindeki istenilen satır veya sütun dikkate alınarak çözüm yapılabilir. "0" sayısının en fazla bulunduğu satır veya sütunun seçilmesi çözümleme açısından rahat olmaktadır.

Örnek-4: $C = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 16 & -8 \\ 0 & 1 & 14 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 14 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ matrisinin determinantını hesaplayınız.

En fazla "0"ın bulunduğu 1. sütun dikkate alınarak çözümleme yapılacaktır.

$$C = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 16 & -8 \\ 0 & 1 & 14 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 14 & 6 & 0 \end{bmatrix} = (-1)^{1+1}(-3) \begin{vmatrix} 1 & 14 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 14 & 6 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}(0) \begin{vmatrix} 1 & 16 & -8 \\ 3 & 0 & 1 \\ 14 & 6 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}(0) \dots$$

$$\Rightarrow = -3 \begin{vmatrix} 1 & 14 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 14 & 6 & 0 \end{vmatrix} = -3 \left[(-1)^{2+3}(1) \begin{vmatrix} 1 & 14 \\ 14 & 6 \end{vmatrix} \right] = -3[-1*(1*6 - 14*14)] = 3*(6 - 196) = -570$$

Lineer Denklem Sistemlerinin Matris Şeklinde Gösterilişi

$$c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + c_{14}x_4 = r_1$$

$$c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + c_{24}x_4 = r_2$$

$$c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3 + c_{34}x_4 = r_3$$

$$c_{41}x_1 + c_{42}x_2 + c_{43}x_3 + c_{44}x_4 = r_4$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{bmatrix}$$

$$C.X = R$$

Not: İki satırı veya iki sütunu aynı olan matrisin determinanı her zaman "0"dır.

Bu denklem sisteminin klasik çözümü Cramer kuralı ile yapılmaktadır.

$$X_k = \frac{\det(C_k)}{\det(C)}$$

C_k ; k'inci kolonun R ile değiştirilmiş haliyle ortaya çıkan matristir. Bu metodun kullanılmama sebebi her hesaplama için toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerinden meydana gelen toplam $O(N^4)$ adet işlem yapılmasıdır. Bu rakam denklem sayısı arttıkça dördüncü mertebeden seviyesinde artmaktadır.

$$C.X = R$$

$$\Rightarrow C^{-1}.C.X = C^{-1}.R$$

$$I.X = C^{-1}.R$$

$$X = C^{-1}.R$$

Örnek-5: Aşağıdaki denklem sistemini Cramer kuralı ile çözünüz.

$$x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 1$$

$$-x_1 + x_2 - 3x_3 = 14$$

$$x_2 - 3x_3 = 5$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 14 \\ 5 \end{vmatrix}$$

Determinantını hesaplamamız gerekirse,

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 12 = 13$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 14 & 1 & -3 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 14 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}}{13} = \frac{-117}{13} = -9$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -1 & 14 & -3 \\ 0 & 5 & -3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 14 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}}{13} = \frac{-10}{13}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 14 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{13} = \frac{-25}{13}$$

GAUSS VE GAUSS-JORDAN ELEMINASYON METOTLARI

$$c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + c_{14}x_4 = r_1$$

$$c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + c_{24}x_4 = r_2$$

$$c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3 + c_{34}x_4 = r_3$$

$$c_{41}x_1 + c_{42}x_2 + c_{43}x_3 + c_{44}x_4 = r_4$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{bmatrix}$$

$$C.X = R$$

"C" matrisinin ilk satırını c_{11} 'e bölersek,

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & c'_{12} & c'_{13} & c'_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r'_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{bmatrix}$$

Bu aşamadan sonra ilk satırı c_{21} ile çarpıp ikinci satırdan, c_{31} ile çarpıp üçüncü satırdan ve c_{41} ile çarpıp dördüncü satırdan çıkaracağız. Bu durumda matris aşağıdaki hali alır,

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & c'_{12} & c'_{13} & c'_{14} \\ 0 & c'_{22} & c'_{23} & c'_{24} \\ 0 & c'_{32} & c'_{33} & c'_{34} \\ 0 & c'_{42} & c'_{43} & c'_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r'_1 \\ r'_2 \\ r'_3 \\ r'_4 \end{bmatrix}$$

Bu işlem dizisini ikinci satır için tekrarlırsak (c'_{22} ile bölüp, daha sonra ikinci satırı c'_{32} çarparak üçüncü satırdan, c'_{42} ile çarparak dördüncü satırdan çıkarırsak) denklem sistemimiz aşağıdaki hali alır,

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & c'_{12} & c'_{13} & c'_{14} \\ 0 & 1 & c''_{23} & c''_{24} \\ 0 & 0 & c''_{33} & c''_{34} \\ 0 & 0 & c''_{43} & c''_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r'_1 \\ r''_2 \\ r''_3 \\ r''_4 \end{bmatrix}$$

3. ve 4. satırlar için aynı işlemler yapıldığında,

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & c'_{12} & c'_{13} & c'_{14} \\ 0 & 1 & c''_{23} & c''_{24} \\ 0 & 0 & 1 & c'''_{34} \\ 0 & 0 & 0 & c'''_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r'_1 \\ r''_2 \\ r'''_3 \\ r'''_4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & c'_{12} & c'_{13} & c'_{14} \\ 0 & 1 & c''_{23} & c''_{24} \\ 0 & 0 & 1 & c'''_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r'_1 \\ r''_2 \\ r'''_3 \\ r''''_4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x_4 = r''''_4$$

$$x_3 + c'''_{34} \cdot x_4 = r'''_3 \Rightarrow x_3 = r'''_3 - c'''_{34} \cdot x_4$$

$$x_2 + c''_{23} \cdot x_3 + c''_{24} \cdot x_4 = r''_2 \Rightarrow x_2 = r''_2 - c''_{23} \cdot x_3 - c''_{24} \cdot x_4$$

$$x_1 + c'_{12} \cdot x_2 + c'_{13} \cdot x_3 + c'_{14} \cdot x_4 = r'_1 \Rightarrow x_1 = r'_1 - c'_{12} \cdot x_2 - c'_{13} \cdot x_3 - c'_{14} \cdot x_4$$

Gauss-Jordon metodu ile çözüm yapıldığında ise aşağıdaki matris sistemi meydana gelmektedir,

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1''' \\ r_2''' \\ r_3''' \\ r_4''' \end{bmatrix}$$

Bu yöntemde işlem sayısı Gauss Yoketme metodunun 1.5 katı mertebesinde işlem yapılır. Bu nedenle Gauss Yoketme metodu tercih edilir.

Örnek: $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 12 \\ 10 \end{bmatrix}$ denklemini Gauss ve Gauss-Jordan metodu ile çözünüz.

Gauss metodu ile çözüme başlarsak,

Adım 1. Birinci satır ile ilgili işlemler,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 12 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 11/3 & 4/3 \\ 0 & 1/3 & 8/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 34/3 \\ 26/3 \end{bmatrix}$$

Adım 2. İkinci satır ile ilgili işlemler,

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 12/33 \\ 0 & 1/3 & 8/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 34/11 \\ 26/3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 4/11 \\ 0 & 0 & 84/33 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 34/11 \\ 252/33 \end{bmatrix}$$

Adım 3. Üçüncü satır ile ilgili işlemler,

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 4/11 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 34/11 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = 3$$

$$x_2 + x_3 \frac{4}{11} = \frac{34}{11} \Rightarrow x_2 = 2$$

$$x_1 + x_2 \frac{1}{3} - x_3 \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow x_1 = 1$$

Gauss-Jordan'la çözüm yapıldığında elde edilecek son denklem kümesi aşağıdadır,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ÖDEV:

$$\mathbf{1)} \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_n & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ . \\ . \\ r_{n-1} \\ r_n \end{bmatrix} \quad \text{Gauss yok etme tekniği kullanılarak}$$

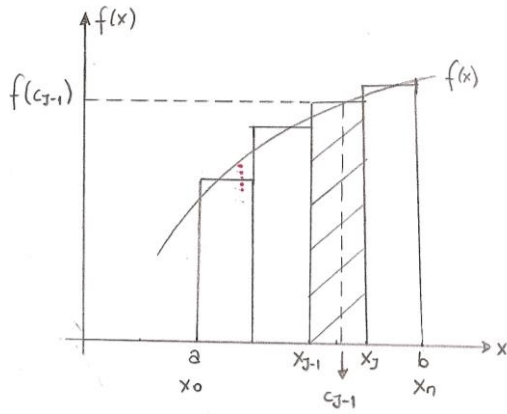
çözülebilecek bu sistem için bir algoritma geliştirin.

2)
$$\begin{bmatrix} 3 & -5 & 47 & 20 \\ 11 & 16 & 17 & 10 \\ 56 & 22 & 11 & -18 \\ 17 & 66 & -12 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 26 \\ 34 \\ 82 \end{bmatrix}$$
 denklem sistemini çözün.

Sonuçlar: $x_1 = -1.076888$, $x_2 = 1.99028$, $x_3 = 1.474477$ ve $x_4 = -1.906078$

3) NÜMERİK İNTEGRASYON

3.1) Dikdörtgenler Kuralı



$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=1}^n f(c_{j-1})(x_j - x_{j-1})$$

$$h = \frac{b-a}{n} \quad (\text{adım aralığı})$$

$$\int_a^b f(x)dx \cong h[f(c_0) + f(c_1) + \dots + f(c_{n-1})]$$

Eğer $c_{j-1} = x_{j-1}$ ise,

$$\int_a^b f(x)dx \cong h[f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1})]$$

Eğer $c_{j-1} = \frac{x_j + x_{j-1}}{2}$ ise, (doğru olan yaklaşım budur)

$$\int_a^b f(x)dx \cong h[f(c_0) + f(c_1) + \dots + f(c_{n-1})]$$

Bu metotta çözülen integralin sonucunda ortaya çıkan hatanın mertebesi,

m $f''(x)$ 'in minimum değeri ve

M $f''(x)$ 'in maksimum değeri olmak üzere hata;

$$\frac{m(b-a)^3}{12n^2} \leq \varepsilon \leq \frac{M(b-a)^3}{12n^2} \text{ aralığındadır.}$$

Bu formülü yorumlayacak olursak; aralık sayısı arttıkça hatanın azaldığı, ve $1/n^2$ 'ye diğer bir değişle h (adım aralığına) bağlı olarak büyüdüğü görülmektedir.

Örnek: $\int_1^4 x^2 dx = ?$, $n=2$ için dikdörtgenler metodunu kullanarak integralin yaklaşık sonucunu elde ediniz.

$$\int_1^4 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^4 = 21$$

$n = 2$ için,

$$x_j = x_0 + j.h \quad , \quad j = 0,1,2,\dots,n$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{4-1}{2} = 1.5$$

$$x_j = 1 + 1.5j \quad , \quad j = 0,1,2$$

$$x_0 = 1$$

$$x_1 = 2.5$$

$$x_2 = 4$$

$$\Rightarrow \int_1^4 x^2 dx \approx h[f(c_0) + f(c_1)]$$

$$c_{j-1} = \frac{x_j + x_{j-1}}{2}$$

$$c_0 = \frac{x_1 + x_0}{2} = \frac{1 + 2.5}{2} = 1.75$$

$$c_1 = \frac{x_2 + x_1}{2} = \frac{2.5 + 4}{2} = 3.25$$

$$\int_1^4 x^2 dx \approx h[f(c_0) + f(c_1)] \cong 1.5[(1.75)^2 + (3.25)^2] \cong 20.4375$$

Adım sayısı arttırıldıkça işlem doğru sonuca yaklaşmaktadır,

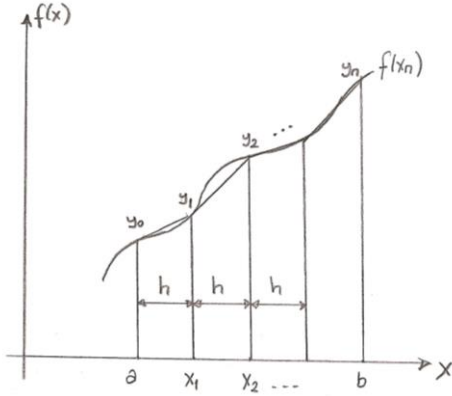
n	$\int_1^4 x^2 dx$
2	20.4375
4	20.859375
10	20.9775
50	20.9991
100	20.999775

Örnek: $\int_0^{\pi/2} e^{-x^2} \sin(x^2 + 1) dx = ?$

Çözüm; $n = 100$ için $\int_0^{\pi/2} e^{-x^2} \sin(x^2 + 1) dx = 0.7484696904$ ve

$n = 200$ için $\int_0^{\pi/2} e^{-x^2} \sin(x^2 + 1) dx = 0.748468314$

3.2) Yamuklar Kuralı



$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}(y_0 + y_1)(x_1 - x_0) + \frac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_2 - x_1) + \dots + \frac{1}{2}(y_{n-1} + y_n)(x_n - x_{n-1})$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

Yamuklar Kuralının formülü,

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{1}{2}h[y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n] \quad *$$

Hata formülü, $E = \frac{(b-a)}{12} f''(c)h^2 \quad a \leq c \leq b$

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{1}{2}h[y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n] + O(h^2)$$

Örnek: $\int_1^4 x^2 dx = ?$, $n=2$ için yamuklar kuralı metodunu kullanarak integralin yaklaşık sonucunu elde ediniz.

$n=2$ için,

$$x_j = x_0 + j.h \quad , \quad j = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{4-1}{2} = 1.5$$

$$x_j = 1 + 1.5j, \quad j = 0, 1, 2$$

$$x_0 = 1$$

$$x_1 = 2.5$$

$$x_2 = 4$$

$$\int_1^4 f(x) dx \cong \frac{1}{2} h [y_0 + 2y_1 + y_2] \cong \frac{1.5}{2} [1^2 + 2 \cdot (2.5)^2 + 4^2]$$

$$\Rightarrow \int_1^4 f(x) dx \cong 22.125$$

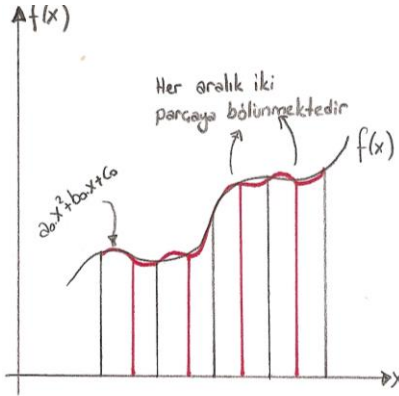
Adım sayısı arttırıldıkça işlem doğru sonuca yaklaşmaktadır,

n	$\int_1^4 x^2 dx$
2	22.125
4	21.28125
10	21.045
50	21.00180
100	21.00045

Örnek: $\int_0^{\pi/2} \sin(x^2) dx = ?$

n	Dikdörtgenler Kuralı	Yamuklar Kuralı
2	0.89293919	0.69947699
4	0.84420228	0.79620809
10	0.83064857	0.82305960
50	0.82821727	0.82791446
100	0.82814156	0.82806586

3.3) Simpson Kuralı



$\int_a^b f(x)dx$ ifadesinin integrali almak için bu yöntemde a

ile b arasında bölünen her aralık kendi içinde de ikiye bölünmektedir. Bu her bir ikili bölümün kritik noktalarının en yakının geçen ikinci dereceden bir eğri tanımlanarak çözüme yaklaşılmaya çalışılır. Burada hata ifadesinde de görebileceğimiz gibi hata oranları azalmakta ve ancak 4. derece ve üzerindeki derecelere sahip fonksiyonlarda hata değeri ortaya çıkmaktadır.

=>

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{3} [y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n] + O(h^4)$$

Hata ifadesi, $E = \frac{(b-a)}{180} f'''(c).h^4 = O(h^4) \quad a \leq c \leq b$

Örnek: $\int_1^4 x^2 dx = ?$, n=2 için Simpson kuralı metodunu kullanarak integralini elde ediniz.

n = 2 için,

$$x_j = x_0 + j.h \quad , \quad j = 0,1,2,\dots,n$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{4-1}{2} = 1.5$$

$$x_j = 1 + 1.5j \quad , \quad j = 0,1,2$$

$$x_0 = 1$$

$$x_1 = 2.5$$

$$x_2 = 4$$

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + y_2]$$

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{1.5}{3}[1^2 + 4(2.5)^2 + 4^2]$$

$$\Rightarrow \int_1^4 f(x)dx = 21$$

Örnek: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2 \sin^2 x}} = ?$ ifadesinin sonucunu her üç kurala göre de bulunuz?

Çözüm:

n	Dikdörtgenler Kuralı	Yamuklar Kuralı	Simpon Kuralı
2	0.76260967	0.77253221	0.7655945
10	0.76582073	0.76620815	0.76594906
50	0.76594477	0.76596025	0.76594992
100	0.76594864	0.76595251	0.76594993

3.4) Romberg İntegrasyon Kuralı

Bu kural bu ders kapsamında kullanılmayacaktır.

ÖDEVLER

1) $\int_0^{\pi} \sin(x)dx = ?$

2) $\int_0^{\pi} \ln(5 - 4 \cdot \cos(x))dx = ?$

3) $\int_0^{0.8} e^{-x^2} dx = ?$

4) $\int_{0.1}^1 \frac{\ln(x)}{x+1} dx = ?$

İntegrallerini bütün çözüm metotlarını kullanarak çözünüz.

3.5) Gauss-Legendre Quaratürü ve Integrasyonu

$\int_{-1}^1 f(x)dx$ integralinin hesaplanmasını amaçlayan bu formülde (Legendre Formülü) x_k

ve w_k değerleri gauss quadratürleridir. x_k 'lar Legendre polinomunun köklerini, w_k 'lar ise bu köklere bağlı olan ağırlık fonksiyonlarını ifade etmektedir. (Aralık -1 ile 1 arasında olmalı)

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx w_1 \cdot f(x_1) + w_2 \cdot f(x_2) + \dots + w_n \cdot f(x_n) \cong \sum_{k=1}^n w_k \cdot f(x_k) \quad *$$

Legendre Polinomları,

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dx^n} \{ [x^2 - 1]^n \} \quad \text{"Rodriguez Formülü" ile hesaplanır.}$$

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

.

.

Bu polinomlarda kendisinden önceki iki legendre polinomu bilinen değer de legendre polinomu "**rekürans bağıntısı**" ile hesaplanabilir.

Rekürans Bağantısı : $(n+1).P_{n+1}(x) - (2n+1)x.P_n(x) + n.P_{n-1}(x) = 0$

n=1 için bu denklemi uygularsak,

$$2.P_2(x) - 3x.P_1(x) + P_0(x) = 0$$

$$\Rightarrow 2.P_2(x) = 3x.P_1(x) - P_0(x) = 3x.x - 1$$

$$\Rightarrow P_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2}$$

Ağırlık Fonksiyonu : $w_k = \frac{2(1-x_k^2)}{n^2[P_{n-1}(x_k)]^2}$

Örnek: $n = 3$ için Gauss quadratürlerini bulunuz.

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 5x^3 - 3x = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad x_{2,3} = \mp \sqrt{\frac{3}{5}} = \mp 0.7745966$$

$$w_1 = \frac{2(1-0^2)}{3^2[P_2(0)]^2} = \frac{2}{9\left[\frac{1}{2}(3 \cdot 0^2 - 1)\right]^2} = \frac{8}{9} = 0.888889$$

$$w_2 = \frac{2(1-0.7745966^2)}{3^2[P_2(0.7745966)]^2} = \frac{2(1-0.7745966^2)}{9\left[\frac{1}{2}(3 \cdot 0.7745966^2 - 1)\right]^2} = 0.555556$$

$$w_3 = w_2$$

Örnek: $n = 2$ için Gauss quadratürlerini bulunuz.

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \mp 0.577350$$

$$w_k = \frac{2(1 - x_k^2)}{n^2 [P_{n-1}(x_k)]^2}$$

$$w_1 = \frac{2 \left[1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 \right]}{2^2 \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \right]^2} = 1 \quad \& \quad w_2 = w_1$$

-----000000000000-----

Gauss-Legendre formülleri ile yapılan çözümlerde ortaya çıkan hata denklemini aşağıdaki gibidir,

$$R_n = \frac{2^{2n+1} (n!)^4}{(2n+1) [(2n)!]^2} f^{(2n)}(c) \quad , \quad -1 \leq c \leq 1$$

Eğer integralin sınır koşulları -1 ve 1 arasında değilse a ve b gibi iki farklı değer arasında ise aşağıdaki denklem takımları kullanılmaktadır,

$$\int_a^b f(y) dy \cong \left(\frac{b-a}{2} \right) \sum_{i=1}^n w_i \cdot f(y_i) + R_n \quad *$$

$$y_i = \left(\frac{b-a}{2} \right) x_i + \left(\frac{b+a}{2} \right)$$

Hata Fonksiyonu ; $R_n = \frac{(b-a)^{2n+1} (n!)^4}{(2n+1) [(2n)!]^3} f^{(2n)}(c)$

Örnek: $\int_{-1}^1 x^2 \cos(x) dx = ?$ $n = 3$ için Gauss-Legendre formülleri ile integrali hesaplayınız.

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) = 0 \Rightarrow 5x^3 - 3x = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad \& \quad x_{2,3} = \mp \sqrt{\frac{3}{5}} = \mp 0.7745966$$

$$w_1 = \frac{2(1-0^2)}{3^2 [P_2(0)]^2} = \frac{2}{9 \left[\frac{1}{2}(3 \cdot 0^2 - 1) \right]^2} = \frac{8}{9} = 0.888889$$

$$w_2 = \frac{2(1-0.7745966^2)}{3^2 [P_2(0)]^2} = \frac{2(1-0.7745966^2)}{9 \left[\frac{1}{2}(3 \cdot 0.7745966^2 - 1) \right]^2} = 0.555556 \quad \& \quad w_3 = w_2$$

$$\int_{-1}^1 x^2 \cos(x) dx \cong w_1 \cdot f(x_1) + w_2 \cdot f(x_2) + w_3 \cdot f(x_3)$$

$$\int_{-1}^1 x^2 \cos(x) dx \cong 0.888889 \cdot (0) + 0.555556 \cdot ((0.77459)^2 \cdot \cos(0.77459)) +$$

$$0.555556 \cdot ((-0.77459)^2 \cdot \cos(-0.77459))$$

$$\int_{-1}^1 x^2 \cos(x) dx \cong 0.47650$$

Sağlama; $\int_{-1}^1 x^2 \cos(x) dx = 2x \cdot \cos(x) - (x^2 - 2) \cdot \sin(x) \Big|_{-1}^1 = 0.47830$

Örnek: $\int_0^2 e^y dy = ?$ $n = 3$ için gauss-legendre formülleri ile integrali hesaplayınız.

$$\int_0^2 e^y dy \cong \left(\frac{2-0}{2} \right) \sum_{i=1}^3 w_i \cdot f(y_i)$$

$$y_i = \left(\frac{b-a}{2} \right) x_i + \left(\frac{b+a}{2} \right) = x_i + 1$$

$$y_1 = x_1 + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$y_2 = x_2 + 1 = 0.77459 + 1 = 1.77459$$

$$y_3 = x_3 + 1 = -0.77459 + 1 = 0.22541$$

$$\Rightarrow \int_0^2 e^y dy \cong \left(\frac{2-0}{2} \right) \sum_{i=1}^3 w_i \cdot f(y_i) \cong 1 [0.888889 * e^1 + 0.555556 * e^{1.77459} + 0.555556 * e^{0.22541}]$$

$$\int_0^2 e^y dy \cong 6.388853$$

Sağlama; $\int_0^2 e^y dy = e^y \Big|_0^2 = e^2 - e^0 = 6.389056$

3.6) Gauss-Chebysev İntegrasyon Formülü

$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$, integralinin $x = \pm 1$ değerlerinde kritik noktaları vardır. Ve

normal nümerik yöntemlerle çözüm yapılamaya çalışılırsa bu noktalarda integral sonsuza gider. Bu durumda Chebysev formüllerini kullanırız,

$$T_n(x) = \cos[n(\arccos x_i)]$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sum_{i=1}^n w_i * f(x_i) + R_n , \quad w_i = \frac{\pi}{n}$$

Bu formüller ışında x_i ifadesini aşağıdaki gibi hesaplayabiliriz,

$$T_n(x) = \cos[n(\arccos x_i)] = 0 \quad \text{dersek,}$$

$$n * (\arccos x_i) = \frac{(2i-1)\pi}{2} \quad \text{olur.}$$

$$\Rightarrow \arccos x_i = \frac{(2i-1)\pi}{2n}$$

$$\cos(\arccos x_i) = \cos\left(\frac{(2i-1)\pi}{2n}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{x_i = \cos\left(\frac{(2i-1)\pi}{2n}\right)}$$

$$\text{Hata fonksiyonu,} \quad R_n = \frac{\pi}{(2n)! * 2^{2n-1}} f^{(2n)}(c) , \quad -1 \leq c \leq 1$$

Örnek: $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ integralini $n=3$ için Gauss-Chebysev intgrali çözüm metodu ile çözüünüz.

$$x_i = \cos \left[\frac{(2i-1)\pi}{2n} \right]$$

$$i=1 \text{ için, } x_1 = \cos \left[\frac{(2*1-1)\pi}{2*3} \right] = \cos \left(\frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$i=2 \text{ için, } x_2 = \cos \left[\frac{(2*2-1)\pi}{2*3} \right] = \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0$$

$$i=3 \text{ için, } x_3 = \cos \left[\frac{(2*3-1)\pi}{2*3} \right] = \cos \left(\frac{5\pi}{6} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$w_1 = w_2 = w_3 = \frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{3}$$

Pay bölümünde herhangi bir fonksiyon tanımlanmadığı için $f(x)=1$ 'dir,

$$\Rightarrow \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \cong w_1 * f(x_1) + w_2 * f(x_2) + w_3 * f(x_3)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \cong \frac{\pi}{3}(1+1+1) = \pi$$

Sağlama ; $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) \Big|_{-1}^1 = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \pi$

Örnek: $\int_{-1}^1 \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}} dx$ integralini $n=3$ için Gauss-Chebyshev integrali çözüm metodu ile çözünüz.

$$f(x) = x^4$$

$$x_i = \cos \left[\frac{(2i-1)\pi}{2n} \right]$$

$$i=1 \text{ için, } x_1 = \cos \left[\frac{(2*1-1)\pi}{2*3} \right] = \cos \left(\frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$i=2 \text{ için, } x_2 = \cos \left[\frac{(2*2-1)\pi}{2*3} \right] = \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0$$

$$i=3 \text{ için, } x_3 = \cos \left[\frac{(2*3-1)\pi}{2*3} \right] = \cos \left(\frac{5\pi}{6} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$w_1 = w_2 = w_3 = \frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^1 \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^2}} \cong w_1 * f(x_1) + w_2 * f(x_2) + w_3 * f(x_3)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^2}} \cong \frac{\pi}{3} \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^4 + 0^4 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^4 \right] = \frac{3\pi}{8}$$

NOT: Eğer sınırları -1 ve 1'den a ve b gibi farklı noktaya götürecek olursak çözüm fonksiyonu aşağıdaki hali alır.

$$\int_a^b \frac{f(y)}{\sqrt{(y-a)(b-y)}} dy = \left(\frac{b-a}{2} \right) \sum_{i=1}^n w_i * f(y_i) + R_n$$

$$y_i = \left(\frac{b-a}{2} \right) x_i + \left(\frac{b+a}{2} \right)$$

3.7) Gauss-Laguerre Formülü

$$\int_0^{\infty} e^{-x} f(x) dx = \sum_{i=1}^n w_i * f(x_i) + R_n$$

Laguerre fonksiyonları , $L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n)$

Ağırlık fonksiyonu , $w_i = \frac{(n!)^2}{x_i [L'_n(x_i)]^2}$

Hata fonksiyonu , $R_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} f^{(2n)}(c)$

Örnek: $\int_0^{\infty} e^{-x} \sin(x) dx = ?$

$$f(x) = \sin(x)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \sin(x) dx \cong \sum_{i=0}^n w_i * \sin(x_i)$$

n	2	6	10	14
$\sum_{i=0}^n w_i * \sin(x_i)$	0.43	0.50005	0.500002	0.500000

3.8) Gauss-Hermite Formülü

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) dx \cong \sum_{i=1}^n w_i * f(x_i) + R_n$$

Burada x_i 'ler Hermite fonksiyonlarının kökleridir.

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$$

$$w_i = \frac{2^{n+1} n! \sqrt{\pi}}{[H'_n(x_i)]^2} \quad \text{ve} \quad R_n = \frac{n! \sqrt{\pi}}{2^n (2n)!} f^{(2n)}(c)$$

Örnek: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \sin^2(x) dx = ?$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \sin^2(x) dx = \sum_{i=1}^n w_i * \sin^2(x_i)$$

n	2	4	6	8	10
$\sum_{i=0}^n w_i * \sin^2(x_i)$	0.748	0.5655	0.560255	0.560202	0.560202

ÖDEVLER

1) $\int_0^1 x^x dx = ?$

2) $\int_0^{\pi} e^{\sin(x)} dx = ?$

3) $\int_0^{\infty} e^{-x} x^4 dx = ?$

4) $\int_0^{\infty} e^{-\left(x + \frac{1}{x}\right)} dx = ?$

$$5) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos(x) dx = ?$$

$$6) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 - \frac{1}{x^2}} dx = ?$$

$$7) \int_{-1}^1 \frac{\cos(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = ?$$

$$8) \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx = ?$$

3.9) Katlı İntegraller

$$I = \int_{x=a}^b \int_{y=c}^d f(x, y) dy dx \text{ integrali için}$$

$$F(x) = \int_{y=c}^d f(x, y) dy \text{ denilirse,}$$

$$I = \int_{x=a}^b F(x) dx \text{ halini alır.}$$

$$\Rightarrow F(x) = \int_{y=c}^d f(x, y) dy \cong \left(\frac{d-c}{2} \right) \sum_{j=1}^m w_j * f(x, y_j)$$

$$y_j = \left(\frac{d-c}{2} \right) \bar{x}_j + \left(\frac{d+c}{2} \right)$$

$$\Rightarrow I = \int_{x=a}^b F(x) dx \cong \int_{x=a}^b \left(\frac{d-c}{2} \right) \sum_{j=1}^m w_j * f(x, y_j) dx$$

$$I = \left(\frac{d-c}{2} \right) \left(\frac{b-a}{2} \right) \sum_{k=1}^n w_k \left(\sum_{j=1}^m w_j * f(x_k, y_j) \right)$$

$$x_k = \left(\frac{b-a}{2} \right) \bar{x}_k + \left(\frac{b+a}{2} \right)$$

$$I = \frac{(b-a)(d-c)}{4} \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^m w_k * w_j * f(x_k, y_j) \right)$$

Örnek: $A = \int_{x=0}^2 \int_{y=-1}^1 \frac{dy dx}{x^2 + y^2} = ?$ integralini x'e ve y'ye bağlı integralleri iki parçaya bölerek bulunuz.

$$A = \int_{x=0}^2 \int_{y=-1}^1 \frac{dy dx}{x^2 + y^2} \cong \frac{(2-0)(1-(-1))}{4} \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^2 w_k * w_j * \frac{1}{x_k^2 + y_j^2}$$

$$x_k = \left(\frac{b-a}{2} \right) \bar{x}_k + \left(\frac{b+a}{2} \right) = \bar{x}_k + 1$$

$$y_j = \bar{x}_j$$

$m = n = 2$ kabul edilirse,

x için,

$$\bar{x}_1 = 0.57735 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \bar{x}_1 + 1 = 0.57735 + 1 = 1.57735$$

$$\bar{x}_2 = -0.57735 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \bar{x}_2 + 1 = -0.57735 + 1 = 0.42265$$

$$w_1 = w_2 = 1$$

y için,

$$\bar{x}_1 = 0.57735 \quad \Rightarrow \quad y_1 = \bar{x}_1 = 0.57735$$

$$\bar{x}_2 = -0.57735 \quad \Rightarrow \quad y_2 = \bar{x}_2 = -0.57735$$

$$w_1 = w_2 = 1$$

$$A = \int_{x=0}^2 \int_{y=-1}^1 \frac{dy dx}{x^2 + y^2} \cong \frac{(2-0)(1-(-1))}{4} \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^2 w_k * w_j * \frac{1}{x_k^2 + y_j^2}$$

$$A \cong \sum_{k=1}^2 \left(\frac{1}{x_k^2 + y_1^2} + \frac{1}{x_k^2 + y_2^2} \right) \cong \left(\frac{1}{x_1^2 + y_1^2} + \frac{1}{x_1^2 + y_2^2} + \frac{1}{x_2^2 + y_1^2} + \frac{1}{x_2^2 + y_2^2} \right)$$

$$\Rightarrow A \cong 4.61538$$

Örnek: $A = \int_0^1 \int_0^x x.y.e^{-y^2} dy.dx = ?$ integralini x'e ve y'ye bağlı integralleri iki parçaya bölerek bulunuz.

$$A = \int_0^1 x \left\{ \int_0^x y.e^{-y^2} dy \right\} dx$$

$$\Rightarrow I(x) = \int_0^x y.e^{-y^2} dy \quad \text{denilirse} \quad A = \int_0^1 x.I(x) dx \text{ olur.}$$

$$I(x) = \int_0^x y.e^{-y^2} dy = \left(\frac{b-a}{2} \right) \sum_{i=1}^2 w_i * f(y_i)$$

$$\bar{x}_{1,2} = \mp 0.57735 \quad \text{ve} \quad w_1 = w_2 = 1$$

$$y_i = \left(\frac{b-a}{2} \right) \bar{x}_i + \left(\frac{b+a}{2} \right) \Rightarrow y_i = \left(\frac{x-0}{2} \right) \bar{x}_i + \left(\frac{x+0}{2} \right) = \left(\frac{x}{2} \right) \bar{x}_i + \frac{x}{2}$$

$$y_1 = \frac{x}{2} (0.57735) + \frac{x}{2} = 0.788675 x$$

$$y_2 = \frac{x}{2} (-0.57735) + \frac{x}{2} = 0.211325 x$$

$$\Rightarrow I(x) = \frac{x}{2} [1 * f(y_1) + 1 * f(y_2)]$$

$$I(x) = \frac{x}{2} \left[(0.788675 .x) * e^{-(0.788675x)^2} + (0.211325 .x) * e^{-(0.211325x)^2} \right]$$

$$\Rightarrow A = \int_0^1 \left\{ 0.394338 .x^3 .e^{-0.622x^2} + 0.105663 .x^3 .e^{-0.04466x^2} \right\} dx$$

$$x_i = \left(\frac{b-a}{2} \right) \bar{x}_i + \left(\frac{b+a}{2} \right) \Rightarrow x_i = \left(\frac{1-0}{2} \right) \bar{x}_i + \left(\frac{1+0}{2} \right) = \frac{\bar{x}_i}{2} + \frac{1}{2}$$

$$x_1 = \frac{0.57735}{2} + \frac{1}{2} = 0.788675$$

$$x_2 = \frac{-0.57735}{2} + \frac{1}{2} = 0.211325$$

$$A = \left(\frac{b-a}{2} \right) \sum_{j=1}^2 w_j * g(x_j)$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2} \left\{ 0.394338 \cdot (0.788675)^3 \cdot e^{-0.622 \cdot (0.788675)^2} + 0.105663 \cdot (0.788675)^3 \cdot e^{-0.0446 \cdot (0.788675)^2} \right\} +$$

$$\frac{1}{2} \left\{ 0.394338 \cdot (0.211325)^3 \cdot e^{-0.622 \cdot (0.211325)^2} + 0.105663 \cdot (0.211325)^3 \cdot e^{-0.0446 \cdot (0.211325)^2} \right\}$$

$$\Rightarrow A = 0.0932$$

4) NÜMERİK DİFERANSİYEL

4.1) İleri ve Geri Farklar

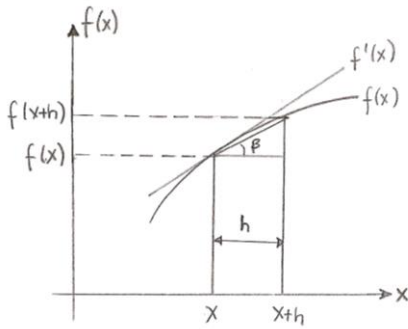
$f(x)$ fonksiyonunu x noktasından h kadar uzaktaki bir noktaya Taylor serisine açarsak,

$$f(x+h) = f(x) + h \cdot f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \dots$$

Bu durumda $f'(x)$ aşağıdaki hali almaktadır,

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2} f''(x) - \frac{h^2}{6} f'''(x) + \dots$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h) \quad \textbf{(İleri Farklar Formülü)}$$



$$f(x) \quad \Rightarrow \quad f_i$$

$$f(x+h) \quad \Rightarrow \quad f_{i+1}$$

$$\Rightarrow f'_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + O(h) \quad \textbf{(İleri Farklar Formülü)}$$

Yukarıda yapılan işlemleri seçtiğimiz x noktasından h kadar negatif uzaktaki bir nokta için tekrarlırsak,

$$f(x-h) = f(x) - h.f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) - \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \dots$$

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + \frac{h}{2} f''(x) - \frac{h^2}{6} f'''(x) + \dots$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + O(h)$$

$$\Rightarrow f'_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + O(h) \quad \textbf{(Geri Farklar Formülü)}$$

Operatörler

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i \quad \Rightarrow \quad f'_i = \frac{\Delta f_i}{h} + O(h) \quad \textbf{(İleri Farklar Formülü)}$$

$$\nabla f_i = f_i - f_{i-1} \quad \Rightarrow \quad f'_i = \frac{\nabla f_i}{h} + O(h) \quad \textbf{(Geri Farklar Formülü)}$$

İkinci dereceden ileri farklar formülünü hesaplayabilmek için $f(x+h)$ ve $f(x+2h)$ fonksiyonlarını Taylor serisine açarak çözüme ulaşılır,

$$2/ \quad f(x+h) = f(x) + h.f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \dots$$

$$\quad \quad \quad f(x+2h) = f(x) + 2h.f'(x) + \frac{(2h)^2}{2!} f''(x) + \frac{(2h)^3}{3!} f'''(x) + \dots$$

$$2f(x+h) - f(x+2h) = f(x) - h^2 f''(x) - h^3 f'''(x) - \dots$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2} - hf'''(x) - \dots$$

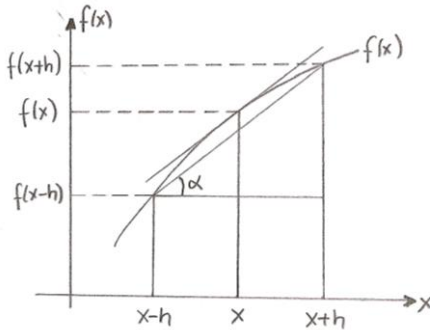
$$f_i'' = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{h^2} + O(h) \quad (\text{İkinci Dereceden İleri Farklar Formülü})$$

$$f_i'' = \frac{f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}}{h^2} + O(h) \quad (\text{İkinci Dereceden Geri Farklar Formülü})$$

$$\Delta^2 f_i = f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i \quad \Rightarrow \quad f_i'' = \frac{\Delta^2 f_i}{h^2} + O(h)$$

$$\nabla^2 f_i = f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2} \quad \Rightarrow \quad f_i'' = \frac{\nabla^2 f_i}{h^2} + O(h)$$

4.2) Merkezi Farklar



$$f'(x) \cong \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \cong \tan \alpha$$

$$f(x+h) = f(x) + h \cdot f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \dots \quad (1)$$

$$f(x-h) = f(x) - h \cdot f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) - \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \dots \quad (2)$$

$$f(x+h) - f(x-h) = 2h \cdot f'(x) + \frac{2h^3}{3!} f'''(x) + \dots$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{6} f'''(x) - \dots$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2)$$

Eğer (1) ve (2) nolu formülleri taraf tarafa toplarsak,

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + \frac{2h^2}{2!} f''(x) + O(h^4)$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2)$$

$$\left. \begin{aligned} f'_i &= \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + O(h^2) \\ f''_i &= \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} + O(h^2) \end{aligned} \right\} \quad \textbf{Merkezi Farklar Formülü}$$

4.3) Diferansiyel Formüllerinin Genellenmesi

$$\left. \frac{d^n f}{dx^n} \right|_{x_j} = \frac{\Delta^n f_j}{h^n} + O(h) \quad \textbf{İleri Farklar Formülü}$$

$$\left. \frac{d^n f}{dx^n} \right|_{x_j} = \frac{\nabla^n f_j}{h^n} + O(h) \quad \textbf{Geri Farklar Formülü}$$

$$\left. \frac{d^n f}{dx^n} \right|_{x_j} = \frac{\nabla^n f_{j+\frac{n}{2}} + \Delta^n f_{j-\frac{n}{2}}}{2h^n} + O(h^2) \quad , n \text{ çift ise}$$

$$\left. \frac{d^n f}{dx^n} \right|_{x_j} = \frac{\nabla^n f_{j+\frac{(n-1)}{2}} + \Delta^n f_{j-\frac{(n-1)}{2}}}{2h^n} + O(h^2) \quad , n \text{ tek ise}$$

Merkezi Farklar Formülü

Genel formüller,

$$\Delta^n f_j = \Delta^{n-1} f_{j+1} - \Delta^{n-1} f_j$$

$$\nabla^n f_j = \nabla^{n-1} f_j - \nabla^{n-1} f_{j-1}$$

Örnek: $n = 2$ için merkezi farklar formülünü hesaplayınız?

$$\left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x_j} = \frac{\nabla^2 f_{j+\frac{2}{2}} + \Delta^2 f_{j-\frac{2}{2}}}{2h^2} + O(h^2)$$

$$\left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x_j} = \frac{\nabla^2 f_{j+1} + \Delta^2 f_{j-1}}{2h^2} + O(h^2) = \frac{(\nabla f_{j+1} - \nabla f_j) + (\Delta f_j - \Delta f_{j-1})}{2h^2} + O(h^2)$$

$$\left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x_j} = \frac{(f_{j+1} - f_j - f_j + f_{j-1}) + (f_{j+1} - f_j - f_j + f_{j-1})}{2h^2} + O(h^2)$$

$$\left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x_j} = \frac{(f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1})}{h^2} + O(h^2)$$

Örnek:

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	1	0.5	8.0	35.5	95	198.5

$x=0,1,2$ değerlerinde $f(x)$ fonksiyonunun üçüncü türevini İleri farklar formüllerini kullanarak bulunuz?

Adım aralığı 1 olduğu için ifadelerde $h=1$ olarak alınmıştır.

i	x_i	f_i	$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$	$\Delta^2 f_i = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i$	$\Delta^3 f_i = \Delta^2 f_{i+1} - \Delta^2 f_i$
0	0	1	$0.5 - 1 = -0.5$	$7.5 - (-0.5) = 8$	$20 - 8 = 12$
1	1	0.5	$8.0 - 0.5 = 7.5$	$27.5 - 7.5 = 20$	$32 - 20 = 12$
2	2	8.0	$35.5 - 8.0 = 27.5$	$59.5 - 27.5 = 32$	$44 - 32 = 12$
3	3	35.5	$95 - 35.5 = 59.5$	$103.5 - 59.5 = 44$	
4	4	95	$198.5 - 95 = 103.5$		
5	5	198.5			

$$\left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_{x_j} = \frac{\Delta^3 f_j}{h^3} + O(h)$$

$$h=1 \Rightarrow$$

$$\left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_0 = \frac{\Delta^3 f_0}{1^3} = 12$$

$$\left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_1 = \frac{\Delta^3 f_1}{1^3} = 12$$

$$\left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_2 = \frac{\Delta^3 f_2}{1^3} = 12$$

4.4) Daha Yüksek Mertebeden İleri, Geri ve Merkezi Farklar Formülleri

İleri farklar formülünü yazarsak,

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2} f''(x) - \frac{h^2}{6} f'''(x) + \dots$$

Bu formülde $f''(x)$ yerine ikinci mertebeden hesapladığımız ileri farklar formülünü yazdığımızda,

$$f''(x) = \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2} - hf'''(x) - \dots$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2} \left[\frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2} + O(h) \right] - \frac{h^2}{6} f'''(x) + \dots$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-f(x+2h) + 4f(x+h) - 3f(x)}{2h} + O(h^2)$$

$$f'_i = \frac{-f_{i+2} + 4f_{i+1} - 3f_i}{2h} + O(h^2) \quad \text{İleri Farklar}$$

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + O(h^2) \quad \text{Merkezi Farklar}$$

$$f'_i = \frac{f_{i-2} - 4f_{i-1} + 3f_i}{2h} + O(h^2) \quad \text{Geri Farklar}$$

Üç Nokta Formülleri

(Three-Point Formulas)

$$f'_i = \frac{f_{i-2} - 8f_{i-1} + 8f_{i+1} - f_{i+2}}{2h} + O(h^4) \quad \text{Merkezi Farklar (Beş Nokta-Five Point Formula)}$$

ÖDEVLER

1)

x	0	0.5	1.0	1.5	2	2.5	3.0
$f(x)$	1	0.8	1.2	0.4	0.6	0.8	0.7

Değerleri için $f'(1.5)$ ve $f'(1.5)$ değerinin hata mertebesi $O(0.5^2)$ olacak şekilde tüm yaklaşımlarla çözünüz.

2) $f'''(x)$ için merkezi farklar formülünü bulunuz.

5) INTERPOLASYON VE EKSTRAPOLASYON

5.1) Gregory-Newton Interpolasyon Formülü

$f(x)$ fonksiyonunu $x = 0$ 'da Taylor serisine açacak olursak,

$$f(x) = f(0) + x.f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \dots$$

$$f'(0) = \frac{\Delta f_0}{h} - h.f'''(0) + O(h^2) \quad , \text{ ileri farklar fonksiyonun Taylor serisinde yerine koyarsak}$$

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{h} \Delta f_0 + \frac{x(x-h)}{2!.h^2} \Delta^2 f_0 + \frac{x(x-h)(x-2h)}{3!.h^3} \Delta^3 f_0 + \dots \text{ elde ederiz.}$$

Yukarıda elde ettiğimiz bu formülü genelleyecek olursak, yani $x = x_n$ 'de Taylor serisine açarsak,

$$f(x) = f(x_n) + \frac{(x-x_n)}{h} \Delta f_n + \frac{(x-x_n)[(x-x_n)-h]}{2!.h^2} \Delta^2 f_n + \frac{(x-x_n)[(x-x_n)-h][(x-x_n)-2h]}{3!.h^3} \Delta^3 f_n + \dots$$

(İleri farklar formülü ile Gregory-Newton interpolasyon fonksiyonu)

Bu adımları geri farklar formülü ile tekrar edersek,

$$f(x) = f(x_n) + \frac{(x-x_n)}{h} \nabla f_n + \frac{(x-x_n)[(x-x_n)+h]}{2!.h^2} \nabla^2 f_n + \frac{(x-x_n)[(x-x_n)+h][(x-x_n)+2h]}{3!.h^3} \nabla^3 f_n + \dots$$

(Geri farklar formülü ile Gregory-Newton interpolasyon fonksiyonu)

Eğer veriler **eşit aralıklarla** verilmişse interpolasyon veya ekstrapolasyon yapmak için Gregory-Newton interpolasyon formülü kullanılır.

Örnek:

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	-7	-3	6	25	62	129

Verilen değerler ışığında $f(1.1)$ değerini tahmin ediniz.

Değerlere bakıldığında 1.1 noktasının ilerisinde daha fazla nokta bulunduğu için ileri farklar formülünden geliştirdiğimiz interpolasyon fonksiyonu kullanılacaktır.

$$f(x) = f(x_n) + \frac{(x - x_n)}{h} \Delta f_n + \frac{(x - x_n)[(x - x_n) - h]}{2! \cdot h^2} \Delta^2 f_n + \frac{(x - x_n)[(x - x_n) - h][(x - x_n) - 2h]}{3! \cdot h^3} \Delta^3 f_n + \dots$$

i	x_i	f_i	$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$	$\Delta^2 f_i = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i$	$\Delta^3 f_i = \Delta^2 f_{i+1} - \Delta^2 f_i$
0	0	-7	$-3 - (-7) = 4$	$9 - 4 = 5$	$10 - 5 = 5$
1	1	-3	$6 - (-3) = 9$	$19 - 9 = 10$	$18 - 10 = 8$
2	2	6	$25 - 6 = 19$	$37 - 19 = 18$	$30 - 18 = 12$
3	3	25	$62 - 25 = 37$	$67 - 37 = 30$	-
4	4	62	$129 - 62 = 67$	-	-
5	5	129	-	-	-

i	x_i	f_i	$\Delta^4 f_i = \Delta^3 f_{i+1} - \Delta^3 f_i$	$\Delta^5 f_i = \Delta^4 f_{i+1} - \Delta^4 f_i$
0	0	-7	$8 - 5 = 3$	$4 - 3 = 1$
1	1	-3	$12 - 8 = 4$	-
2	2	6	-	-
3	3	25	-	-
4	4	62	-	-
5	5	129	-	-

1.1 değerine en yakın değer 1 olduğu için $x_n = 1$ kabul edilecektir. ($h = 1$ ve $x = 1.1$)

$$f(x) = f(x_n) + \frac{(x-x_n)}{h} \Delta f_n + \frac{(x-x_n)[(x-x_n)-h]}{2!h^2} \Delta^2 f_n + \frac{(x-x_n)[(x-x_n)-h][(x-x_n)-2h]}{3!h^3} \Delta^3 f_n + \dots$$

$$f(1.1) = f(1) + \frac{(1.1-1)}{1} \Delta f_1 + \frac{(1.1-1)[(1.1-1)-1]}{2!1^2} \Delta^2 f_1 + \frac{0.1[(0.1)-1][(0.1)-2]}{3!1^3} \Delta^3 f_1 + \frac{0.1[(0.1)-1][(0.1)-2][(0.1)-3]}{4!1^4} \Delta^4 f_1$$

$$f(1.1) = -3 + 0.1*9 + \frac{0.1*(-0.9)}{2}10 + \frac{0.1*(-0.9)*(-1.9)}{6}8 + \frac{0.1*(-0.9)*(-1.9)(-2.9)}{24}4$$

$$f(1.1) = -2.40465$$

Sadece ilk iki bileşen alınarak sonuca ulaşılmaya çalışılsaydı sonuç aşağıdaki gibi olurdu.

$$f(1.1) = -3 + 0.1*9 = -2.1 \quad (\text{Lineer Interpolasyon})$$

5.2) EŞİT ARALIKLARLA DAĞILMAMIŞ VERİLERE INTERPOLASYON (LAGRANGE POLİNOMLARI)

n. dereceden bir polinomu x_j noktası için yazacak olursak,

$$P_j(x) = A_j(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2).....(x-x_{j-1})(x-x_{j+1}).....(x-x_n)$$

$$P_j(x) = A_j \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n (x-x_i)$$

Herhangi bir x_k noktası için polinomun değerini bulacak olursak,

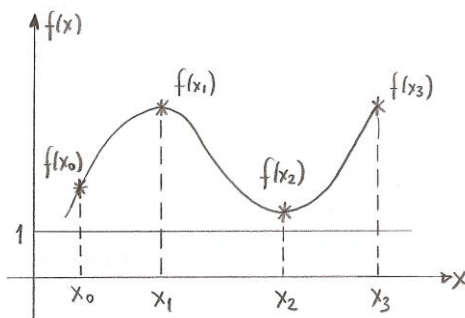
$$P_j(x_k) = \begin{cases} 0 & k \neq j \\ A_j \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n (x_j - x_i) & k = j \end{cases}$$

Eğer $A_j = \frac{1}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n (x_j - x_i)}$ seçilirse,

$$\Rightarrow P_j(x) = \frac{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n (x - x_i)}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n (x_j - x_i)} \quad \textbf{(Lagrange Polinomları)}$$

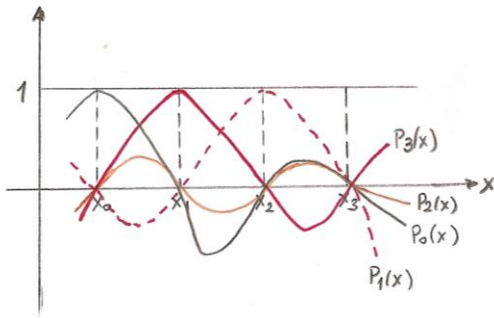
$$P_j(x_k) = \begin{cases} 0 & k \neq j \\ 1 & k = j \end{cases}$$

$$f(x) \cong \sum_{j=0}^n f(x_j) * P_j(x)$$



$$\Rightarrow f(x) \approx f(x_0) * P_0(x) + f(x_1) * P_1(x) + f(x_2) * P_2(x) + f(x_3) * P_3(x)$$

$$\Rightarrow P_0(x_k) = \begin{cases} 0 & k \neq 0 \\ 1 & k = 0 \end{cases}$$



$$\Rightarrow f(x_0) = f(x_0) * 1 + f(x_1) * 0 + f(x_2) * 0 + f(x_3) * 0$$

$$f(x_1) = f(x_0) * 0 + f(x_1) * 1 + f(x_2) * 0 + f(x_3) * 0$$

Örnek:

i	0	1	2	3
x_i	1	2	4	8
$f(x_i)$	1	3	7	11

Bu değerler ışığında Lagrange fonksiyonunu bulunuz ve $f(7)$ değerini hesaplayınız.

$$P_j(x) = \frac{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n (x - x_i)}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n (x_j - x_i)}$$

$$\Rightarrow P_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-2)(x-4)(x-8)}{(1-2)(1-4)(1-8)}$$

$$P_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-1)(x-4)(x-8)}{(2-1)(2-4)(2-8)}$$

$$P_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x-1)(x-2)(x-8)}{(4-1)(4-2)(4-8)}$$

$$P_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(8-1)(8-2)(8-4)}$$

$$\Rightarrow f(x) = f(x_0) * P_0(x) + f(x_1) * P_1(x) + f(x_2) * P_2(x) + f(x_3) * P_3(x)$$

$$\Rightarrow f(x) = 1 * P_0(x) + 3 * P_1(x) + 7 * P_2(x) + 11 * P_3(x)$$

$$\Rightarrow f(7) = 1 * P_0(7) + 3 * P_1(7) + 7 * P_2(7) + 11 * P_3(7)$$

$$P_0(7) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(7-2)(7-4)(7-8)}{(1-2)(1-4)(1-8)} = \frac{5*3*-1}{-1*-3*-7} = 0.71429$$

$$P_1(7) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(7-1)(7-4)(7-8)}{(2-1)(2-4)(2-8)} = \frac{6*3*-1}{1*-2*-6} = -1.5$$

$$P_2(7) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(7-1)(7-2)(7-8)}{(4-1)(4-2)(4-8)} = \frac{6*5*-1}{3*2*-4} = 1.25$$

$$P_3(7) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(7-1)(7-2)(7-4)}{(8-1)(8-2)(8-4)} = \frac{6*5*3}{7*6*4} = 0.53571$$

$$\Rightarrow f(7) = 1*0.71429 + 3*(-1.5) + 7*1.25 + 11*0.53571$$

$$\Rightarrow f(7) = 10.8571$$

ÖDEVLER

1)

i	0	1	2	3	4
x_i	2	4	6	7	9
$f(x_i)$	3	6	9	5	8

Şeklinde verilen data için Lagrange polinomunu bulunuz. $f(8)$ ve $f(1)$ değerlerini hesaplayınız.

2)

i	0	1	2	3	4	5	6	7
x_i	0.1	0.3	0.7	0.9	1.2	1.5	1.7	2.0
$f(x_i)$	0.99	0.92	0.7	0.57	0.39	0.24	0.16	0.07

Şeklinde verilen data için Lagrange polinomu oluşturunuz ve $x=1$ 'de $f(1)$ fonksiyonun değerini bulunuz.

5.3) Ekstrapolasyon

Eğer $f(x)$ fonksiyonu sadece $a \leq x \leq b$ aralığında biliniyorsa fakat $f(x)$ 'in $x < a$ veya $x > b$ 'deki değerleri isteniyorsa o zaman ekstrapolasyon gerçekleştirilir. Gregory-Newton veya Lagrange fonksiyonları kullanılır.

Interpolasyon ve ekstrapolasyon uygulanabilmesi için $f(x)$ 'in polinomsol interpolasyona uygun olması gerekmektedir.

Örnek:

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	100	25	11.111	6.25	4

=> $f(5.7)$ 'in tahmini değeri nedir?

Aralıklar eşit olduğu için ileri veya geri farklar formüllerini kullanmamız gerekmektedir. İstenilen değer 5.7 olduğu için geri farklar formülünü kullanmamız gerekmektedir.

$$f(x) = f(x_n) + \frac{(x - x_n)}{h} \nabla f_n + \frac{(x - x_n)[(x - x_n) + h]}{2! \cdot h^2} \nabla^2 f_n + \frac{(x - x_n)[(x - x_n) + h][(x - x_n) + 2h]}{3! \cdot h^3} \nabla^3 f_n + \dots$$

(Geri farklar formülü ile Gregory-Newton enterpolasyon fonksiyonu)

i	x_i	f_i	$\nabla f_i = f_i - f_{i-1}$	$\nabla^2 f_i = \nabla f_i - \nabla f_{i-1}$	$\nabla^3 f_i = \nabla^2 f_i - \nabla^2 f_{i-1}$	$\nabla^4 f_i = \nabla^3 f_i - \nabla^3 f_{i-1}$
0	1	100	-	-	-	-
1	2	25	-75	-	-	-
2	3	11.111	-13.889	61.111	-	-
3	4	6.25	-4.861	9.028	-52.083	-
4	5	4	-2.25	2.611	-6.417	45.666

$x_n = 5$ (5.7 değerine en yakın olan)

$x = 5.7$

$h = 1$

$$f(x) = f(x_n) + \frac{(x - x_n)}{h} \nabla f_n + \frac{(x - x_n)[(x - x_n) + h]}{2! \cdot h^2} \nabla^2 f_n + \frac{(x - x_n)[(x - x_n) + h][(x - x_n) + 2h]}{3! \cdot h^3} \nabla^3 f_n + \dots$$

$$x - x_n = 5.7 - 5 = 0.7$$

$$f(5.7) = f(5) + 0.7\nabla f_5 + \frac{0.7[0.7+1]}{2}\nabla^2 f_5 + \frac{0.7[1.7][2.7]}{6}\nabla^3 f_5 + \frac{0.7[1.7][2.7][3.7]}{24}\nabla^4 f_5$$

$$f(5.7) = 4 + 0.7*(-2.25) + \frac{0.7*1.7}{2} 2.611 + \frac{0.7*1.7*2.7}{6}(-6.417) + \frac{0.7*1.7*2.7*3.7}{24} 45.666$$

$$f(5.7) = 23.163$$

İnterpolasyon ve ekstrapolasyon yapmaya uygun değil.

İlk iki terimi alarak lineer enterpolasyon yaparsak,

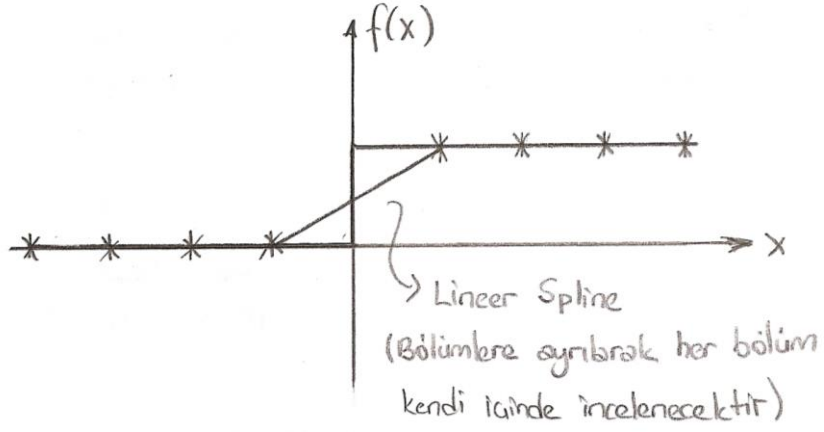
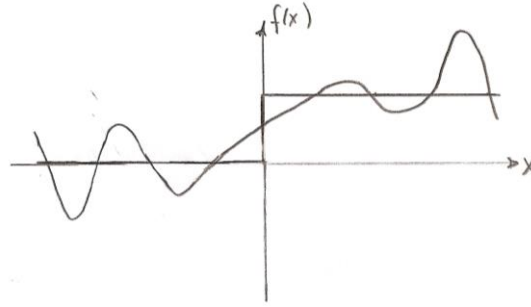
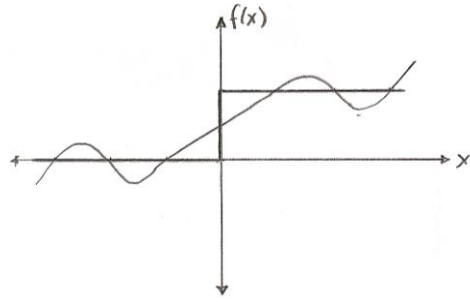
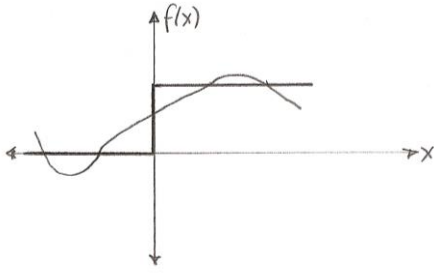
$$f(5.7) = f(5) + 0.7\nabla f_5 = 4 + 0.7*(-2.25) = 2.425$$

	Gerçek Değer $f(x) = \frac{100}{x^2}$	Lineer	2. Derece	3. Derece	4. Derece
$f(5.7)$	3.078	2.425	3.979	0.543	23.163

Böyle bir sıkıntıda en güvenli yaklaşım lineer enterpolasyon yaklaşımıdır.

5.4) Spline Interpolasyon

Diğer başlıklar altında incelemiş olduğumuz interpolasyon metotlarında $(n+1)$ noktadan n . dereceden bir eğri geçiriyor. Fakat veri değerlerinde ani değişimler olduğunda veri noktalarında yüksek mertebede polinomlar geçirmek hatalı sonuçlar verebiliyordu. Bunu önlemek için veriler daha küçük veri gruplarına ayrılarak her bir veri grubu için daha küçük mertebeden polinom çıkartması yapılabilir. Böylece küçük mertebeli polinomlardan oluşturulan çıkartma işlemlerine **spline interpolasyon** adı verilir.



Lineer Spline

Sıralı şekilde verilmiş belirli gruplar için birinci dereceden spline fonksiyonları aşağıdaki şekilde verilebilir,

$$f(x) = f(x_0) + m_0(x - x_0) \quad x_0 \leq x \leq x_1$$

$$f(x) = f(x_1) + m_1(x - x_1) \quad x_1 \leq x \leq x_2$$

.

.

.

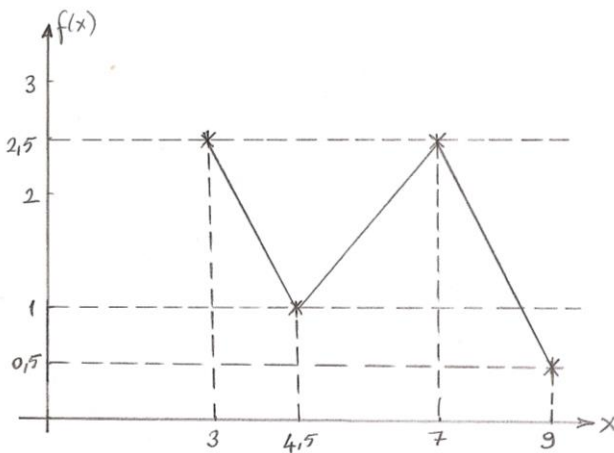
$$f(x) = f(x_{n-1}) + m_{n-1}(x - x_{n-1}) \quad x_{n-1} \leq x \leq x_n$$

Burada eğim ifadesi,

$$m_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

Örnek: Aşağıda verilen veri grubu için lineer spline uygulamasını yapınız ve $f(5)$ 'i hesaplayınız.

i	0	1	2	3
x_i	3.0	4.5	7.0	9.0
$f(x_i)$	2.5	1.0	2.5	0.5



$$f(x) = f(x_1) + m_1(x - x_1) \quad x_1 \leq x \leq x_2$$

$$f(x) = 1 + m_1(x - 4.5)$$

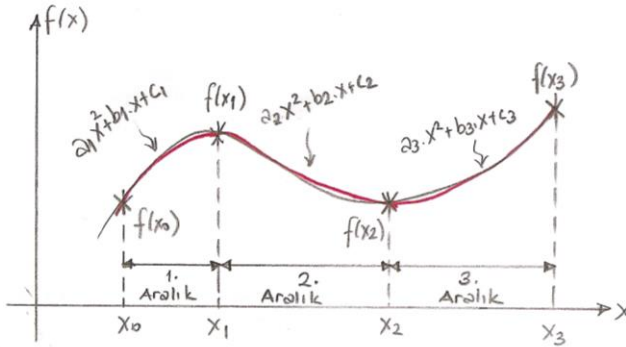
$$m_1 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{2.5 - 1}{7 - 4.5} = 0.6$$

$$f(x) = 1 + 0.6 \cdot (x - 4.5) \quad 4.5 \leq x \leq 7$$

$$\Rightarrow f(5) = 1 + 0.6 \cdot (5 - 4.5) = 1.3$$

Quadratik Spline

Yukarıdaki örnekte görüldüğü gibi düğüm (veri) noktalarında eğri süreksiz olup 1., 2., ..., n. Türevler tanımsızdır. Veri noktalarının, m. türevi sürekli yani tanımlı olması için (m+1). Dereceden polinom geçme zorunluluğu vardır. Eğer veri noktalarından 3. dereceden bir polinom geçirilirse gerek 1. gerekse 2. türevler tanımlıdır. Bu nedenle spline interpolasyonda çoğunlukla kübik spline kullanılır. Quadratik spline'da amaç veri noktalarından 2. dereceden bir eğrinin geçirilmesidir. Bunun sonucunda veri noktalarında birinci türev tanımlı olur.



$$f_i(x) = a_i \cdot x^2 + b_i \cdot x + c_i$$

$n+1$ veri noktası için toplamda n aralık oluşur.

a 'lar, b 'ler ve c 'lerden oluşan toplamda $(3n)$ bilinmeyen vardır.

O halde toplam $(3n)$ şarta (denkleme) ihtiyaç vardır. Bunlar;

i) İç veri noktalarında fonksiyon değerleri veri değerlerine eşit olmalıdır.

$$\begin{aligned} a_{i-1}.x_{i-1}^2 + b_{i-1}.x_{i-1} + c_{i-1} &= f(x_{i-1}) \\ a_i.x_{i-1}^2 + b_i.x_{i-1} + c_i &= f(x_{i-1}) \end{aligned} \quad \{i = 2, 3, \dots, n\}$$

Bu $2(n-1)$ şart (denklem) sağlar.

ii) İlk ve son fonksiyonlar, ilk ve son veri noktalarından geçmelidir.

$$\begin{aligned} a_1.x_0^2 + b_1.x_0 + c_1 &= f(x_0) \\ a_n.x_n^2 + b_n.x_n + c_n &= f(x_n) \end{aligned}$$

Bu 2 şart sağlar.

iii) İç veri noktalarında birinci türevler eşit olmalıdır.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2a.x + b \\ 2a_{i-1}.x_{i-1} + b_{i-1} &= 2a_i.x_{i-1} + b_i \end{aligned} \quad i = 2, 3, \dots, n$$

Bu $(n-1)$ tane şart sağlar.

iv) İlk veri noktasında ikinci türevin "0" olduğu **kabul** edilir.

$$2a_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 0$$

Bu durumda birinci fonksiyon ikinci dereceden bir eğri değil doğrudur.

Örnek: Önceki örnekte verilen veriler için quadratik spline çözümünü yapınız ve $f(5)$ 'i hesaplayınız.

i	0	1	2	3
x_i	3.0	4.5	7.0	9.0
$f(x_i)$	2.5	1.0	2.5	0.5

$n = 3$ ve $3n = 9$ bilinmeyen var. Bu 9 bilinmeyene bağlı olan 9 denklemi yazacak olursak,

$$20,25a_1 + 4.5b_1 + c_1 = 1 \quad (1)$$

$$20,25a_2 + 4.5b_2 + c_2 = 1 \quad (2)$$

$$49a_2 + 7b_2 + c_2 = 2.5 \quad (3)$$

$$49a_3 + 7b_3 + c_3 = 2.5 \quad (4)$$

$$9a_1 + 3b_1 + c_1 = 2.5 \quad (5)$$

$$81a_3 + 9b_3 + c_3 = 0.5 \quad (6)$$

$$9a_1 + b_1 = 9a_2 + b_2 \quad (7)$$

$$14a_2 + b_2 = 14a_3 + b_3 \quad (8)$$

$$a_1 = 0 \quad (9)$$

Bu denklemleri gauss yok etme metodu ile çözümlersek denklem aşağıdaki hali almaktadır,

$$\begin{array}{ccccccccc}
 b_1 & c_1 & a_2 & b_2 & c_2 & a_3 & b_3 & c_3 & \\
 \left[\begin{array}{ccccccccc}
 4.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 20.25 & 4.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 49 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 49 & 7 & 1 & 0 \\
 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 81 & 9 & 1 & 0 \\
 1 & 0 & -9 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 14 & 1 & 0 & -14 & -1 & 0 & 0
 \end{array} \right]
 \begin{array}{c}
 b_1 \\
 c_1 \\
 a_2 \\
 b_2 \\
 c_2 \\
 a_3 \\
 b_3 \\
 c_3
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 1 \\
 1 \\
 2.5 \\
 2.5 \\
 2.5 \\
 0.5 \\
 0 \\
 0
 \end{array}$$

Eğer çözüm yapılırsa,

$$a_1 = 0$$

$$b_1 = -1$$

$$c_1 = 5.5$$

$$a_2 = 0.64$$

$$b_2 = -6.76$$

$$c_2 = 18.46$$

$$a_3 = -1.6$$

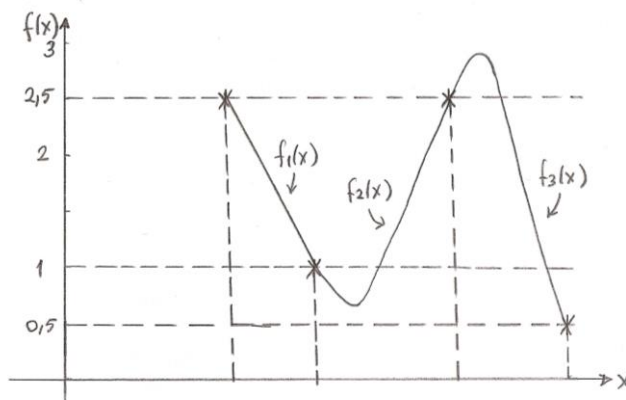
$$b_3 = 24.6$$

$$c_3 = -91.3$$

$$\Rightarrow f_1(x) = -x + 5.5 \quad 3 \leq x \leq 4.5$$

$$f_2(x) = 0.64x^2 - 6.76x + 18.46 \quad 4.5 \leq x \leq 7$$

$$f_3(x) = -1.6x^2 + 24.6x - 91.3 \quad 7 \leq x \leq 9$$



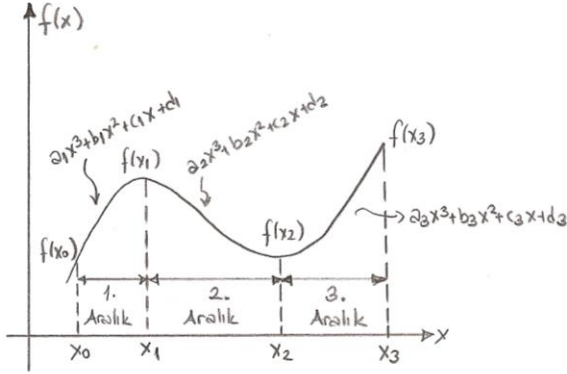
$$\begin{aligned}
 x = 5 & \Rightarrow f_2(5) = 0.64 \cdot 25 - 6.76 \cdot 5 + 18.46 \\
 & f_2(5) = 0.66
 \end{aligned}$$

Quadratik spline çözümünde iki önemli eksik vardır;

- i)** İlk iki veri noktası bir doğru olarak birleştirilir.
- ii)** Gerek ilk gerekse son aralıkta bulunan fonksiyonlar aşırı derece salınım göstermektedir.

Bu zayıf yönlerine çare kübik spline'dır. Kübik spline'da bu eksiklikler gözlenmemektedir.

Kübik Spline



$$\Rightarrow f_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$$

$n+1$ veri noktası için,

n tane aralık vardır.

$4n$ tane bilinmeyen ortaya çıkar (a, b, c, d 'ler)

Şartlar:

- 1) Fonksiyon değerleri iç veri noktalarında, veri değerine eşit olmalıdır.
 $2(n-1)$ denklem sağlar.
- 2) İlk fonksiyon ilk veri noktasından, son fonksiyon son veri noktasından geçmelidir.
2 şart (denklem) sağlar.
- 3) İç veri noktalarında fonksiyonların birinci türevlerinin değeri eşit olmalıdır.
 $(n-1)$ tane şart sağlar.
- 4) İç veri noktalarında fonksiyonların ikinci türevlerinin değeri eşit olmalıdır.
 $(n-1)$ tane şart sağlar.

- 5) İlk ve son veri noktalarından geçen fonksiyonların ikinci türevleri "0" olmalıdır.
(Zorlama Şart)
2 şart (denklem) sağlar.

Bu maddelerin toplamında 4n şart (denklem) elde edilir ve bu şekilde çözüm yapılır.

Bu işlemler sırasında denklem (şart) sayısı çok fazla olduğundan her bölge için bir denklem takımı geliştirilerek genelleştirilmiştir;

$$f_i(x) = \frac{f''(x_{i-1})}{6(x_i - x_{i-1})}(x_i - x)^3 + \frac{f''(x_i)}{6(x_i - x_{i-1})}(x - x_{i-1})^3 + \left[\frac{f(x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})} - \frac{f''(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})}{6} \right](x_i - x) + \left[\frac{f(x_i)}{(x_i - x_{i-1})} - \frac{f''(x_i)(x_i - x_{i-1})}{6} \right](x - x_{i-1}) \quad , \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (A)$$

$$(x_i - x_{i-1})f''(x_{i-1}) + 2(x_{i+1} - x_{i-1})f''(x_i) + (x_{i+1} - x_i)f''(x_{i+1}) = \frac{6}{(x_{i+1} - x_i)}[f(x_{i+1}) - f(x_i)] + \frac{6}{(x_i - x_{i-1})}[f(x_{i-1}) - f(x_i)] \quad , \quad i = 1, 2, 3, \dots, n-1 \quad (B)$$

İlk olarak B denklemini çözülmektedir. Buradan elde edilen f'' değerlerini A denkleminde yerine koyarak çözüm yapılabilir.

Örnek: Aşağıdaki verileri kullanarak kübik spline eğrilerini bulunuz ve $x = 5$ 'te $f(5)$ 'in değerini hesaplayınız.

i	0	1	2	3
x_i	3.0	4.5	7.0	9.0
$f(x_i)$	2.5	1.0	2.5	0.5

=> B denkleminde $i=1$ dersek,

$$(x_1 - x_0)f''(x_0) + 2(x_2 - x_0)f''(x_1) + (x_2 - x_1)f''(x_2) = \frac{6}{(x_2 - x_1)}[f(x_2) - f(x_1)] + \frac{6}{(x_1 - x_0)}[f(x_0) - f(x_1)]$$

$$(4.5 - 3)f''(3) + 2(7 - 3)f''(4.5) + (7 - 4.5)f''(7) = \frac{6}{(7 - 4.5)}[f(7) - f(4.5)] + \frac{6}{(4.5 - 3)}[f(3) - f(4.5)]$$

$i=2$ dersek,

$$(7 - 4.5)f''(4.5) + 2(9 - 4.5)f''(7) + (9 - 7)f''(9) = \frac{6}{(9 - 7)}[f(9) - f(7)] + \frac{6}{(7 - 4.5)}[f(4.5) - f(7)]$$

$f''(3)$ ve $f''(9)$ değerleri 5 No'lu kabul gereği "0" değerine eşittir. Bu durumda yukarıdaki denklemler aşağıdaki şekli alır,

$$8.f''(4.5) + 2.5f''(7) = 9.6 \quad , i=1 \text{ ise}$$

$$2.5.f''(4.5) + 9.f''(7) = -9.6 \quad , i=2 \text{ ise}$$

$$\Rightarrow f''(4.5) = 1.67909$$

$$f''(7) = -1.53308$$

1. Aralık için;

$i=1$ konularak A denklemini çözülürse;

$$f_1(x) = \frac{f''(3)}{6(4.5-3)}(4.5-x)^3 + \frac{f''(4.5)}{6(4.5-3)}(x-3)^3 + \left[\frac{2.5}{4.5-3} - \frac{f''(3)(4.5-3)}{6} \right](4.5-x) + \left[\frac{1}{4.5-3} - \frac{f''(4.5)(4.5-3)}{6} \right](x-3) \quad , i=1$$

$$f_1(x) = 1.86566(x-3)^3 + 1.66667(4.5-x) + 0.246894(x-3)$$

2. Aralık için;

i=2 konularak A denklemi çözülürse;

$$f_2(x) = 0.111939(7-x)^3 - 0.102205(x-4.5)^3 - 0.299621(7-x) + 1.638783(x-4.5) \quad , i=2$$

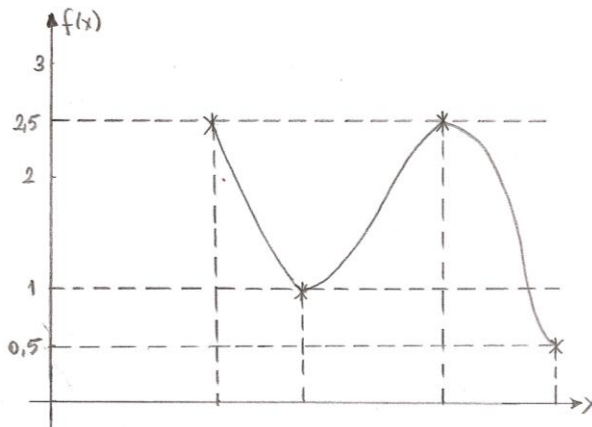
3. Aralık için;

i=3 konularak A denklemi çözülürse;

$$f_3(x) = -0.127757(9-x)^3 + 1.761027(9-x) + 0.25(x-7) \quad , i=3$$

$x=5$ noktası ikinci aralık için geçerlidir. Bu durumda,

$$f_2(5) = 1.102886 \text{ bulunmaktadır.}$$



Kübik Enterpolasyon

ÖDEV

1) Aşağıda verilen veriler için quadratik ve kübik spline eğrilerini oluşturunuz. $f(0.47)$ derini bulunuz.

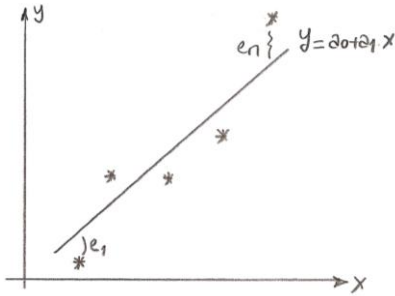
i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	0	0.1	0.7	0.9	1.2	2.8	2.1	2.4	2.7
f_i	3.0	4.0	6.5	7.2	4.3	3.2	6.0	7.1	8.3

2) Kübik spline ile eğri çakıştıran bir bilgisayar programı yazınız.

EN KÜÇÜK KARELER İLE REGRASYON (Least Square Regresion)

Eğer veriler hata içeriyorsa veya hata içerdiği düşünülüyorsa bütün veri noktalarından geçecek eğri yerine, bu verileri yaklaşık olarak temsil ettiği düşünülen ve bütün veri noktalarından geçmeyen daha düşük mertebeden eğri çakıştırmaya regrasyon denir.

1. Lineer Regrasyon



$$y = a_0 + a_1 x + e \quad , \quad e ; \text{ hata değeri}$$

$$e = y - a_0 - a_1 x$$

$$e_i = y_i - a_0 - a_1 x_i \quad (\text{Fonksiyonu oluşturan her nokta ile gerçek değer arasındaki fark o nokta için hata değerini verir})$$

En Uygun Eğri İçin Kriter

En uygun eğri hataların karesi toplamını minimize eden eğri olarak tanımlanmaktadır.

x_i	y_i
x_1	y_1
x_2	y_2
$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$
x_n	y_n

$$S_r = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad -2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1 x_i) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad -2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1 x_i) x_i = 0 \quad (2)$$

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n a_0 - \sum_{i=1}^n a_1 x_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^n y_i = n \cdot a_0 + \sum_{i=1}^n a_1 x_i \quad (3)$$

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i - \sum_{i=1}^n a_0 \cdot x_i - \sum_{i=1}^n a_1 x_i^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i = \sum_{i=1}^n x_i \cdot a_0 + \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot a_1 \quad (4)$$

Örnek: Aşağıdaki veriler için en uygun doğruyu bulunuz.

	i	x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	x_i^2	y (sonuç)
$n = 6$	1	0.1	0.61	0.061	0.01	0.46262
	2	0.4	0.92	0.368	0.16	0.99198
	3	0.5	0.99	0.495	0.25	1.16844
	4	0.7	1.52	1.064	0.49	1.52135
	5	0.7	1.47	1.029	0.49	1.52135
	6	0.9	2.03	1.827	0.81	1.87426
	Σ	3.3	7.54	4.844	2.21	

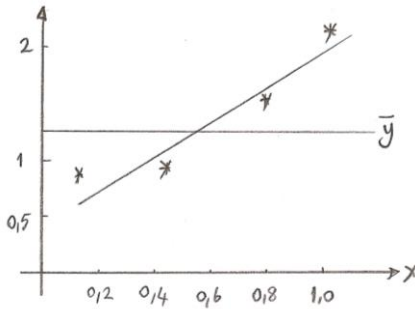
3 nolu denklem gereği, $6a_0 + 3.3a_1 = 7.54$

4 nolu denklem gereği, $3.3a_0 + 2.21a_1 = 4.844$

$a_1 = 1.7645$ ve $a_0 = 0.2862$

$y = a_0 + a_1x$

$\Rightarrow y = 0.2862 + 1.7645x$



$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{7.54}{6} = 1.25667$$

Lineer Regrasyonda Hata Miktarının Belirlenmesi:

a) Regrasyon doğrusu standart sapması

$$S_{y/x} = \sqrt{\frac{S_r}{n-2}} \quad S_{y/x} : \text{Standart sapma}$$
$$n-2 : \text{Serbestlik derecesi}$$

b) Belirleme Katsayısı (coefficient of determination)

$$r^2 = \frac{S_t - S_r}{S_t}$$
$$S_r = \sum_{i=1}^n e_i^2$$
$$S_t = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum o_i^2$$

S_t , bağımlı değişken yani y 'nin ortalama $\bar{y}$ değerinden farkının karelerinin toplamıdır.

Burada r =korelasyon katsayısı (colleration coefficient) olarak tanımlanır.

Mükemmel eğri çıkması durumunda $S_r = 0$ olur.

$$r^2 = r = 1 \quad r^2 = \frac{S_t - 0}{S_t}$$

Eğer $S_t = S_r$ ise $r^2 = r = 0$, eğri herhangi bir gelişme sağlamamış demektir.

Az önce verdiğimiz örneğe geri dönerek hata fonksiyonlarını verilen formüller vasıtası ile hesaplırsak,

	$(y_i - a_0 - a_1 x_i)^2 = e_i^2$	$o_i^2 = (y_i - \bar{y})^2$
	0.02172	0.4181
	0.00518	0.1133
	0.03183	0.07111
	0.000001822	0.06931
	0.0026368	0.0455
	0.02425	0.598
Σ	0.08562	1.3153

$$S_r = \sum e_i^2 = 0.08562 \quad \text{ve} \quad S_t = \sum o_i^2 = 1.3153$$

$$S_{y/x} = \sqrt{\frac{S_r}{n-2}} = \sqrt{\frac{0.08562}{6-2}} = 0.14630 \quad (\text{standart hata})$$

$$r^2 = \frac{S_t - S_r}{S_t} = \frac{1.3153 - 0.08562}{1.3153} = 0.935$$

$$\Rightarrow \quad r = 0.9669$$

2. Polinomsal Regrasyon

Aynı verilerin düz bir doğrudan daha ziyade polinomsal olarak temsil edilmesi daha uygun olabilir. Bu durumda en küçük kareler metodu m. derece polinom için benzer şekilde uygulanabilir.

$$y = a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + + a_m.x^m + e$$

$$e_i = y_i - a_0 - a_1.x_i - a_2.x_i^2 - - a_m.x_i^m$$

$$S_r = \sum e_i^2 = \sum (y_i - a_0 - a_1.x_i - a_2.x_i^2 - - a_m.x_i^m)^2$$

$$(1) \quad \frac{\partial S_r}{\partial a_0} = -2 \sum (y_i - a_0 - a_1.x_i - a_2.x_i^2 - - a_m.x_i^m) = 0$$

$$(2) \quad \frac{\partial S_r}{\partial a_1} = -2 \sum (y_i - a_0 - a_1.x_i - a_2.x_i^2 - - a_m.x_i^m) x_i = 0$$

.

.

.

$$(m+1) \quad \frac{\partial S_r}{\partial a_m} = -2 \sum (y_i - a_0 - a_1.x_i - a_2.x_i^2 - - a_m.x_i^m) x_i^m = 0$$

$$1) \quad a_0 n + a_1 \sum x_i + a_2 \sum x_i^2 + + a_m \sum x_i^m = \sum y_i$$

$$2) \quad a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 + a_2 \sum x_i^3 + + a_m \sum x_i^{m+1} = \sum x_i y_i$$

.

.

.

$$m+1) \quad a_0 \sum x_i^m + a_1 \sum x_i^{m+1} + a_2 \sum x_i^{m+2} + + a_m \sum x_i^{2m} = \sum x_i^m y_i$$

Standart sapma,

$$S_{y/x} = \sqrt{\frac{S_r}{n - (m + 1)}}$$

Belirleme Katsayısı (coefficient of determination),

$$r^2 = \frac{S_t - S_r}{S_t}$$

Örnek: Bir önceki örnekte verilen değerler için 2. dereceden regrasyon eğrisini hesaplayınız?

	i	x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	x_i^2
$n = 6$	1	0.1	0.61	0.061	0.01
	2	0.4	0.92	0.368	0.16
	3	0.5	0.99	0.495	0.25
	4	0.7	1.52	1.064	0.49
	5	0.7	1.47	1.029	0.49
	6	0.9	2.03	1.827	0.81
	$\sum$	3.3	7.54	4.844	2.21

$$y = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + e$$

$$\Rightarrow e_i = y - a_0 - a_1 \cdot x_i - a_2 \cdot x_i^2$$

$$S_r = \sum e_i^2 = \sum (y - a_0 - a_1 \cdot x_i - a_2 \cdot x_i^2)^2$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad -2 \sum (y - a_0 - a_1 \cdot x_i - a_2 \cdot x_i^2) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad -2 \sum (y - a_0 - a_1 \cdot x_i - a_2 \cdot x_i^2) x_i = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad -2 \sum (y - a_0 - a_1 \cdot x_i - a_2 \cdot x_i^2) x_i^2 = 0 \quad (3)$$

$$1) \quad na_0 + a_1 \sum x_i + a_2 \sum x_i^2 = \sum y_i \quad \Rightarrow \quad 6a_0 + 3.3a_1 + 2.21a_2 = 7.54$$

$$2) \quad a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 + a_2 \sum x_i^3 = \sum x_i y_i \quad \Rightarrow \quad 3.3a_0 + 2.21a_1 + 1.605a_2 = 4.844$$

$$3) \quad a_0 \sum x_i^2 + a_1 \sum x_i^3 + a_2 \sum x_i^4 = \sum x_i^2 y_i \quad \Rightarrow \quad 2.21a_0 + 1.605a_1 + 1.2245a_2 = 3.5102$$

$$a_0 = 0.587114$$

$$a_1 = 0.059102$$

$$a_2 = 1.729537$$

$$y = 0.587114 + 0.059102 \cdot x + 1.729537 \cdot x^2$$

2. Dereceden regrasyon polinomu

$$y = 0.2862 + 1.7645 x$$

Lineer regrasyon polinomu

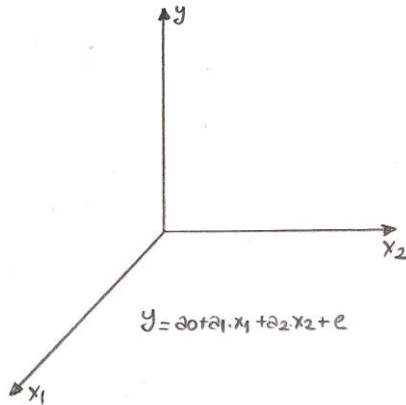
NOT: Korelasyon katsayısı ve belirleme katsayısını bularak r 'yi hesapla ve lineer'deki sonuç ile karşılaştır. Muhtemelen burada $r=0.98$ olacaktır.

3. Çoklu Linear Regrasyon (Multiple Linear Regression)

Eğer birden fazla değişken varsa. (2 tane değişken olduğunu varsayarsak)

x_{1i}	x_{2i}	y_i
.	.	.
.	.	.
.	.	.

Bu durumda en iyi eğri değil, verileri en iyi şekilde temsil eden düzlem hesaplanacaktır.



$$e_i = y_i - a_0 - a_1 x_{1i} - a_2 x_{2i}$$

$$S_r = \sum e_i^2 = \sum (y_i - a_0 - a_1 x_{1i} - a_2 x_{2i})^2$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_0} = 0 = -2 \sum (y_i - a_0 - a_1 x_{1i} - a_2 x_{2i}) \Rightarrow n \cdot a_0 + \sum x_{1i} a_1 + \sum x_{2i} a_2 = \sum y_i$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_1} = 0 = -2 \sum (y_i - a_0 - a_1 x_{1i} - a_2 x_{2i}) \cdot x_{1i} \Rightarrow \sum x_{1i} a_0 + \sum x_{1i}^2 a_1 + \sum x_{1i} \cdot x_{2i} \cdot a_2 = \sum x_{1i} \cdot y_i$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_2} = 0 = -2 \sum (y_i - a_0 - a_1 x_{1i} - a_2 x_{2i}) \cdot x_{2i} \Rightarrow \sum x_{2i} a_0 + \sum x_{1i} x_{2i} a_1 + \sum x_{2i}^2 \cdot a_2 = \sum x_{2i} \cdot y_i$$

ÖDEV

1) En küçük kareler regresyon metodunu kullanarak, aşağıda verilen veri seti için, birinci (lineer), ikinci ve üçüncü derece polinomları bulunuz. Her bir durum için kolerasyon katsayısını hesaplayarak karşılaştırınız.

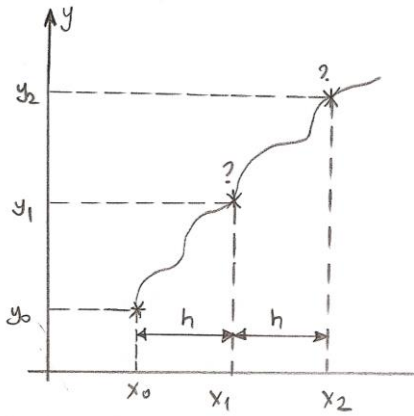
x_i	0	0.1	0.2	0.4	0.5	0.7	0.8	1.0
y_i	0	1.3	2.0	2.4	2.8	2.7	2.4	2.1

2) En küçük kareler regresyon metodunu kullanarak, 3. derece polinomsal eğri çakıştıran bir bilgisayar programı yazınız ve yukarıdaki verilere uygulayınız.

6) ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

6.1.1) İlk Değer Problemlerinin Nümerik Çözümü

$$y' = f(x, y) \text{ ve } y(x_0) = y_0$$



$$y_0 = y(x_0)$$

$$y_1 = y(x_0 + h)$$

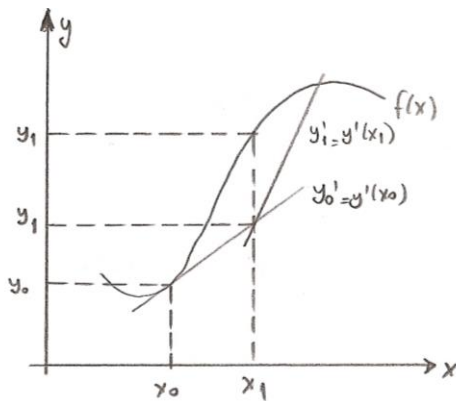
$$y_2 = y(x_0 + 2h)$$

.

.

.

$$y_n = y(x_0 + nh)$$



$$y_1 = y_0 + y'(x_0)(x_1 - x_0)$$

$$y_2 = y_1 + y'(x_1)(x_2 - x_1)$$

·
·
·

$$y_{n+1} = y_n + y'(x_n)(x_{n+1} - x_n)$$

$$\Rightarrow y_{n+1} = y_n + y'(x_n)h$$

$$y'(x_n) = f(x_n, y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n) + O(h^2)$$

Bu metoda Euler metodu veya tangent line (eğim doğrusu) metodu adı verilir.

6.1.2) Üç Terim Taylor Serisi Metodu

$y' = f(x, y)$ diferansiyel denkleminde $y(x_0) = y_0$ ilk değeri biliniyorken $y(x+h)$ 'i Taylor serisine göre açarsak,

$$y(x+h) = y(x) + y'(x)h + y''(x)\frac{h^2}{2!} + y'''(x)\frac{h^3}{3!} + \dots$$

Taylor serisinde ilk üç terimi alır ve $y'(x)$ ve $y''(x)$ 'i zincir kuralı ile bulursak,

$$y'(x) = f(x, y) = f[x, y(x)]$$

$$y''(x) = \frac{\partial f[x, y(x)]}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial f[x, y(x)]}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow y''(x) = \frac{\partial f[x, y(x)]}{\partial x} + \frac{\partial f[x, y(x)]}{\partial y} f[x, y(x)]$$

$$y(x+h) = y(x) + h \cdot f[x, y(x)] + \frac{h^2}{2} \left\{ \frac{\partial f[x, y(x)]}{\partial x} + \frac{\partial f[x, y(x)]}{\partial y} f[x, y(x)] \right\} + O(h^3)$$

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f[x_n, y_n] + \frac{h^2}{2} \left\{ \frac{\partial f[x_n, y_n]}{\partial x} + \frac{\partial f[x_n, y_n]}{\partial y} f[x_n, y_n] \right\} + O(h^3)$$

Örnek: $y' = x + y$ ve $y(1) = -2$ şeklinde verilen diferansiyel denklemini nümerik olarak çözünüz ve çözümü analitik çözüm sonuçları ile karşılaştırınız.

Analitik çözüm, $y = -x - 1$

$$f(x, y) = x + y, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 1$$

$$\Rightarrow y_{n+1} = y_n + h \cdot f[x_n, y_n] + \frac{h^2}{2} \{1 + 1(x_n + y_n)\} + O(h^3)$$

$h = 0.1$ seçilirse,

$$x_n = x_0 + nh \quad \Rightarrow \quad x_n = 1 + 0.1 \cdot n$$

n	x_n	y_n (Analitik)	y_n (Nümerik)
0	1	-2.0	-2.0
1	1.1	-2.1	-2.1
2	1.2	-2.2	-2.2
3	1.3	-2.3	-2.3
.	.	.	.
.	.	.	.
10	1.8	-2.8	-2.8

$$\Rightarrow y_{1,1} = y_1 + 0.1(1-2) + \frac{(0.1)^2}{2} \{1 + 1(1-2)\} + O(h^3)$$

$$y_{1,1} = -2.0 - 0.1 = -2.1$$

Örnek: $y' = y \cdot \sin(x^2) - \cos(x^2) + 2y$, $y(3) = \sqrt{2}$

$$f(x, y) = y \cdot \sin(x^2) - \cos(x^2) + 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \cdot \cos(x^2) + 2x \cdot \sin(x^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sin(x^2) + 2$$

$$y_{n+1} = y_n + h(y \cdot \sin(x^2) - \cos(x^2) + 2y)_n + \frac{h^2}{2} \{2xy \cdot \cos(x^2) + 2x \cdot \sin(x^2) + (\sin(x^2) + 2)(y \cdot \sin(x^2) - \cos(x^2) + 2y)\}_n + O(h^3)$$

$h = 0.1$ seçilirse,

$$x_n = x_0 + nh \quad \Rightarrow \quad x_n = 3 + 0.1 \cdot n$$

n	x_n	y_n
0	3.0	$\sqrt{2} = 1.4142$
1	3.1	1.7138
2	3.2	1.9156
3	3.3	1.9787
4	3.4	1.9512
5	3.5	1.9238
6	3.6	2.0176
.	.	.
.	.	.
.	.	.
10	4	4.0834

6.1.3) Runge-Kutta Metodu

$$y'(x)=f(x,y) \text{ ve } y(x_0)=y_0$$

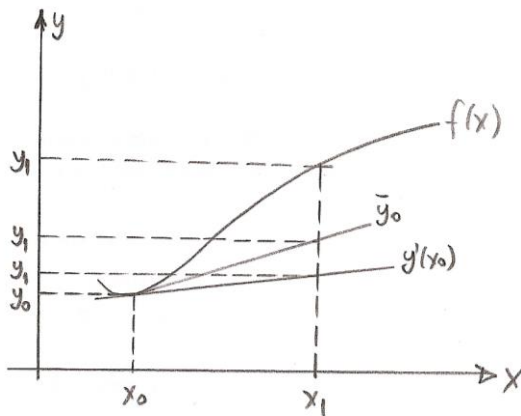
$$A_n = h \cdot f(x_n, y_n)$$

$$B_n = h.f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}A_n\right)$$

$$C_n = h.f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}B_n\right)$$

$$D_n = h.f(x_n + h, y_n + C_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}[A_n + 2.B_n + 2.C_n + D_n] + O(h^5)$$



$$y_{n+1} = y_n + h.f(x_n, y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + h.y'(x_n)$$

Çok güvenilir bir yöntemdir. Hata derecesi son derece düşük ve türev alma sıkıntısı yoktur.

Örnek: $y' = x^2 - \sin(y^2)$ ve $y(1) = 4.7$ ilk şartı ile verilen diferansiyel denklemini çözünüz.

$h = 0.1$ seçilirse,

$$f(x, y) = x^2 - \sin(y^2) \quad x_0 = 1 \quad y_0 = 4.7$$

$$A_0 = 0.1 \{f(x_0, y_0)\} = 0.1 * [1^2 - \sin(4.7^2)] = 0.1099$$

$$B_0 = 0.1 \left\{ \left(1 + \frac{0.1}{2}\right)^2 - \sin\left(4.7 + \frac{0.1099}{2}\right)^2 \right\} = 0.1682$$

$$C_0 = 0.1 \left\{ \left(1 + \frac{0.1}{2}\right)^2 - \sin\left(4.7 + \frac{0.1682}{2}\right)^2 \right\} = 0.1884$$

$$D_0 = 0.1 \{ (1 + 0.1)^2 - \sin(4.7 + 0.1884)^2 \} = 0.2115$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6} [A_0 + 2.B_0 + 2.C_0 + D_0] + O(h^5) = 4.7 + \frac{1}{6} [0.1099 + 2 * 0.1682 + 2 * 0.1884 + 0.2115]$$

$$\Rightarrow y_1 = 4.8731$$

$$x_n = x_0 + nh$$

$$x_n = 1 + 0.1 * n$$

$$x = 1.1, y_1 = 4.8731$$

n	x_n	y_n
0	1.0	4.7 (verilmiş)
1	1.1	4.8731
2	1.2	5.0426
3	1.3	5.1313
4	1.4	5.2168
5	1.5	5.4039
6	1.6	5.6797
7	1.7	5.8708

6.2) İKİNCİ DERECEDEKİ İLK DEĞER PROBLEMLERİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

$$y'' = f(x, y, y') \quad y(x_0) = A \quad y'(x_0) = B$$

6.2.1) Taylor Yaklaşımı

$y(x)$ 'i $x+h$ 'da Taylor'a açarsak,

$$y(x+h) = y(x) + y'(x)h + y''(x)\frac{h^2}{2!} + y'''(x)\frac{h^3}{3!} + \dots$$

Ve

$$y'(x+h) = y'(x) + y''(x)h + y'''(x)\frac{h^2}{2!} + y^{(4)}(x)\frac{h^3}{3!} + \dots$$

$$y(x+h) \cong y(x) + h.y'(x) + \frac{h^2}{2!} y''(x) + O(h^3)$$

$$y'(x+h) \cong y'(x) + h.y''(x) + O(h^2)$$

$$\Rightarrow y''_j = f(x_j, y_j, y'_j)$$

$$x_{j+1} = x_0 + (j+1)h$$

$$y_{j+1} = y_j + h.y'_j + \frac{h^2}{2!} y''_j + O(h^3)$$

$$y'_{j+1} = y'_j + h.y''_j + O(h^2)$$

Önce $j=0$ alıp y''_0 , y_1 ve y'_1 'yü hesaplayacağız. Sonra $j=1$ alıp y''_1 , y_2 ve y'_2 'yü hesaplayıp iterasyon işlemlerine devam edersek $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ 'i elde edeceğiz.

Örnek: $y'' = x^2 - \cos(y) + 2.e^{-x}.y'$ diferansiyel denkleminde $y(1) = -1$ ve $y'(1) = 3$ ilk şartları vardır. $h = 0.1$

$$x_0 = 1 \quad y_0 = -1 \quad y'_0 = 3 \quad f(x, y, y') = x^2 - \cos(y) + 2.e^{-x}.y'$$

$h = 0.1$ seçilirse,

Adım 1: $j = 0$

$$y''_0 = 1^2 - \cos(-1) + 2.e^{-1}.3 = 2.666974$$

$$x_1 = x_0 + 0.1 * 1 = 1.1$$

$$y_1 = -1 + 0.1 * 3 + \frac{(0.1)^2}{2} 2.666974 = -0.686665$$

$$y'_1 = 3 + 0.1 * 2.666974 = 3.2666974$$

Adım 2: $j = 1$

$$y''_1 = 1.1^2 - \cos(-0.686665) + 2.e^{-1.1} * (3.266974) = 2.611405$$

$$x_2 = x_1 + 0.1 * 1 = 1.2$$

$$y_2 = -0.686665 + 0.1 * 3.2666974 + \frac{(0.1)^2}{2} 2.611405 = -0.346938$$

$$y'_2 = 3.2666974 + 0.1 * 2.611405 = 3.527838$$

Adım 3: $j = 2$

$$y_3 = y(1.3) = 0.018939$$

6.2.2) Runge-Kutta Metodu

$$y'' = f_2(x, y, y') \quad y(x_0) = y_0 \quad y'(x_0) = P_0$$

$$y' = p = f_1(x, y, p) \quad \Rightarrow \quad y(x_0) = y_0$$

$$y'' = p' = f_2(x, y, p) \quad \Rightarrow \quad p(x_0) = P_0$$

Eğer $y' = p$ ve $p' = f_2(x, y, p)$ dersek
 $p' = f_2(x, y, p)$ elde edilir.

$$k_1 = h \cdot f_1(x_n, y_n, p_n)$$

$$l_1 = h \cdot f_2(x_n, y_n, p_n)$$

$$k_2 = h \cdot f_1\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1, p_n + \frac{1}{2}l_1\right)$$

$$l_2 = h \cdot f_2\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1, p_n + \frac{1}{2}l_1\right)$$

$$k_3 = h \cdot f_1\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2, p_n + \frac{1}{2}l_2\right)$$

$$l_3 = h \cdot f_2\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2, p_n + \frac{1}{2}l_2\right)$$

$$k_4 = h \cdot f_1(x_n + h, y_n + k_3, p_n + l_3)$$

$$l_4 = h \cdot f_2(x_n + h, y_n + k_3, p_n + l_3)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$p_{n+1} = p_n + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)$$

Örnek: $x^2.y'' + 5.x.y' + 20.y = 0$ diferansiyel denkleminde $y(1) = 0$ ve $y'(1) = 2$ ise $y(1.2) = ?$

$$\Rightarrow y'' = -\frac{5.y'}{x} - \frac{20}{x^2}y$$

$y' = p = f_1(x, y, p)$ olarak kabul edilirse,

$$p' = -\frac{5}{x}p - \frac{20}{x^2}y = f_2(x, y, p)$$

$$y_0 = y(1) = 0$$

$$p_0 = p(1) = 2$$

$h = 0.2$ seçilirse,

$$k_1 = 0.2 * 2 = 0.4$$

$$l_1 = 0.2 * \left(-\frac{5}{1} 2 - \frac{20}{1^2} 0 \right) = -2$$

$$k_2 = 0.2 \left\{ p_0 + \frac{1}{2} l_1 \right\} = 0.2 \left\{ 2 + \frac{1}{2} (-2) \right\} = 0.2$$

$$l_2 = 0.2 \left\{ \frac{-5}{1 + \frac{0.2}{2}} \left(2 + \frac{-2}{2} \right) - \frac{20}{\left(1 + \frac{0.2}{2} \right)^2} \left(0 + \frac{0.4}{2} \right) \right\} = -1.570$$

$$k_3 = 0.2 \left\{ 2 + \frac{1}{2} (-1.57) \right\} = 0.243$$

$$l_3 = 0.2 \left\{ \frac{-5}{1 + \frac{0.2}{2}} \left(2 + \frac{-1.57}{2} \right) - \frac{20}{\left(1 + \frac{0.2}{2} \right)^2} \left(0 + \frac{0.2}{2} \right) \right\} = -1.435$$

$$k_4 = 0.2 \{ 2 + (-1.435) \} = 0.113$$

$$l_4 = 0.2 \left\{ \frac{-5}{1+0.2} (2-1.435) - \frac{20}{(1+0.2)^2} (0+0.243) \right\} = -1.146$$

$$y_1 = y(1.2) = 0 + \frac{1}{6} [0.4 + 2 * 0.2 + 2 * 0.243 + 0.113]$$

$$y_1 = y(1.2) = 0.233$$

Analitik Çözüm

$$y = \frac{1}{2} x^{-2} \sin [4. \ln(x)]$$

$$y(1.2) = 0.23137$$

6.2.3) Runge Kutta – Nystrom Metodu

$$y'' = f(x, y, y') \quad y(x_0) = K \quad y'(x_0) = L$$

$$A_j = \frac{1}{2} h. f(x_j, y_j, y'_j)$$

$$B_j = \frac{1}{2} h. f \left[x_j + \frac{1}{2} h, y_j + \frac{1}{2} h \left(y'_j + \frac{1}{2} A_j \right), y'_j + A_j \right]$$

$$C_j = \frac{1}{2} h. f \left[x_j + \frac{1}{2} h, y_j + \frac{1}{2} h \left(y'_j + \frac{1}{2} A_j \right), y'_j + B_j \right]$$

$$D_j = \frac{1}{2} h. f [x_j + h, y_j + h(y'_j + C_j), y'_j + 2.C_j]$$

$$y_{j+1} = y_j + h \left[y'_j + \frac{1}{3} (A_j + B_j + C_j) \right]$$

$$y'_{j+1} = y'_j + \frac{1}{3} [A_j + 2.B_j + 2.C_j + D_j]$$

Sadece 2. dereceden diferansiyel denklem için olduğundan kullanım alanı sınırlıdır.

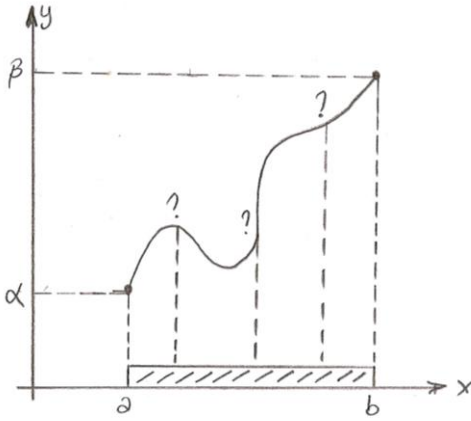
ÖDEV

1) $y'' = x - 4.y^2 + 3.e^{-y'}$ diferansiyel denkleminde $y(2)=3$ ve $y'(2)=4$ başlangıç koşullarında $h=0.1$ olarak kabul edildiğinde $y(5)$ değerini hesaplayınız.

2) $y'' = x^2 - \cos(y) + 2.e^{-x}.y'$ diferansiyel denkleminde $y(1)=1$ ve $y'(1)=3$ başlangıç koşullarında $h=0.1$ olarak kabul edildiğinde $y(5)$ değerini hesaplayınız.

6.3) İkinci Dereceden Sınır Değer Problemlerinin Nümerik Çözümü

$$y'' = f(x, y, y') \quad y(a) = \alpha \quad y(b) = \beta$$



$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$x_j = x_0 + j.h$$

$$x_j = a + j.h$$

$$y''_j = f(x_j, y_j, y'_j)$$

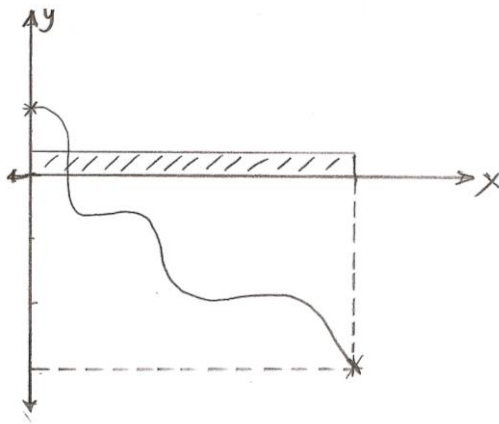
$$y'_j = \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2.h} + O(h^2)$$

$$y''_j = \frac{y_{j-1} - 2.y_j + y_{j+1}}{h^2} + O(h^2)$$

Eğer sonlu fark formüllerini diferansiyel denklemde yerine koyar ve düzenlersek, sonra $j=1,2,3,\dots,n-1$ konulursa $(n-1)$ tane cebri denklem elde ederiz. Sınır şartları $y(a) = \alpha$

ve $y(b) = \beta'$ 'yı uygun şekilde bu $(n-1)$ denklemde yerine koyarsak $(n-1)$ denklem takımı elde ederiz. $y_1, y_2, y_3, \dots, y_{n-1}$ olmak üzere $(n-1)$ bilinmeyen bu $(n-1)$ denklemi çözerek bulunabilir.

Örnek: $y'' = x - 2y + y'$ diferansiyel denkleminde $y(0) = 1$ ve $y(1) = -3$ sınır koşulları vasıtası ile $n = 10$ iken denklem takımlarını elde ediniz.



$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{10} = 0.1$$

$$y_j'' = x_j - 2y_j + y_j'$$

Merkezi fark formüllerini girersek,

$$\Rightarrow \frac{y_{j-1} - 2y_j + y_{j+1}}{h^2} = x_j - 2y_j + \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h}$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{h}{2}\right)y_{j-1} + (-2 + 2h^2)y_j + \left(1 - \frac{h}{2}\right)y_{j+1} = h^2 x_j$$

$$x_j = x_0 + j.h \quad \Rightarrow \quad x_j = 0.1 * j$$

$$1.05 * y_{j-1} - 1.98 * y_j + 0.95 * y_{j+1} = 0.001 * j$$

"j=0" ve "j=10" değerleri için denklem takımı kurulmaz diğer değerler için kurulan denklem takımları aşağıdaki gibidir;

$1.05 * y_0 - 1.98 * y_1 + 0.95 * y_2 = 0.001$	$j = 1$
$1.05 * y_1 - 1.98 * y_2 + 0.95 * y_3 = 0.002$	$j = 2$
$1.05 * y_2 - 1.98 * y_3 + 0.95 * y_4 = 0.003$	$j = 3$
$1.05 * y_3 - 1.98 * y_4 + 0.95 * y_5 = 0.004$	$j = 4$
$1.05 * y_4 - 1.98 * y_5 + 0.95 * y_6 = 0.005$	$j = 5$
$1.05 * y_5 - 1.98 * y_6 + 0.95 * y_7 = 0.006$	$j = 6$
$1.05 * y_6 - 1.98 * y_7 + 0.95 * y_8 = 0.007$	$j = 7$
$1.05 * y_7 - 1.98 * y_8 + 0.95 * y_9 = 0.008$	$j = 8$
$1.05 * y_8 - 1.98 * y_9 + 0.95 * y_{10} = 0.009$	$j = 9$

Sınır koşulları girilirse ilk ve son denklem aşağıdaki hali alır;

$$y(0) = y_0 = 1$$

$$1.05 * 1 - 1.98 * y_1 + 0.95 * y_2 = 0.001 \quad \Rightarrow \quad -1.98 * y_1 + 0.95 * y_2 = -1.049$$

$$y(1) = y_{10} = -3$$

$$1.05 * y_8 - 1.98 * y_9 + 0.95 * -3 = 0.009 \quad \Rightarrow \quad 1.05 * y_8 - 1.98 * y_9 = 2.8590$$

Denklemler ile oluşturulan matris,

$$\begin{bmatrix} -1.98 & 0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.05 & -1.98 & 0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.05 & -1.98 & 0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.05 & -1.98 & 0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.05 & -1.98 & 0.95 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.05 & -1.98 & 0.95 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.05 & -1.98 & 0.95 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.05 & -1.98 & 0.95 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.05 & -1.98 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.049 \\ 0.002 \\ 0.003 \\ 0.004 \\ 0.005 \\ 0.006 \\ 0.007 \\ 0.008 \\ 2.8590 \end{bmatrix}$$

$$y_0 = 1$$

$$y_1 = 0.7299$$

$$y_2 = 0.4171$$

$$y_3 = 0.0646$$

$$y_4 = -0.3231$$

$$y_5 = -0.7406$$

$$y_6 = -1.1813$$

$$y_7 = -1.6371$$

$$y_8 = -2.0991$$

$$y_9 = -2.5571$$

$$y_{10} = -3$$

ÖDEV

1) $y'' = x - 2y + y'$ diferansiyel denklemlerini $y(0)=1$ ve $y(1)=-3$ sınır koşulları vasıtasıyla,

2) $y'' = x^2 - 4y + 4y'$ diferansiyel denklemlerini $y(1)=-2$ ve $y(2)=4$ sınır koşulları vasıtasıyla,

$n = 100$ olarak çözünüz.

6.3.1) Karışık Sınır Şartının Olması Hali

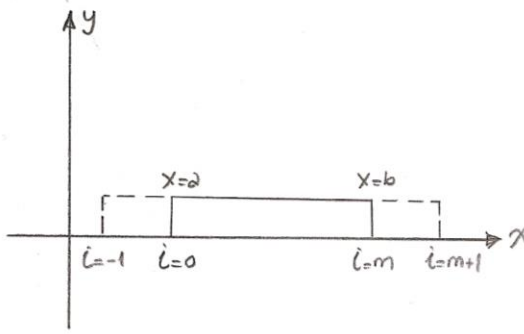
Sınır değer problemlerinde karşılaşılabilecek sınır şartlarının en genel ifadesi, $\alpha \frac{dy}{dx} + \beta \cdot y = \gamma$ şeklindedir. Burada α , β ve γ değerleri sabitlerdir. Bu sınır şartlarında; $\alpha \neq 0$ ve $\beta \neq 0$ olması durumunda bu koşullarla ortaya çıkan şarta *Karışık Sınır Şartı* adı verilir, $\alpha = 0$ ve $\beta \neq 0$ durumunda bir önceki sınır şartı elde edilir ve *Dirichlet Sınır Koşulu* denir, $\alpha \neq 0$ ve $\beta = 0$ olması durumunda *Neuman Sınır Şartı* elde edilir.

Aşağıdaki diferansiyel denklemi her iki uç noktasında karışık sınır şartı olması durumu için formüle edelim,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + C \cdot y = f(x) \text{ diferansiyel denkleminde}$$

$$\left. \begin{array}{ll} x = a \text{ 'da} & \alpha_1 \frac{dy}{dx} + \beta_1 \cdot y = \gamma_1 \\ x = b \text{ 'da} & \alpha_2 \frac{dy}{dx} + \beta_2 \cdot y_2 = \gamma_2 \end{array} \right\} \text{ Sınır Şartları}$$

Bu sınır şartları altında $x_0 = a$ ve $x_m = b$ fonksiyon değerleri arasında hiçbir şey söylenemez. $y(a) = y_0$ ve $y(b) = y_m$ bilinmemektedir. Bu durumda bilinmeyen sayısı aralığın m eşit parçaya bölünmesiyle elde edilen nokta sayısına yani $(m+1)$ 'e eşittir.



Diferansiyel denklemin sonlu farklar ifadesini yazarsak,

$$\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + C \cdot y_i = f(x_i)$$

$$y_{i-1} + (C \cdot h^2 - 2)y_i + y_{i+1} = h^2 \cdot f(x_i) \quad (1)$$

Son sınır şartı için fark denkleminde, yani denklem (1)'de $i = 0$ konulursa,

$$y_{-1} + (C \cdot h^2 - 2)y_0 + y_1 = h^2 \cdot f(x_0) \quad (2)$$

denklemini elde edilir. Bu denklemde y_{-1} bilinmeyen ile karşılaşılmaktadır. Bu bilinmeyen $x = a$ 'dan h kadar gerideki yani $x = a - h$ gibi bir hayali noktayı temsil etmektedir. Aralığın dışındaki bu hayali noktayı yok etmek için 1. sınır koşulu şartından faydalanabiliriz.

$$\alpha_1 \frac{dy}{dx} + \beta_1 \cdot y = \gamma_1$$

$$\alpha_1 \left(\frac{y_1 - y_{-1}}{2h} \right) + \beta_1 \cdot y_0 = \gamma_1$$

$$\Rightarrow y_{-1} = y_1 - \frac{2h}{\alpha_1} (\gamma_1 - \beta_1 \cdot y_0)$$

Bu ifade (2) no'lu denklemde yerine konulursa ve ortak çarpanlar altında toplanırsa sol uç nokta için fark denklemi,

$$\left(h^2.C - 2 + \frac{2.h.\beta_1}{\alpha_1} \right) y_0 + 2.y_1 = h^2.f(x_0) + \frac{2.h.\gamma_1}{\alpha_1} \quad i = 0 \text{ için}$$

Aynı şekilde sağ uç noktanın fark denklemini elde etmek için denklem (1)'de $i = m$ yazılırsa,

$$y_{m-1} + (C.h^2 - 2)y_m + y_{m+1} = h^2.f(x_m) \quad i = m \quad (3)$$

Bu denklemde y_{m+1} , $x_m = b$ 'den h kadar ileride $x = b + h$ 'daki hayali bir noktayı temsil etmektedir. Bu hayali nokta 2. sınır şartı kullanılarak yok edilebilir.

$$\alpha_2 \left(\frac{y_{m+1} - y_{m-1}}{2h} \right) + \beta_2.y_m = \gamma_2$$

$$\Rightarrow y_{m+1} = y_{m-1} + \frac{2h}{\alpha_2} (\gamma_2 - \beta_2.y_m)$$

Bu ifade (3) No'lu denklemde yerine konulursa ve ortak çarpanlar altında toplanırsa sağ uç nokta için fark denklemi,

$$2.y_{m-1} + \left(h^2.C - 2 - \frac{2.h.\beta_2}{\alpha_2} \right) y_m = h^2.f(x_m) - \frac{2.h.\gamma_2}{\alpha_2} \quad i = m$$

şeklinde yazılabilir.

Orta noktalar için $i = 1, 2, 3, \dots, m - 1$ için (1) no'lu denklem geçerlidir.

$$\left(h^2.C - 2 + \frac{2.h.\beta_1}{\alpha_1}\right)y_0 + 2.y_1 = h^2.f(x_0) + \frac{2.h.\gamma_1}{\alpha_1} \quad i = 0$$

$$y_0 + (C.h^2 - 2)y_1 + y_2 = h^2.f(x_1) \quad i = 1$$

$$y_1 + (C.h^2 - 2)y_2 + y_3 = h^2.f(x_2) \quad i = 2$$

$$y_2 + (C.h^2 - 2)y_3 + y_4 = h^2.f(x_3) \quad i = 3$$

$$\begin{array}{l} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \quad \begin{array}{l} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array}$$

$$y_{m-2} + (C.h^2 - 2)y_{m-1} + y_m = h^2.f(x_{m-1}) \quad i = m - 1$$

$$2.y_{m-1} + \left(h^2.C - 2 - \frac{2.h.\beta_2}{\alpha_2}\right)y_m = h^2.f(x_m) - \frac{2.h.\gamma_2}{\alpha_2} \quad i = m$$

Örnek: Aşağıdaki diferansiyel denklemin verilen sınır şartları altında bir bilgisayar programı vasıtası ile küçülen h değerleri için çözünüz ve analitik çözümle karşılaştırınız.

$$\text{Diferansiyel Denklemler} \quad ; \quad x.y'' - (x+2).y' + 2y = 0$$

$$\text{Sınır şartları} \quad ; \quad y'(0) = 0 \quad y'(1) = y(1) + \frac{1}{2}$$

$$\text{Analitik Çözüm} \quad ; \quad y(x) = e^x - \frac{1}{2}(x^2 + 2x + 2)$$

İlk önce "0-1" aralığını m eşit parçaya bölelim, sınır şartlarının her ikisi de karışık türden olduğundan bilinmeyen sayısı $(m+1)$ 'dir. Diferansiyel denklemde türevler yerine merkezi fark formülleri kullanılarak herhangi bir x_i noktası için genel bir formül üretilir.

$$x_i \left[\frac{y_{i-1} - 2.y_i + y_{i+1}}{h^2} \right] - (x_i + 2) \left[\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2.h} \right] + 2.y_i = 0$$

$$\left[h + \left(1 + \frac{h}{2} \right) x_i \right] y_{i-1} + 2.(h^2 - x_i).y_i + \left[-h + \left(1 - \frac{h}{2} \right) x_i \right] y_{i+1} = 0$$

$$x_i = x_0 + i.h$$

$$x_i = i.h$$

Eğer denklemde $x_i = i.h$ konulur ve denklem taraf tarafa h 'a bölünürse,

$$\left[1 + \left(1 + \frac{h}{2} \right) i \right] y_{i-1} + 2.(h-i).y_i + \left[-1 + \left(1 - \frac{h}{2} \right) i \right] y_{i+1} = 0 \quad , \quad i = 0, 1, 2, \dots, m \quad (1)$$

denklem (1)'de $i = 0$ koyarsak,

$$y_{-1} + 2.h.y_0 - y_1 = 0 \quad i = 0$$

Sol sınır şartı kullanılırsa,

$$y'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{y_1 - y_{-1}}{2.h} = 0 \quad \Rightarrow \quad y_{-1} = y_1$$

$$\Rightarrow \quad y_1 + 2.h.y_0 - y_1 = 0$$

$$y_0 = 0 \quad i = 0$$

Denklem (1)'de $i = m$ koyarsak,

$$\left[1 + \left(1 + \frac{h}{2} \right) m \right] y_{m-1} + 2.(h-m).y_m + \left[-1 + \left(1 - \frac{h}{2} \right) m \right] y_{m+1} = 0 \quad i = m$$

2. sınır koşulu,

$$\frac{y_{m+1} - y_{m-1}}{2h} = y_m + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y_{m+1} = y_{m-1} + 2h.y_m + h$$

Bu ifade yukarıda yerine konulur ve düzenlenirse;

$$2m.y_{m-1} + (2h - h^2 - 2)m.y_m = -h \left[-1 + \left(1 - \frac{h}{2} \right) m \right] \quad i = m \text{ için}$$

$i = 1, 2, \dots, m-1$ için (1) no'lu denklemde $(m-1)$ tane denklem daha elde edilir. Böylece m denklem m bilinmeyen Gauss metodu ile çözülerek çözüm tamamlanmış olur.

x	Nümerik Çözüm				Analitik Çözüm
	$h = 0.1$ n=10	$h = 0.05$ n=20	$h = 0.0025$ n=400	$h = 0.001$ n=1000	
0.2	0.000935	0.001285	0.001375	0.001398	0.001402
0.4	0.010563	0.011508	0.011745	0.011813	0.011824
0.6	0.039696	0.041510	0.041960	0.042098	0.042110
0.8	0.101570	0.104547	0.105290	0.105508	0.105541
1.0	0.212410	0.216810	0.217915	0.218230	0.218280

6.3.2) Sınırın Sonsuz Olması Hali

Bazı diferansiyel denklemlerin bir sınır değeri de sonsuzda olabilmektedir. Buna örnek verecek olursak,

$$\text{Diferansiyel denklem} \quad ; \quad y'' + C.y = f(x)$$

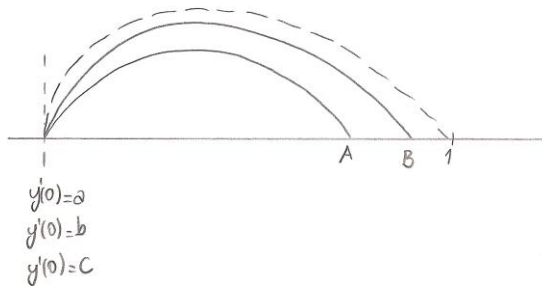
$$\text{Sınır koşulları} \quad ; \quad y(0)=0 \quad , \quad y(\infty)=\beta$$

Bu problemi fark denklemleri oluşturarak çözebilmemiz için sonsuz olarak belirtilen x değerinin hangi mertebeden olduğunu bilmemiz gerekir. x 'in mertebesi hakkında bir fikir yürütemememiz nedeniyle problemi bir ilk değer problemi olarak çözmemiz gerekmektedir. Fakat burada da bir başka problem vardır. Bu problemde ilk şartın birisinin (y') eksik olmasıdır. Yani yukarıdaki diferansiyel denklemi çözebilmemiz için $y(0)$ 'ın yanı sıra $y'(0)$ ilk değerini de bilmemiz gerekir. Oysa $y'(0)$ değeri bilinmemektedir. Bununla beraber $y'(0)$ ilk şartı için bir tahminde bulunarak problemi ilk değer problemi olarak çözer ve $x \rightarrow \infty$ 'a giderken y 'nin nereye gittiğine bakarız. Diğer bir deyişle $y'(0)=a$ alındığında $x \rightarrow \infty$ 'a gittiğinde $y \rightarrow A$ gibi bir değere yakınsıyor olsun. Sonra ilk şart için ikinci bir tahminde bulunalım; $y'(0)=b$ alındığında $x \rightarrow \infty$ 'a gittiğinde $y \rightarrow B$ gibi bir değere yakınsıyor olsun. O zaman $x \rightarrow \infty$ 'a gittiğinde $y(\infty)=\beta$ için yeni bir tahmin değeri hesaplanır. Bu bir tür Newton-Rapson uygulaması olup,

$$c = a - \frac{A - \beta}{(A - B)/(a - b)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}}$$



Uygulanan bu metot ilerideki bir noktada fonksiyonun sınır değerini interpolasyonla bulunmasından dolayı atış yada şutlama (shooting) metodu adı verilir.

Örnek: Aşağıdaki diferansiyel denklemi çözünüz,

$$\text{Diferansiyel denklem} \quad ; \quad y'' - 4y = 1$$

$$\text{Sınır koşulları} \quad ; \quad y(0) = 0 \quad , \quad y(\infty) = -\frac{1}{4}$$

Problemi ilk değer problemi olarak çözebilmek için diferansiyel denklemi 1. dereceden denklem sistemine indirgiyoruz,

$$y' = p = f_1(x, y, p)$$

$$p' = 1 + 4y = f_2(x, y, p)$$

$$y(0) = 0$$

$$y'(0) = p(0) = a = 1$$

Çözüm yapılırsa,

$$y(\infty) = y(5) = A = 8242$$

$$y'(0) = p(0) = b = -1 \text{ alırsak,}$$

Çözüm yapılırsa,

$$y(\infty) = y(5) = B = -2749$$

Bu değerleri yukarıda "c" için verilen ifadeye koyarsak türev için yeni bir tahmin değeri elde ederiz,

$$c = 1 - \frac{8242 - (-1/4)}{(8242 - (-2749))/(1 - (-1))} = -0.499818$$

Bu yeni değerle çözümü tekrarlırsak,

$y(4.6) = y(\infty) = -0.25$ 'te çözümün sabitleştiğini görürüz. Gerçekte "c" nin değeri -0.5 'tir. Bazı denklemlerde tahmin sayısı Newton-Rapson'la birkaç kere çözüm yapılabilir.

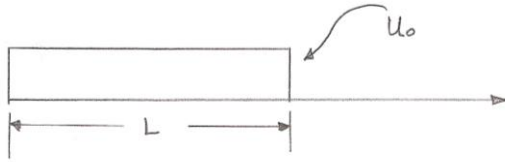
Mutlaka ikinci sınır şartının $y(\infty) = K$ gibi olması gerekmez. $y(L) = K$ gibi sınır değer problemlerine de şutlama metodu benzer şekilde uygulanabilir.

7. PARABOLİK DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

7.1. Boyutsuz Forma Transform

Problemlerin nümerik çözümleri oldukça fazla aritmetik işlemler içermektedir. Bu yüzden yapılan bir çözümün mümkün olduğunca fazla problem için geçerli olması istenmektedir. Bu çözümleme istenilen denklemi boyutsuz forma getirerek başarılabilir. Örneğin, viskoz bir ortamda bir sarkacın salınımı ile bir kapasitördeki gerilimin direnç ve endüktans üzerinden boşalması fiziksel olarak ayrı olmasına rağmen bu iki farklı ifadeyi yöneten diferansiyel denklem tamamen aynıdır.

$$\frac{\partial U}{\partial T} = K \frac{\partial^2 U}{\partial X^2}$$



$$x = \frac{X}{L} \quad (\text{Cismin boyu boyutsuz hale getirilmiştir})$$

$$\Rightarrow X = x.L$$

$$u = \frac{U}{U_0} \quad \Rightarrow \quad U = u.U_0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u.U_0}{\partial T} = K \frac{\partial^2 u.U_0}{\partial (x.L)^2} \quad \Rightarrow \quad U_0 \frac{\partial u}{\partial T} = K U_0 \frac{\partial^2 u}{L^2 \partial x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{L^2}{K} \frac{\partial u}{\partial T} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \quad t = \frac{K.T}{L^2} \text{ ise } T = \frac{L^2}{K} t$$

$$\frac{L^2}{K} \frac{\partial u}{\partial \left(\frac{L^2}{K} t \right)} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

7.2. Açık (Explicit) Çözüm Metodu

Bir boyutlu, zamana bağlı kondüksiyon ısı denklemi parabolik denklem olup formülü aşağıdaki gibidir,u

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x,t) = u_{i,j} \quad i = x \text{ ve } j = t$$

Eşitliğin sol tarafındaki birinci dereceden türev ifadesi mutlaka ileri farklar formülü ile açılmalıdır. Eşitliğin sağ tarafı ise genellikle merkezi farklar formülü ile açılrsa da, ileri ve ger farklar formülleri ile de istenirse açılabilir.

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\delta t} = \frac{u_{i-1,j} - 2.u_{i,j} + u_{i+1,j}}{(\delta x)^2} \quad , \text{ FTCS (Forward Time Central Space)}$$

$$u_{i,j+1} = r.u_{i-1,j} + (1-2.r)u_{i,j} + r.u_{i+1,j} \quad \text{ve} \quad r = \frac{\delta t}{(\delta x)^2}$$

$u_{i,j+1}$, $(i, j+1)$ kafes noktasındaki bilinmeyen sıcaklıktır. Eğer j basamağındaki sıcaklıklar biliniyorsa $j+1$ zaman basamağındaki sıcaklıklar yukarıdaki sonlu farklar formülü ile hesaplanabilir. İlk andaki yani $j=0$ anındaki sıcaklıklar verildiğine göre $j=1,2,3,\dots,n$

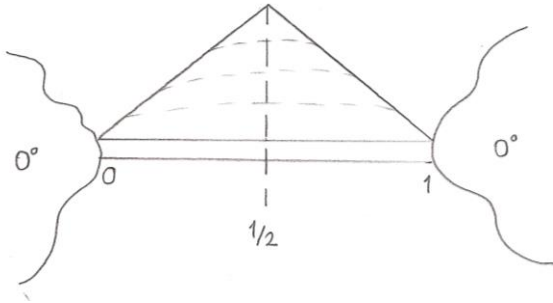
basamağındaki sıcaklıklar adım adım hesaplanır. Bu metoda explicit (açık) çözüm metodu adı verilmektedir.

Örnek: Uçları erimekte olan bir buz kalıbı ile temasta olan çubuğun ilk sıcaklığı (boyutsuz formda),

$$u(x,0) = 2x \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

$$u(x,0) = 2(1-x) \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1$$

şeklindedir. Çubuğun sıcaklığının zamanla değişimini hesaplayınız.



$$u(x,0) = 2x \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

$$u(x,0) = 2(1-x) \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1$$

İlk şart

$$u(0,t) = 0$$

$$u(1,t) = 0$$

Sınır şartları

Sonlu farklar ifadesini,

$$u_{i,j+1} = r.u_{i-1,j} + (1-2r)u_{i,j} + r.u_{i+1,j} \quad \text{ve} \quad r = \frac{\delta t}{(\delta x)^2}$$

Sistem simetrik olduğu için yarısının çözülmesi yeterli olacaktır.

Durum 1: $n = 10$ alalım (çubuğu 10 parçaya bölelim)

$$\delta x = \frac{1}{10} = 0.1 \quad \text{ve} \quad \delta t = \frac{1}{1000} \text{ seçelim}$$

$$r = \frac{\delta t}{(\delta x)^2} = 0.1$$

$$\Rightarrow u_{i,j+1} = 0.1 * u_{i-1,j} + 0.8 * u_{i,j} + 0.1 * u_{i+1,j}$$

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{10} (u_{i-1,j} + 8.u_{i,j} + u_{i+1,j})$$

$$x_i = x_0 + i.\delta x \quad \Rightarrow \quad x_i = 0.1 * i$$

	$i = 0$ $x = 0$	$i = 1$ $x = 0.1$	$i = 2$ $x = 0.2$	$i = 3$ $x = 0.3$	$i = 4$ $x = 0.4$	$i = 5$ $x = 0.5$		$i = 10$ $x = 1$
$t = 0.000$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1		.
$t = 0.001$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	0.96		.
$t = 0.002$	0	0.2	0.4	0.6	0.7960	0.9280		.
$t = 0.003$	0	0.2	0.4	0.5996	0.7816	0.9016		.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
$t = 0.01$	0	0.1996	0.3968	0.5822	0.7281	0.7867		.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
$t = 0.02$	0	0.1938	0.3781	0.5373	0.6486	0.6891		.

$x_i = 0.1 * i$ ise,

$$u(x,0) = 2.x \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad u_{i,0} = 2.x = 0.2 * i \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

$$u(x,0) = 2.(1-x) \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \quad \Rightarrow \quad u(x,0) = 2.(1-x) = 2.(1-0.1*i) \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1$$

Diferansiyel denklemin analitik çözümü,

$$u = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\sin \frac{1}{2} n.\pi \right) (\sin n.\pi.x) e^{-n^2 \pi^2 t}$$

	Sonlu Farklar Çözümü $x = 0.3$	Analitik Çözüm $x = 0.3$	Fark	Hata Yüzdesi
$t = 0.01$	0.5822	0.5799	0.0023	0.4
$t = 0.02$	0.5373	0.5334	0.0039	0.7
$t = 0.1$	0.2472	0.2444	0.0028	1.1

Durum 2: $n = 10$ alalım (çubuğu 10 parçaya bölelim)

$$\delta x = \frac{1}{10} = 0.1 \quad \text{ve} \quad \delta t = \frac{5}{1000} = 0.005 \text{ seçelim}$$

$$r = \frac{\delta t}{(\delta x)^2} = 0.5$$

$$\Rightarrow u_{i,j+1} = 0.5 * u_{i-1,j} + 0.5 * u_{i+1,j} = \frac{1}{2} (u_{i-1,j} + u_{i+1,j})$$

	$i = 0$ $x = 0$	$i = 1$ $x = 0.1$	$i = 2$ $x = 0.2$	$i = 3$ $x = 0.3$	$i = 4$ $x = 0.4$	$i = 5$ $x = 0.5$		$i = 10$ $x = 1$
$t = 0.000$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1		.
$t = 0.005$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	0.8		.
$t = 0.01$	0	0.2	0.4	0.6	0.7	0.8		.
$t = 0.015$	0	0.2	0.4	0.55	0.7	0.7		.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
$t = 0.1$	0	0.0949	0.1717	0.2484	0.2778	0.3071		.

	Sonlu Farklar Çözümü $x = 0.3$	Analitik Çözüm $x = 0.3$	Fark	Hata Yüzdesi
$t = 0.005$	0.6	0.5966	0.0034	0.57
$t = 0.01$	0.6	0.5799	0.0201	3.5
$t = 0.02$	0.55	0.5334	0.0166	3.1
$t = 0.1$	0.2484	0.2444	0.0040	1.6

Durum 3: $n=10$ alalım (çubuğu 10 parçaya bölelim)

$$\delta x = \frac{1}{10} = 0.1 \quad \text{ve} \quad \delta t = \frac{1}{100} = 0.01 \text{ seğıelim}$$

$$r = \frac{\delta t}{(\delta x)^2} = 1$$

$$\Rightarrow u_{i,j+1} = u_{i-1,j} - u_{i,j} + u_{i+1,j}$$

	$i = 0$ $x = 0$	$i = 1$ $x = 0.1$	$i = 2$ $x = 0.2$	$i = 3$ $x = 0.3$	$i = 4$ $x = 0.4$	$i = 5$ $x = 0.5$		$i = 10$ $x = 1$
$t = 0.000$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		.
$t = 0.01$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	0.6		.
$t = 0.02$	0	0.2	0.4	0.6	0.4	1.0		.
$t = 0.03$	0	0.2	0.4	0.2	1.2	-0.2		.
$t = 0.04$	0	0.2	0.4	1.4	-1.2	2.6		.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.

Çözüm tamamen anlamsızdır. Bu 3 durum incelemesi r değeriinin önemli bir parametre olduğunu göstermektedir. Explicit metotta çözüm $0 \leq r \leq \frac{1}{2}$ aralığı için geçerlidir. Daha sonra stabilite ve yakınsama konularında bu sınırlama analitik olarak gösterilecektir.

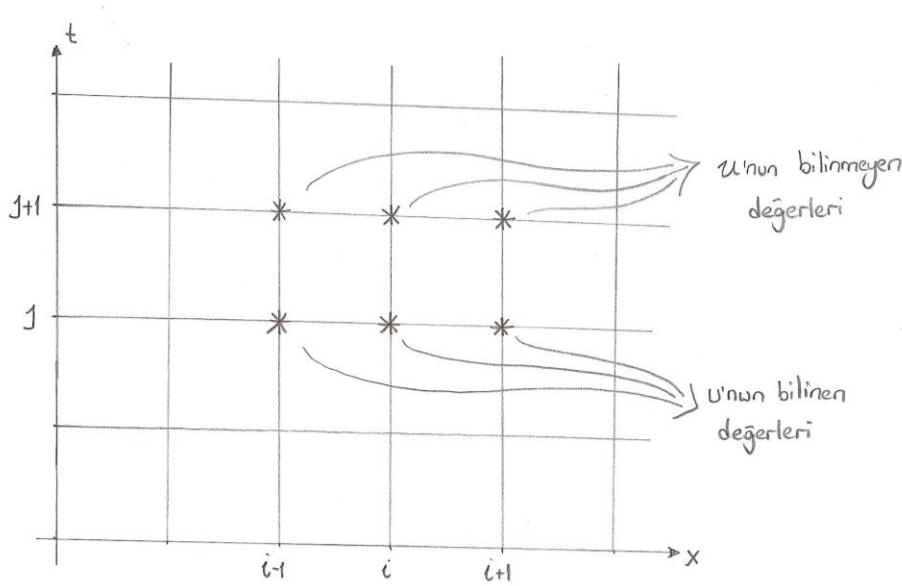
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \Rightarrow \quad r_1 = \frac{\delta t}{(\delta x)^2}, r_2 = \frac{\delta t}{(\delta y)^2} \text{ ve } r_1, r_2 \leq \frac{1}{4} \text{ olmalı}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad \Rightarrow \quad r_1 = \frac{\delta t}{(\delta x)^2}, r_2 = \frac{\delta t}{(\delta y)^2}, r_3 = \frac{\delta t}{(\delta z)^2} \text{ ve } r_1, r_2, r_3 \leq \frac{1}{8}$$

Kullanılabilir bir metot değildir.

7.3. Crank-Nicolson Implicit (Kapalı) Metodu

Explicit metot hesaplama açısından basit olmasına rağmen, çok önemli bir eksikliği bulunmaktadır. Zaman basamağı δt çok çok küçük alınmak zorundadır. Çünkü hesaplar $0 \leq r \leq \frac{1}{2}$ aralığı için geçerlidir. Dolayısı ile yeteri kadar doğru sonuç elde edebilmek için δt çok küçük alınmalıdır. δt değeri çok küçük alındığı ise hesaplama yükü artmaktadır. Crank-Nicolson 1947 yılında hesaplama hacmini azaltan ve bütün r değerleri için geçerli olan bir metot önermişlerdir. Onlar kısmi türevli diferansiyel denklemin kafes noktalarının orta noktalarında geçerli olduğunu düşündüler ve $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 'nin sonlu farklarını j ve $j+1$ 'deki kafes noktalarındaki yaklaşımların ortalaması olarak aldılar.



$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\delta t} = \frac{1}{2} \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{(\delta x)^2} + \frac{1}{2} \frac{u_{i-1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1}}{(\delta x)^2}$$

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t} = \beta \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + (1 - \beta) \frac{u_{i-1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1}}{(\Delta x)^2}$$

$\beta = 1$: Explicit (açık) metot

$\beta = \frac{1}{2}$: Crank-Nicolson Implicit (Kapalı) Metodu

$\beta = 0$: Tam Implicit (Kapalı) Metot

$\beta = \frac{1}{2}$ alırsak,

$$-r.u_{i-1,j+1} + (2 + 2r)u_{i,j+1} - r.u_{i+1,j+1} = r.u_{i-1,j} + (2 - 2r)u_{i,j} + r.u_{i+1,j}$$

Sonlu farklar ifadesinin sol tarafında 3 tane bilinmeyen $j + 1$ 'li terim sağ tarafında ise 3 tane bilinen (j)'li ifade vardır. Eğer her bir zaman basamağı sırasında $(n - 1)$ tane iç kafes noktası varsa (Örneğin $j = 0$ ve $i = 1, 2, \dots, n - 1$) $(n - 1)$ tane birbirine bağlı denklem takımı elde edilir ve $(n - 1)$ tane bilinmeyen olur. İlk andaki zaman sırasında ($j = 0$) u değerleri ilk şart olarak ve sınır şartları verildiğinden $j = 0$ zaman sırasındaki verilerden $j = 1$ sırasındaki u değerleri bulunur. Bu metot Implicit (Kapalı) metot olarak tanımlanmaktadır.

Örnek: Crank-Nicolson metodunu kullanarak bir önceki örneği çözünüz.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x, 0) = 2x \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

$$u(x, 0) = 2(1 - x) \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1$$



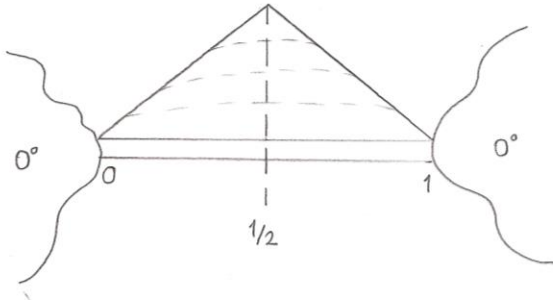
İlk şart

$$u(0,t)=0$$

$$u(1,t)=0$$



Sınır şartları



$$n=10 \text{ yani } \delta x = \frac{1}{10} = 0.1 \text{ ve } \delta t = \frac{1}{100} = 0.01 \text{ se\u011filim}$$

$$\Rightarrow r = \frac{\delta t}{(\delta x)^2} = 1$$

$$\Rightarrow -u_{i-1,j+1} + 4u_{i,j+1} - u_{i+1,j+1} = u_{i-1,j} + u_{i+1,j}$$

$j=0$ alırsak $i=1,2,3,\dots,n-1(9)$ (Simetrik oldu\u011fu i\u00e7in $i=5$ 'e kadar hesaplanması yeterlidir)

$j=0$ dersek,

$$-u_{0,1} + 4u_{1,1} - u_{2,1} = u_{0,0} + u_{2,0} \quad i=1$$

$$-u_{1,1} + 4u_{2,1} - u_{3,1} = u_{1,0} + u_{3,0} \quad i=2$$

$$-u_{2,1} + 4u_{3,1} - u_{4,1} = u_{2,0} + u_{4,0} \quad i=3$$

$$-u_{3,1} + 4u_{4,1} - u_{5,1} = u_{3,0} + u_{5,0} \quad i=4$$

$$-u_{4,1} + 4u_{5,1} - u_{6,1} = u_{4,0} + u_{6,0} \quad i=5$$

$$x_i = 0.1 * i \text{ ise,}$$

$$u(x,0) = 2.x \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad u_{i,0} = 2.x = 0.2 * i \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

$$u(x,0) = 2.(1-x) \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \quad \Rightarrow \quad u(x,0) = 2.(1-x) = 2.(1-0.1*i) \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1$$

$$\begin{aligned} -u_{0,1} + 4.u_{1,1} - u_{2,1} &= 0.0 + 0.4 & i=1 & & (u_{0,1} = 0) \\ -u_{1,1} + 4.u_{2,1} - u_{3,1} &= 0.2 + 0.6 & i=2 & \\ -u_{2,1} + 4.u_{3,1} - u_{4,1} &= 0.4 + 0.8 & i=3 & \\ -u_{3,1} + 4.u_{4,1} - u_{5,1} &= 0.6 + 1.0 & i=4 & \\ -u_{4,1} + 4.u_{5,1} - u_{6,1} &= 0.8 + 0.8 & i=5 & & (u_{4,0} = u_{6,0} \text{ ve } u_{4,1} = u_{6,1}) \end{aligned}$$

Bilinmeyenler *Bilinenler*



$$\begin{aligned} -u_0 + 4.u_1 - u_2 &= u_0 + u_2 & i=1 & & (u_{0,1} = 0) \\ -u_1 + 4.u_2 - u_3 &= u_1 + u_3 & i=2 & \\ -u_2 + 4.u_3 - u_4 &= u_2 + u_4 & i=3 & \\ -u_3 + 4.u_4 - u_5 &= u_3 + u_5 & i=4 & \\ -u_4 + 4.u_5 - u_6 &= u_4 + u_6 & i=5 & & (u_{4,0} = u_{6,0} \text{ ve } u_{4,1} = u_{6,1}) \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \\ 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 + 0.4 \\ 0.2 + 0.6 \\ 0.4 + 0.8 \\ 0.6 + 1.0 \\ 0.8 + 0.8 \end{bmatrix}$$

$$u_1 = 0.1989$$

$$u_2 = 0.3956$$

$$u_3 = 0.5834$$

$$u_4 = 0.7381$$

$$u_5 = 0.7691$$

$j = 1$ dersek,

$$-u_0 + 4u_1 - u_2 = u_0 + u_2 = 0 + 0.3956 \quad i = 1 \quad (u_{0,1} = 0)$$

$$-u_1 + 4u_2 - u_3 = u_1 + u_3 = 0.1989 + 0.5834 \quad i = 2$$

$$-u_2 + 4u_3 - u_4 = u_2 + u_4 = 0.3956 + 0.7381 \quad i = 3$$

$$-u_3 + 4u_4 - u_5 = u_3 + u_5 = 0.5834 + 0.7691 \quad i = 4$$

$$-u_4 + 4u_5 - u_6 = u_4 + u_6 = 0.7381 + 0.7381 \quad i = 5 \quad (u_{4,0} = u_{6,0} \text{ ve } u_{4,1} = u_{6,1})$$

	$i = 0$ $x = 0$	$i = 1$ $x = 0.1$	$i = 2$ $x = 0.2$	$i = 3$ $x = 0.3$	$i = 4$ $x = 0.4$	$i = 5$ $x = 0.5$		$i = 10$ $x = 1$
$t = 0.000$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		.
$t = 0.01$	0	0.1989	0.3956	0.5834	0.7381	0.7691		.
$t = 0.02$	0	0.1936	0.3789	0.5400	0.6461	0.6921		.
.		.	.	.	.	.	.	.
.	0	.	.	.	.	.	.	.
.		.	.	.	.	.	.	.
$t = 0.1$	0	0.0948	0.1803	0.2482	0.2918	0.3069		.
$t = 0.1$								
(Analitik Çözüm)	0	0.0934	0.1776	0.2444	0.2873	0.3021		.

Crank-Nicolson metodu tüm r değerleri için stabildir. Fakat r 'nin büyük değerleri için (40 civarında) nümerik çözümlerde istenmeyen sonlu salınımlar oluşur. Gauss ve Gauss-Jordan yok etme metodu ile problem sistematik olarak çözülebilir.

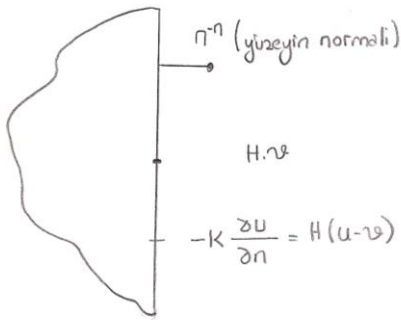
ÖDEV:

1) Bir önceki örnekte yer alan soruyu tam implicit (kapalı) metot ile çözümleyiniz.

7.4. Türev Türü Sınır Şartları

Pratikte türev türü sınır şartları ile sık sık karşılaşılır. Örneğin, eğer bir yüzey termal olarak izole edilmişse yani bu yüzeye dik olarak ısı transferi yok ise bu yüzeyin her yerinde sınır şartı $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ 'dır. Benzer olarak eğer sıcaklığı u olan bir yüzey sıcaklığı v olan bir akışkana temasta ise kondüksiyonla olan ısı transferinin konveksiyonla olan ısı transferine eşit olma şartı, $-K \frac{\partial u}{\partial n} = H.(u - v)$ şeklinde verilebilir.

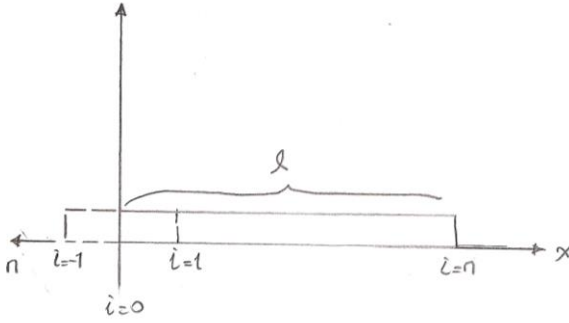
Burada K malzemenin ısı iletim katsayısı (termal iletkenliği) ve H (film katsayısı) yüzeyin ısı transfer katsayısıdır.



$$\frac{\partial u}{\partial n} = -h.(u - v)$$

$$h = \frac{H}{K} \text{ (pozitif katsayı)}$$

L uzunluğunda bir çubuğun yüzeyini termal olarak izole edip, ısıнын $x=0$ 'da konveksiyonla transferine izin veren t anında bu uçtaki sıcaklık bilinmeyen olacaktır. Bunu sınır şartıyla belirleyebiliriz.



$$-\frac{\partial u}{\partial x} = -h(u-v)$$

$x=0$, soldaki uç olduğundan sınır şartından dışa doğru normal x eksenine zıt yönde olduğundan ifadenin başına $(-)$ işareti konulmuştur.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = h(u-v) \Big|_{x=0}$$

Eğer ileri fark sonlu farklar ifadesini yazarsak,

$$\frac{u_{1,j} - u_{0,j}}{\delta x} = h(u_{0,j} - v)$$

Böylece $u_{0,j}$ için ek bir denklem elde ederiz.

Eğer $\frac{\partial u}{\partial n}$ 'i daha hassas ifade etmek istersek, birinci dereceden türevi merkezi farklar formülü ile açabiliriz,

$$\frac{u_{1,j} - u_{-1,j}}{2\delta x} = h(u_{0,j} - v)$$

$u_{-1,j}$ hayali bir sıcaklık olup kefesin dışındaki $(-\delta x, j\delta t)$ dış kafes noktasının sıcaklığıdır. $u_{-1,j}$ bilinmeyen bir sıcaklık olup çözüm için diğer bir denkleme daha ihtiyaç vardır. Bu, diferansiyel denklemin sonlu farklar ifadesinin çubuğun $x=0$ 'daki noktasında da sağlandığını kabul ederek bir denklem daha elde edilerek başarılabılır. Benzer denklemler çubuğun $x=l$ 'deki noktası için de kullanılabilir.

Örnek: $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ denklemini aşağıdaki verilen sınır ve ilk şartlar için explicit metotla çözüünüz. Sınır şartları için merkezi farklar ifadesini kullanınız.

$$u(x,0)=1 \quad \Rightarrow \quad \text{İlk şart}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = u(0,t) \\ \frac{\partial u(1,t)}{\partial x} = -u(1,t) \end{array} \right\} \quad \text{Sınır şartları}$$

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\delta t} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{(\delta x)^2}$$

$$\Rightarrow \quad u_{i,j+1} = u_{i,j} + r(u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}) \quad \text{ve} \quad r = \frac{\delta t}{(\delta x)^2}$$

$i = 0,1,2,\dots,n-1,n$ Bu denklemde türev türü sınır şartı olduğundan ve merkezi farklar kullanıldığından "0" ve "n" değerleri içinde geçerlidir.

$$u_{0,j+1} = u_{0,j} + r(u_{-1,j} - 2u_{0,j} + u_{1,j})$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = u(0,t) \quad \Rightarrow \quad \frac{u_{1,j} - u_{-1,j}}{2\delta x} = u_{0,j}$$

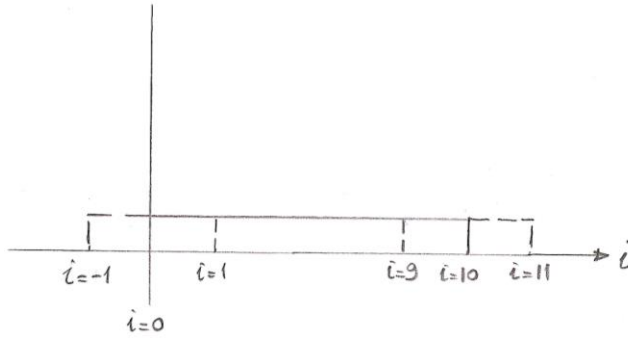
$$\Rightarrow u_{-1,j} = u_{1,j} - 2.\delta x.u_{0,j}$$

$$u_{0,j+1} = u_{0,j} + r(u_{1,j} - 2.\delta x.u_{0,j} - 2.u_{0,j} + u_{1,j}) \text{ genel denklemden,}$$

$$u_{0,j+1} = u_{0,j} + 2r(u_{1,j} - (1 + \delta x)u_{0,j}) \quad i = 0 \text{ denklemi}$$

Diyelim ki $n = 10$ seçildi,

$$n = 10 \quad \Rightarrow \quad \delta x = \frac{1}{10} = 0.1$$



$i = 10$ dersek,

$$u_{10,j+1} = u_{10,j} + r(u_{9,j} - 2.u_{10,j} + u_{11,j})$$

$$\frac{u_{11,j} - u_{9,j}}{2.\delta x} = -u_{10,j} \quad \Rightarrow \quad u_{11,j} = u_{9,j} - 2.\delta x.u_{10,j}$$

$$u_{10,j+1} = u_{10,j} + r(u_{9,j} - 2.u_{10,j} + u_{9,j} - 2.\delta x.u_{10,j})$$

$$u_{10,j+1} = u_{10,j} + 2r(u_{9,j} - (1 + \delta x)u_{10,j}) \quad i = n = 10 \text{ için,}$$

İlk ve son sınır şartları denklemleri simetrik olduğunu göstermektedir. Bu durumda sistemin yarısı alınarak çözüm yapılması yeterlidir.

Bu çözüm, $r \leq \frac{1}{2 + \delta x}$ için geçerlidir.

$$\text{Eğer } r = \frac{1}{4} \text{ seçilirse, } r = \frac{\delta t}{(\delta x)^2} \Rightarrow \delta t = r \cdot (\delta x)^2 = 0.0025$$

$$u_{0,j+1} = u_{0,j} + \frac{1}{2} [u_{1,j} - 1.1 * u_{0,j}]$$

$$u_{0,j+1} = \frac{1}{2} [0.9 * u_{0,j} + u_{1,j}] \quad i = 0$$

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{4} [u_{i-1,j} + 2 * u_{i,j} + u_{i+1,j}] \quad i = 1,2,3,4,5$$

$$x_i = x_0 + i * \delta x \Rightarrow x_i = 0.1 * i$$

	$i = 0$ $x = 0$	$i = 1$ $x = 0.1$	$i = 2$ $x = 0.2$	$i = 3$ $x = 0.3$	$i = 4$ $x = 0.4$	$i = 5$ $x = 0.5$
$t = 0.000$	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
$t = 0.0025$	0.95	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
$t = 0.0050$	0.9275	0.9875	1.0	1.0	1.0	1.0
.	.	.	.	.	.	.
$t = 0.100$	0.7175	0.7829	0.8345	0.8718	0.8942	0.9017
$t = 0.250$	0.5542	0.6048	0.6492	0.6745	0.6923	0.6983
$t = 0.500$	0.3612	0.3942	0.4205	0.4396	0.4512	0.4551
$t = 1.000$	0.1534	0.1674	0.1786	0.1867	0.1917	0.1933

Bu diferansiyel denklemin analitik çözümü,

$$u = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\sec(\alpha_n)}{(3 + 4\alpha_n^2)} e^{-4\alpha_n^2 t} \cos 2\alpha_n \left(x - \frac{1}{2}\right) \right\} \quad (0 < x < 1)$$

Burada α_n , $\alpha \cdot \tan \alpha = \frac{1}{2}$ fonksiyonun pozitif kökleridir.

	$i = 0$ $x = 0$	$i = 1$ $x = 0.1$	$i = 2$ $x = 0.2$	$i = 3$ $x = 0.3$	$i = 4$ $x = 0.4$	$i = 5$ $x = 0.5$
$t = 0.000$	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
$t = 0.0025$	0.9400	0.9951	0.9999	1.0	1.0	1.0
$t = 0.0050$	0.9250	0.9841	0.9984	0.9999	1.0	1.0
.	.	.	.	.	.	.
$t = 0.100$	0.7176	0.7828	0.8342	0.8713	0.8936	0.9010
$t = 0.250$	0.5546	0.6052	0.6454	0.6747	0.6924	0.6984
$t = 0.500$	0.3619	0.3949	0.4212	0.4403	0.4519	0.4558
$t = 1.000$	0.1542	0.1682	0.1794	0.1875	0.1925	0.1941

Örnek: Aynı problemi sınır şartları için ileri (geri) sonlu farklar açılımı ile diferansiyel denklemi explicit (açık) metot ile çözünüz.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\delta t} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{(\delta x)^2}$$

$$\Rightarrow \quad u_{i,j+1} = u_{i,j} + r(u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}) \quad \text{ve} \quad r = \frac{\delta t}{(\delta x)^2}$$

Bu durumda $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$ için geçerlidir (sınır şartlarına ileri ve geri farklar açılımı uygulandığında)

$i = 1$ ise,

$$u_{1,j+1} = u_{1,j} + r \cdot (u_{0,j} - 2u_{1,j} + u_{2,j}) \quad i = 1$$

Eğer $x = 0$ 'daki sınır şartının ileri fark ifadesini yazarsak,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = u(0,t) & \Rightarrow \frac{u_{1,j} - u_{0,j}}{\delta x} = u_{0,j} \\ & \Rightarrow u_{0,j} = \frac{u_{1,j}}{1 + \delta x} \quad u_{0,j+1} = \frac{u_{1,j+1}}{1 + \delta x} \end{aligned}$$

$$u_{1,j+1} = u_{1,j} + r \cdot \left(\frac{u_{1,j}}{1 + \delta x} - 2u_{1,j} + u_{2,j} \right)$$

$$u_{1,j+1} = \left(1 - 2r + \frac{r}{1 + \delta x} \right) u_{1,j} + r \cdot u_{2,j} \quad i = 1 \text{ için,}$$

Eğer $\delta x = 0.1$ ve $r = \frac{1}{4}$ seçilirse,

$\delta x = 0.0025$ olur,

$$u_{1,j+1} = \frac{8}{11} u_{1,j} + \frac{1}{4} u_{2,j} \quad i = 1$$

$$u_{0,j+1} = \frac{u_{1,j+1}}{1.1}$$

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{4}(u_{i-1,j} + 2.u_{i,j} + u_{i+1,j}) \quad i = 2,3,4,5$$

$x = 0.1 * i$ ise,

	$i = 0$ $x = 0$	$i = 1$ $x = 0.1$	$i = 2$ $x = 0.2$	$i = 3$ $x = 0.3$	$i = 4$ $x = 0.4$	$i = 5$ $x = 0.5$
$t = 0.000$	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
$t = 0.0025$	0.8884	≤ 0.9773	1.0	1.0	1.0	1.0
$t = 0.0050$	0.8734	≤ 0.9607	0.9943	1.0	1.0	1.0
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
$t = 0.100$	0.6869	≤ 0.7556	0.8102	0.8498	0.8738	0.8818
$t = 0.250$	0.5206	≤ 0.5727	0.6142	0.6444	0.6628	0.6689
$t = 0.500$	0.3283	≤ 0.3611	0.3873	0.4063	0.4179	0.4218
$t = 1.000$	0.1305	≤ 0.1435	0.1540	0.1615	0.1661	0.1677

ÖDEV

1) Aynı problemi Crank-Nicolson metodu ile çözünüz. Türev sınır şartları için ileri (geri) farklar açılımını kullanınız.

2) Aynı problemi Tam Implicit metot ile çözünüz. Türev sınır şartları için merkezi farklar açılımını kullanınız.

Örnek: Aynı denklemi Crank-Nicolson metodu kullanarak gözünüz. Türev sınır şartları için merkezi farklar ifadesini kullanınız.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{(\delta x)^2} \Rightarrow \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\delta t} = \frac{1}{2} \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{(\delta x)^2} + \frac{1}{2} \frac{u_{i-1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1}}{(\delta x)^2}$$

$$-r.u_{i-1,j+1} + (2+2r)u_{i,j+1} - r.u_{i+1,j+1} = r.u_{i-1,j} + (2-2r)u_{i,j} + r.u_{i+1,j} \quad (1)$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = u(0,t) \Rightarrow \frac{u_{1,j} - u_{-1,j}}{2\delta x} = u_{0,j} \Rightarrow u_{-1,j} = u_{1,j} - 2\delta x.u_{0,j} \quad (2)$$

$$\text{Ve } u_{-1,j+1} = u_{1,j+1} - 2\delta x.u_{0,j+1} \quad (3)$$

$$-r.u_{-1,j+1} + (2+2r)u_{0,j+1} - r.u_{1,j+1} = r.u_{-1,j} + (2-2r)u_{0,j} + r.u_{1,j} \quad (4)$$

eğer $\delta x = 0.1$ seçilirse ve $r = 1$ alınırsa, (2) ve (3) denklemleri (4) no'lu denklemde yerine konulup düzenlendiğinde,

$$2.1 * u_{0,j+1} - u_{1,j+1} = -0.1 * u_{0,j} + u_{1,j} \quad i = 0 \text{ için,}$$

Geri kalan denklemler için (1) no'lu denklem kullanılabilir.

$$-u_{i-1,j+1} + 4 * u_{i,j+1} - u_{i+1,j+1} = u_{i-1,j} + u_{i+1,j} \quad i = 1,2,3,4,5$$

$j = 0$ alınırsa,

$$2.1 * u_{0,1} - u_{1,1} = -0.1 * u_{0,0} + u_{1,0} \quad i = 0$$

$$-u_{0,1} + 4 * u_{1,1} - u_{2,1} = u_{0,0} + u_{2,0} \quad i = 1$$

$$-u_{1,1} + 4 * u_{2,1} - u_{3,1} = u_{1,0} + u_{3,0} \quad i = 2$$

$$-u_{2,1} + 4 * u_{3,1} - u_{4,1} = u_{2,0} + u_{4,0} \quad i = 3$$

$$-u_{3,1} + 4 * u_{4,1} - u_{5,1} = u_{3,0} + u_{5,0} \quad i = 4$$

$$-u_{4,1} + 4 * u_{5,1} - u_{6,1} = u_{4,0} + u_{6,0} \quad i = 5$$

İlk şartlar girildiğinde ise,

$$2.1 * u_{0,1} - u_{1,1} = -0.1 + 1.0 \quad i = 0$$

$$-u_{0,1} + 4 * u_{1,1} - u_{2,1} = 1.0 + 1.0 \quad i = 1$$

$$-u_{1,1} + 4 * u_{2,1} - u_{3,1} = 1.0 + 1.0 \quad i = 2$$

$$-u_{2,1} + 4 * u_{3,1} - u_{4,1} = 1.0 + 1.0 \quad i = 3$$

$$-u_{3,1} + 4 * u_{4,1} - u_{5,1} = 1.0 + 1.0 \quad i = 4$$

$$-u_{4,1} + 4 * u_{5,1} - u_{6,1} = 1.0 + 1.0 \quad i = 5, \quad u_{6,1} = u_{4,1} \text{ ve } u_{6,0} = u_{4,0}$$

Matris düzenlemesi yapılırsa,

$$2.1 * u_0 - u_1 = -0.1 * u_0 + u_1 = -0.1 + 1.0 \quad i = 0$$

$$-u_0 + 4 * u_1 - u_2 = u_0 + u_2 = 1.0 + 1.0 \quad i = 1$$

$$-u_1 + 4 * u_2 - u_3 = u_1 + u_3 = 1.0 + 1.0 \quad i = 2$$

$$-u_2 + 4 * u_3 - u_4 = u_2 + u_4 = 1.0 + 1.0 \quad i = 3$$

$$-u_3 + 4 * u_4 - u_5 = u_3 + u_5 = 1.0 + 1.0 \quad i = 4$$

$$-u_4 + 4 * u_5 - u_6 = u_4 + u_6 = 1.0 + 1.0 \quad i = 5$$

$$\begin{array}{cccccc}
 u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \\
 \begin{bmatrix} 2.1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} -0.1+1.0 \\ 1.0+1.0 \\ 1.0+1.0 \\ 1.0+1.0 \\ 1.0+1.0 \\ 1.0+1.0 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

$$u_0 = 0.8908$$

$$u_1 = 0.9707$$

$$u_2 = 0.9922$$

$$u_3 = 0.9979$$

$$u_4 = 0.9994$$

$$u_5 = 0.9997$$



$\delta t = 0.01$ anında,

$r = 1$ ve $\delta x = 0.1 = r = \delta t / (\delta x)^2$

$j = 1$ alınırsa,

$$2.1 * u_0 - u_1 = -0.1 * u_0 + u_1 = -0.08908 + 0.9707 \quad i = 0$$

$$-u_0 + 4 * u_1 - u_2 = u_0 + u_2 = 0.8908 + 0.9922 \quad i = 1$$

$$-u_1 + 4 * u_2 - u_3 = u_1 + u_3 = 0.9707 + 0.9979 \quad i = 2$$

$$-u_2 + 4 * u_3 - u_4 = u_2 + u_4 = 0.9922 + 0.9994 \quad i = 3$$

$$-u_3 + 4 * u_4 - u_5 = u_3 + u_5 = 0.9979 + 0.9997 \quad i = 4$$

$$-u_4 + 4 * u_5 - u_6 = u_4 + u_6 = 0.9994 + 0.9994 \quad i = 5$$

$$\begin{matrix} u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \\ \begin{bmatrix} 2.1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} -0.08908 + 0.9707 \\ 0.8908 + 0.9922 \\ 0.9707 + 0.9979 \\ 0.9922 + 0.9994 \\ 0.9979 + 0.9997 \\ 0.9994 + 0.9994 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

	$i = 0$ $x = 0$	$i = 1$ $x = 0.1$	$i = 2$ $x = 0.2$	$i = 3$ $x = 0.3$	$i = 4$ $x = 0.4$	$i = 5$ $x = 0.5$
$t = 0.000$	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
$t = 0.01$	0.8908	0.9707	0.9922	0.9979	0.9994	0.9997
$t = 0.02$	0.8624	0.9293	0.9720	0.9900	0.9964	0.9979
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
$t = 0.10$	0.7179	0.7834	0.8349	0.8720	0.8944	0.9018
$t = 0.25$	0.5547	0.6054	0.6458	0.6751	0.6929	0.6989
$t = 0.50$	0.3618	0.3949	0.4212	0.4404	0.4520	0.4559
$t = 1.00$	0.1540	0.1680	0.1793	0.1874	0.1923	0.1940

NOT: $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x \frac{\partial u}{\partial x} + u + x$

Denklemleri Crank-Nicolson ile açıldığında ikinci türevin dışındaki değerler aşağıdaki hali alır,

$$\dots = \dots + 2.x_i \left[\frac{1}{2} \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2.\delta x} + \frac{1}{2} \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1}}{2.\delta x} \right] + \left[\frac{1}{2} u_{i,j} + \frac{1}{2} u_{i,j+1} \right] + x_i$$

7.5. Yakınsama (Converence) ve Stabilite

Sonlu farklar denklemlerinin sonuçlarının doğruluğunu tahmin etmek çok zordur. Fakat yakınsama ve stabilite olarak bilinen iki kriteri sağlaması halinde doğruluk basamak sayısını arttırarak ve dolayısı ile işlem sayısı arttırarak sağlar.

Eğer yaklaşık nümerik çözüm; zaman ve boyut basamakları "0"a gittiğinde analitik çözüme yakınsıyorsa çözümün yakınsak olduğu söylenir. Nümerik metot limitte analitik çözüme yakınsarsa metodun yakınsama kriterini yakaladığı söylenebilir.

Diferansiyel denklem ve sınır şartları sonlu farklar denklemi şeklinde yazıldığında sonlu sayıda zaman ve boyut basamağı için işlemler yapılır. Bu işlemler sırasında yuvarlama hataları da işleme girer. Çözüm ilerledikçe bu hatalar büyümeye başlar ise çözümün stabil olduğu söylenebilir. Stabilite gerçekte yakınsama için de gerek şarttır.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t} + O(\Delta t) = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2$$

1- denklemin temsil edememesi

2- yuvarlama hatası

$$u_{i,j+1} = r.u_{i-1,j} + (1-2r)u_{i,j} + r.u_{i+1,j} \quad \text{ve} \quad r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

Herhangi bir t anında çözüm Fourier serisine açılabilir. Eğer sabitleri ihmal edersek diferansiyel denklemin çözümü, $u(x,t) = \phi(t)e^{i\beta x}$ formunda olacaktır. Bu ifadeyi sonlu

farklar denkleminde yerine koyarak $\phi(t)$ belirlenebilir ve t büyüdükçe $\phi(t)$ 'nin sınırlı olması için kriter belirlenebilir.

$$\hat{i} = \sqrt{-1} \quad \text{ve} \quad e^{\hat{i}.\beta.x} = \cos \beta.x + \hat{i}.\sin \beta.x$$

$$\text{Zaman ilerledikçe} \quad \left| \frac{\phi(t + \delta t)}{\phi(t)} \right| \leq 1 \quad \text{olması gerekmektedir (yakınsama şartı)}$$

$$u_{i,j} = \phi(t) e^{\hat{i}.\beta.x}$$

$$u_{i-1,j} = \phi(t) e^{\hat{i}.\beta.(x-\delta x)}$$

$$u_{i+1,j} = \phi(t) e^{\hat{i}.\beta.(x+\delta x)}$$

$$u_{i,j+1} = \phi(t + \delta t) e^{\hat{i}.\beta.x}$$

Bunları diferansiyel denklem ifadesinde yerine koyarsak,

$$\phi(t + \delta t) e^{\hat{i}.\beta.x} = r.\phi(t) e^{\hat{i}.\beta.(x-\delta x)} + (1-2r).\phi(t) e^{\hat{i}.\beta.x} + r.\phi(t) e^{\hat{i}.\beta.(x+\delta x)}$$

Her iki tarafı da $\phi(t) e^{\hat{i}.\beta.x}$ ifadesine bölersek,

$$\frac{\phi(t + \delta t)}{\phi(t)} = r.e^{-\hat{i}.\beta.\delta x} + (1-2r) + r.e^{\hat{i}.\beta.\delta x}$$

$$e^{\hat{i}.\beta.\delta x} = \cos \beta.\delta x + \hat{i}.\sin \beta.\delta x$$

$$e^{-\hat{i}.\beta.\delta x} = \cos \beta.\delta x - \hat{i}.\sin \beta.\delta x$$

$$\Rightarrow e^{\hat{i}.\beta.\delta x} + e^{-\hat{i}.\beta.\delta x} = 2.\cos \beta.\delta x$$

$$\Rightarrow = (1-2r) + r.(e^{-\hat{i}.\beta.\delta x} + e^{\hat{i}.\beta.\delta x})$$

$$\Rightarrow = (1-2r) + r.(2.\cos \beta.\delta x)$$

düzenlersek,

$$\frac{\phi(t + \delta t)}{\phi(t)} = 1 - 4r \left[\frac{1 - \cos \beta \cdot \delta x}{2} \right] \quad \text{ve} \quad \frac{1 - \cos \beta \cdot \delta x}{2} = \sin^2 \frac{\beta \cdot \delta x}{2}$$

$$\Rightarrow \quad = 1 - 4r \cdot \sin^2 \frac{\beta \cdot \delta x}{2}$$

Stabilite için δx ve δt 0'a giderken $\phi(t)$ 'nin değerinin sınırlı olması gerekmektedir.

$$\left| \frac{\phi(t + \delta t)}{\phi(t)} \right| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \left| 1 - 4r \cdot \sin^2 \frac{\beta \cdot \delta x}{2} \right| \leq 1$$

alabileceği maksimum değer ($\sin^2 \frac{\beta \cdot \delta x}{2} = 1$),

$$|1 - 4r| \leq 1 \quad \text{yani} \quad -1 \leq 1 - 4r \leq 1$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq r \quad \text{ve} \quad r \leq \frac{1}{2} \text{ aralığı bulunmaktadır.}$$

$$r = \frac{\delta t}{(\delta x)^2}$$

Explicit yöntem bu yüzden kullanılmamaktadır.

Bu yaklaşıma *Von Neumann* yaklaşımı adı verilmektedir.

$\phi(t)$ 'li terimin ∞ 'a gitmeyerek sınırlı bir değer alması gerekmektedir.

7.6. Kartezyen Koordinatlarda İki Boyutlu Süreksiz Rejim (Zamana Bağlı) Isı Transfer Problemlerini Formülasyonu

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$u(x, y, t) \rightarrow u_{m,n}^A$$

$$A \rightarrow f(t) \quad , \quad m \rightarrow f(x) \quad , \quad n \rightarrow f(y)$$

$$\frac{u_{m,n}^{A+1} - u_{m,n}^A}{\delta t} = \frac{u_{m-1,n}^A - 2u_{m,n}^A + u_{m+1,n}^A}{(\delta x)^2} + \frac{u_{m,n-1}^A - 2u_{m,n}^A + u_{m,n+1}^A}{(\delta y)^2} \quad (\text{Explicit})$$

$$r_1 = \frac{\delta t}{(\delta x)^2} \quad r_2 = \frac{\delta t}{(\delta y)^2} \quad r_1, r_2 \leq \frac{1}{4}$$

Tam implicit çözüm yapılmak istenirse eşitliğin sağ tarafındaki A 'lar $(A+1)$ halini alır.

7.7. Silindirik Koordinatlarda Süreksiz Rejim (Zamana Bağlı) Isı Transfer Problemlerini Formülasyonu

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla^2 u$$

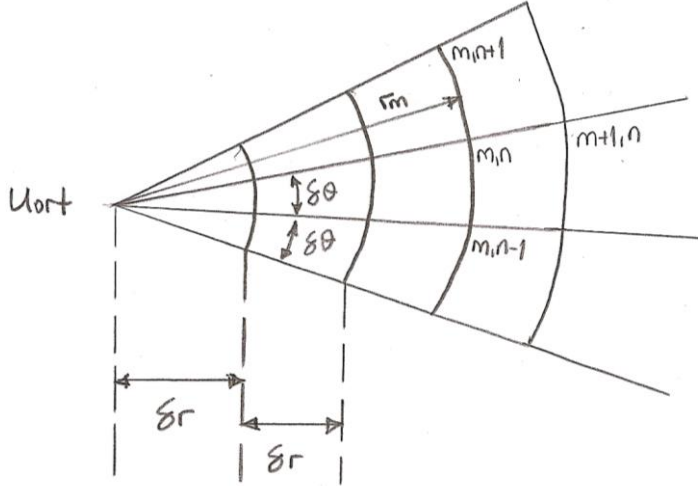
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad u(r, \theta, z, t) \rightarrow u_{m,n,k}^A$$

$$A \rightarrow f(t) \quad , \quad m \rightarrow f(r) \quad , \quad n \rightarrow f(\theta) \quad , \quad k \rightarrow f(z)$$

$$\begin{aligned} \frac{u_{m,n,k}^{A+1} - u_{m,n,k}^A}{\delta t} = & \frac{u_{m-1,n,k}^A - 2u_{m,n,k}^A + u_{m+1,n,k}^A}{(\delta r)^2} + \frac{1}{r_m} \frac{u_{m+1,n,k}^A - u_{m-1,n,k}^A}{2\delta r} + \\ & + \frac{1}{r_m^2} \frac{u_{m,n-1,k}^A - 2u_{m,n,k}^A + u_{m,n+1,k}^A}{(\delta \theta)^2} + \frac{u_{m,n,k-1}^A - 2u_{m,n,k}^A + u_{m,n,k+1}^A}{(\delta z)^2} \quad (\text{Explicit}) \end{aligned}$$

$$r_m = m \cdot \delta r$$

Tam implicit çözüm yapılmak istenirse eşitliğin sağ tarafındaki A 'lar $(A+1)$ halini alır.



Burada u_{ort} , $r = 0$ 'ı çevreleyen kafes noktalarındaki sıcaklıkların ağırlıklı ortalamasıdır. (Çünkü $r = 0$ 'da denklem çözümsüz olmaktadır)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2 \cdot x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + x^2 \cdot u$$

$$\Rightarrow \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\delta t} = 2 \cdot x_i^2 \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{(\delta x)^2} + \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2 \cdot \delta x} + x_i^2 \cdot u_{i,j} \quad (\text{Explicit})$$

Tam implicit çözüm yapılmak istenirse eşitliğin sağ tarafındaki j 'ler $(j+1)$ halini alır.

8. HİPERBOLİK DENKLEMLER

8.1. Explicit Metot ve Courant-Friedrichs-Lewy Şartı

Dalga denklemi bir hiperbolik denklemdir.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x, t) = u_{i,j} \quad \text{ve} \quad i \rightarrow x, \quad j \rightarrow t$$

$$\left. \begin{array}{l} u(x, 0) = f(x) \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = g(x) \end{array} \right\} \text{ İlk şartlar (} t = 0 \text{ anında olmak zorundadır)}$$

$$\left. \begin{array}{l} u(0, t) = 0 \\ u(1, t) = 0 \end{array} \right\} \text{ Değer homojen, eğer "a" ve "b" gibi iki farklı değere eşit olsaydı,}$$

Analitik çözüm yapılmak istendiğinde, $v(x, t) = u(x, t) - a + (a - b)x$

$$\frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{(\Delta t)^2} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{(\Delta x)^2}$$

düzenlenirse,

$$u_{i,j+1} = r^2 \cdot u_{i-1,j} + 2(1 - r^2)u_{i,j} + r^2 \cdot u_{i+1,j} - u_{i,j-1} \quad (1)$$

$$r = \frac{\delta t}{\delta x}$$

$$u_{i,1} = r^2 \cdot u_{i-1,0} + 2 \cdot (1 - r^2) u_{i,0} + r^2 \cdot u_{i+1,0} - u_{i,-1} \quad (2)$$

İlk şartlar,

$$u(x,0) = f(x) \quad \Rightarrow \quad u_{i,0} = f_i$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{u_{i,1} - u_{i,-1}}{2 \cdot \delta t} = g_i$$

$$\Rightarrow \quad u_{i,-1} = u_{i,1} - 2 \cdot \delta t \cdot g_i$$

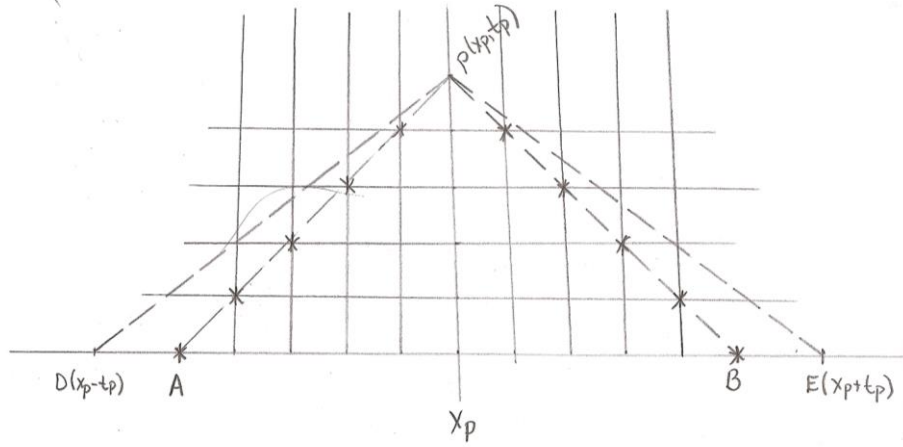
(2) no'lu denklemde yerine yazarsak,

$$u_{i,1} = r^2 \cdot u_{i-1,0} + 2 \cdot (1 - r^2) u_{i,0} + r^2 \cdot u_{i+1,0} - (u_{i,1} - 2 \cdot \delta t \cdot g_i)$$

$$u_{i,1} = \frac{1}{2} \{ r^2 \cdot u_{i-1,0} + 2 \cdot (1 - r^2) u_{i,0} + r^2 \cdot u_{i+1,0} + 2 \cdot \delta t \cdot g_i \} \quad (3)$$

Dalga denklemin analitik çözümü D'Alembert tarafından,

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \left\{ f(x+t) + f(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} g(\xi) \cdot d\xi \right\} \text{ formunda bulunmuştur.}$$



Eğer denklem (1) ve (3) yardımı ile dalga denklemini nümerik olarak çözülürse $u_{i,j}$ 'nin P noktasındaki değeri ABP içinde kalan kafes noktalarının değerine bağlı olacaktır. Farz edelim ki DA ve BE 'deki ilk şartlar değiştirildi. Bu ilk şartlarda yapılan değişiklik P 'deki analitik çözüm sonucunu değiştirmesine rağmen denklem (1) ve (3) yardımı ile bulunan P noktasındaki nümerik çözüm değeri değişmeyecektir. Bu durumda nümerik çözüm, analitik çözüme yakınsamayacaktır. O halde $r = \frac{\delta t}{\delta x}$ değeri öyle seçilmelidir ki P noktasında nümerik çözüm bulunurken DE arasındaki ilk şartlar da çözüme yansıtılmalıdır.

Courant-Frendrich-Lewy şartı olarak bilinen bu şart, $r \leq 1$ 'dir. Genellikle $r = 1$ alınır.

Örnek: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ denklemini çözünüz.

$$\left. \begin{aligned} u(x,0) &= \frac{1}{8} \sin \pi x = f(x) \\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} &= 0 = g(x) \end{aligned} \right\} \text{ İlk şartlar } (t=0)$$

$$\left. \begin{array}{l} u(0,t)=0 \\ u(1,t)=0 \end{array} \right\} \text{ Sınır şartları } (t > 0)$$

$$\delta x = \frac{1-0}{10} = 0.1 \text{ (10 parçaya böldük)} \quad r = \frac{\delta t}{\delta x} = 1 \quad \Rightarrow \quad \delta t = 0.1 \text{ olur}$$

$$u_{i,j+1} = u_{i-1,j} + u_{i+1,j} - u_{i,j-1} \quad (1)$$

$$u_{i,1} = \frac{1}{2} \{ u_{i-1,0} + u_{i+1,0} + 2.\delta t.g_{i,0} \} \quad g_{i,0} = 0 \quad (2)$$

$$u_{i,1} = \frac{1}{2} \{ u_{i-1,0} + u_{i+1,0} \} \quad (3)$$

$$u_{i,0} = f_i = \frac{1}{8} \sin \pi.x_i \quad \Rightarrow \quad u_{i,0} = \frac{1}{8} \sin(0.1 * \pi * i)$$

$$x_i = x_0 + i.\delta x \quad \Rightarrow \quad x_i = 0.1 * i$$

$$u_{0,0} = 0$$

$$u_{1,0} = \frac{1}{8} \sin(0.1 * \pi) = 0.03863$$

$$u_{2,0} = \frac{1}{8} \sin(0.2 * \pi) = 0.07347$$

$$u_{3,0} = 0.10113$$

$$u_{4,0} = 0.1189$$

$$u_{5,0} = 0.125$$

$$u_{6,0} = 0.1189$$

$$u_{7,0} = 0.10113 \quad (\text{değerlerde simetri olduğu için çubuğun yarısı için çözüm yapılması yeterli olacaktır})$$

	$i = 0$ $x = 0$	$i = 1$ $x = 0.1$	$i = 2$ $x = 0.2$	$i = 3$ $x = 0.3$	$i = 4$ $x = 0.4$	$i = 5$ $x = 0.5$		$i = 10$ $x = 1.0$	
$t = 0.0$	0.0	0.03863	0.07347	0.1013	0.1189	0.125		0.0	Şart
$t = 0.1$	0.0	0.0367	0.0699	0.0962	0.1131	0.1189		0.0	3 no'lu denklem
$t = 0.2$	0.0	0.0312	0.0594	0.0818	0.0962	0.1011		0.0	
$t = 0.3$	0.0	0.0227	0.0432	0.0594	0.0699	0.0735		0.0	1 no'lu denklem
$t = 0.4$	0.0	0.0119	0.0227	0.0312	0.0368	0.0386		0.0	
$t = 0.5$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0		0.0	
$t = 0.6$	0.0	-0.0119	-0.0227	-0.0312	-0.0368	-0.0386		0.0	
Analitik Çözüm $t = 0.3$	0.0	0.0227	0.0432	0.0594	0.0699	0.0735		0.0	

Analitik Çözüm : $u = \frac{1}{8} \sin \pi.x * \cos \pi.t$

İlk adımda (3) no'lu denklemi kullanıyoruz. Sonrada diğer denklemleri kullanarak çözüme ulaşıyoruz.

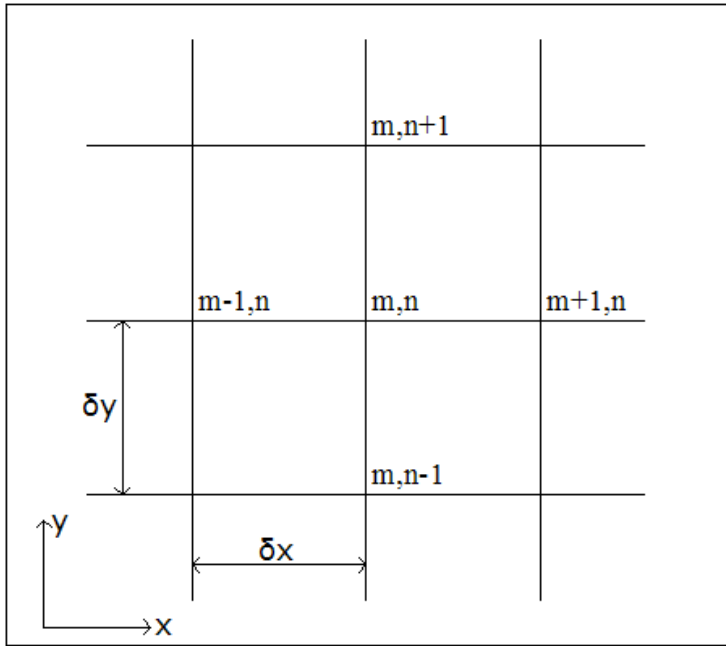
9. ELİPTİK DENKLEMLER

9.1. Kartezyen Koordinatlarda Sürekli Rejimde Formülasyon ve Çözümü

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

$$T(x, y) \rightarrow T_{m,n} \quad m \rightarrow f(x) \quad n \rightarrow f(y)$$

$$\frac{T_{m-1,n} - 2T_{m,n} + T_{m+1,n}}{(\delta x)^2} + \frac{T_{m,n-1} - 2T_{m,n} + T_{m,n+1}}{(\delta y)^2} = 0$$



Eğer $\delta x = \delta y$ ise,

$$T_{m-1,n} + T_{m+1,n} + T_{m,n-1} + T_{m,n+1} = 4T_{m,n}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\bar{q}}{k} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{T_{m-1,n} - 2.T_{m,n} + T_{m+1,n}}{(\delta x)^2} + \frac{T_{m,n-1} - 2.T_{m,n} + T_{m,n+1}}{(\delta y)^2} + \frac{\bar{q}}{k} = 0 \quad \text{ve} \quad \bar{q} \rightarrow \left(\frac{W}{m^2} \right)$$

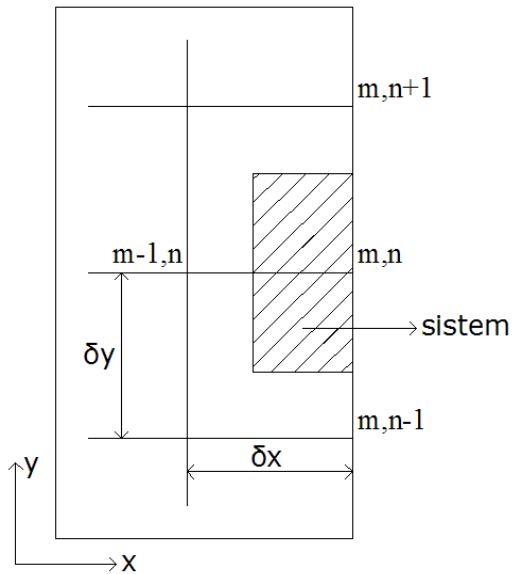
Eğer $\delta x = \delta y$ ise,

$$T_{m-1,n} + T_{m+1,n} + T_{m,n-1} + T_{m,n+1} + \frac{\bar{q}}{k} (\delta x)^2 = 4.T_{m,n}$$

9.2. Sınır Şartları

İki boyutlu sistem için sonlu farklar denklemini elde ettik. Bu denklem katı cismin içindeki kafesin her düğüm noktası için geçerlidir. Sınırlara yaklaştıkça sınır sıcaklıklarının hesabı için sınır şartlarının bilinmesi gerekir. Şimdi sınır şartlarının sonlu farklar cinsinden nasıl yazıldığını inceleyelim.

9.2.1. Akışkan Sıcaklığının ve Film Katsayısının Verilmiş Olduğu Sınır



T_{∞} : Akışkanın Sıcaklığı

h : Akışkanın Film Katsayısı

Katı Cismin Kalınlığı : b

Fourier Isı İletim Kanunu : $Q = -k.A.\frac{dT}{dn}$

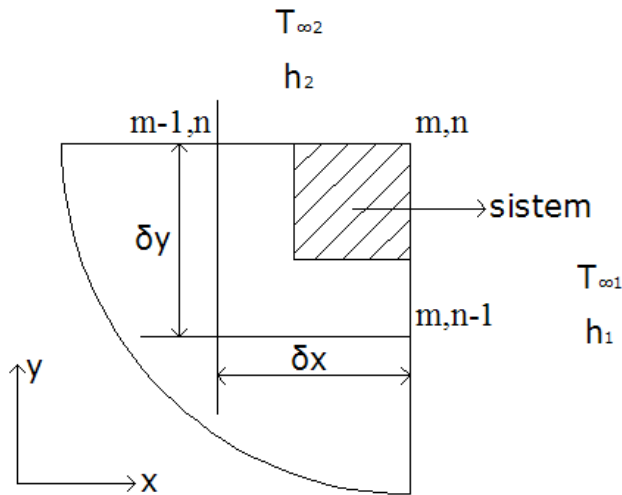
Newton Soğuma Kanunu : $Q = h.A.(T - T_{\infty})$

$$-k.\delta y.b\frac{T_{m,n} - T_{m-1,n}}{\delta x} - k\frac{\delta x}{2}b\frac{T_{m,n} - T_{m,n-1}}{\delta y} - k\frac{\delta x}{2}b\frac{T_{m,n} - T_{m,n+1}}{\delta y} = h.b.\delta y.(T_{m,n} - T_{\infty})$$

Eğer $\delta x = \delta y$ ise,

$$\frac{1}{2}(2.T_{m-1,n} + T_{m,n-1} + T_{m,n+1}) + \frac{h.\delta x}{k}T_{\infty} - T_{m,n}\left(\frac{h.\delta x}{k} + 2\right) = 0$$

Eğer aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi sınır bir köşeden ibaretse ısı iletim kanunu, Fourier ve Newton kuralları ile birlikte şekilde görülen sisteme uygulanabilir,



$$-k.\frac{\delta y}{2}.b\frac{T_{m,n} - T_{m-1,n}}{\delta x} - k\frac{\delta x}{2}b\frac{T_{m,n} - T_{m,n-1}}{\delta y} = h_1\frac{\delta y}{2}b(T_{m,n} - T_{\infty 1}) + h_2\frac{\delta x}{2}b(T_{m,n} - T_{\infty 2})$$

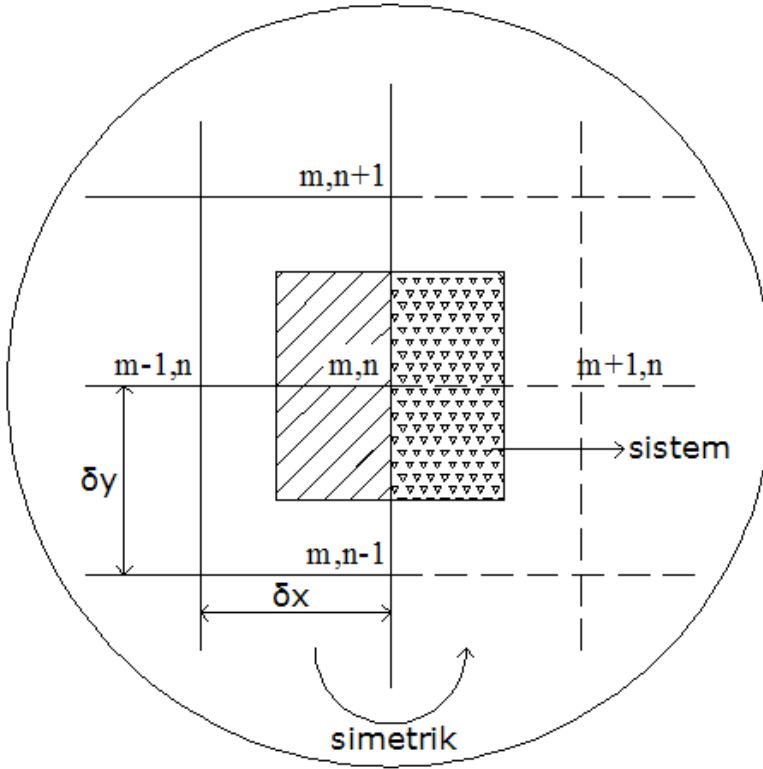
Katı cismin kalınlığını ifade eden b değişkeni eşitliğin her iki tarafında yok edilirse denklem sistemi son halini alır.

9.2.2. Sınır sıcaklığı

Sınırdaki sıcaklıklar verilmiş bu aynen kullanılır.

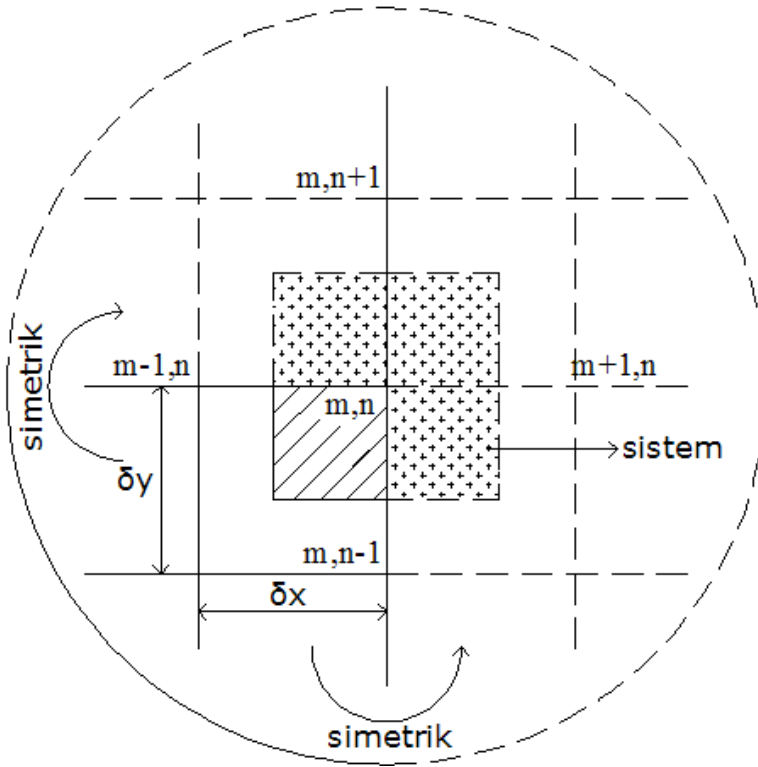
9.2.3. Yalıtılmış sınır

Isı transferinin olmadığı kabul edilmektedir.



$$-k.\delta y.b \frac{T_{m,n} - T_{m-1,n}}{\delta x} - k.\delta y.b \frac{T_{m,n} - T_{m,n-1}}{\delta x} - k.\delta x.b \frac{T_{m,n} - T_{m,n-1}}{\delta y} - k.\delta x.b \frac{T_{m,n} - T_{m,n+1}}{\delta y} = 0$$

Yalıtılmış sınır şartlarına sahip sistemlerde, sistemin simetrisi alınarak çözüm yapılabileceği gibi film katsayısı " h " ifadesi de " 0 " alınarak çözüm yapılabilir.

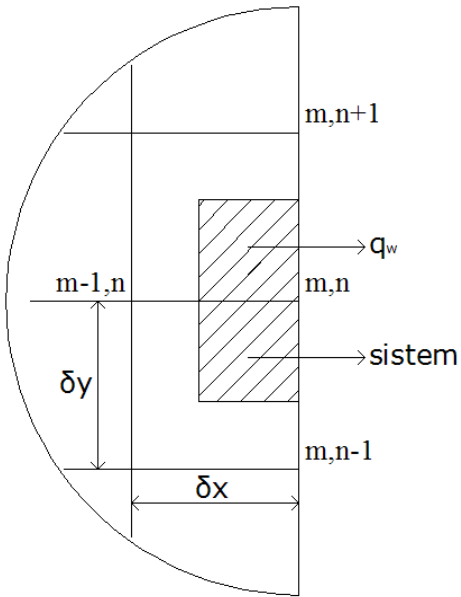


Bu durumda genel ısı iletim eşitliği aşağıdaki hali alır,

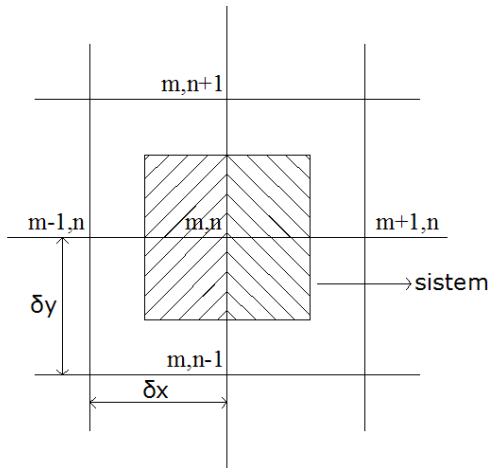
$$-k \frac{\delta y}{2} \frac{T_{m,n} - T_{m-1,n}}{\delta x} - k \frac{\delta x}{2} \frac{T_{m,n} - T_{m,n-1}}{\delta y} = 0$$

9.2.4. Sınır ısı akısı

Sınırdaki ısı akısı verilmiş ise film katsayısını verilmiş olduğu sınır için elde edilmiş olan ifade de son terim yerine $q_w \cdot \delta y \cdot b$ ifadesi konulur. Burada q_w , sistemden dış uzaya akan ısı akısıdır.



Örnek:

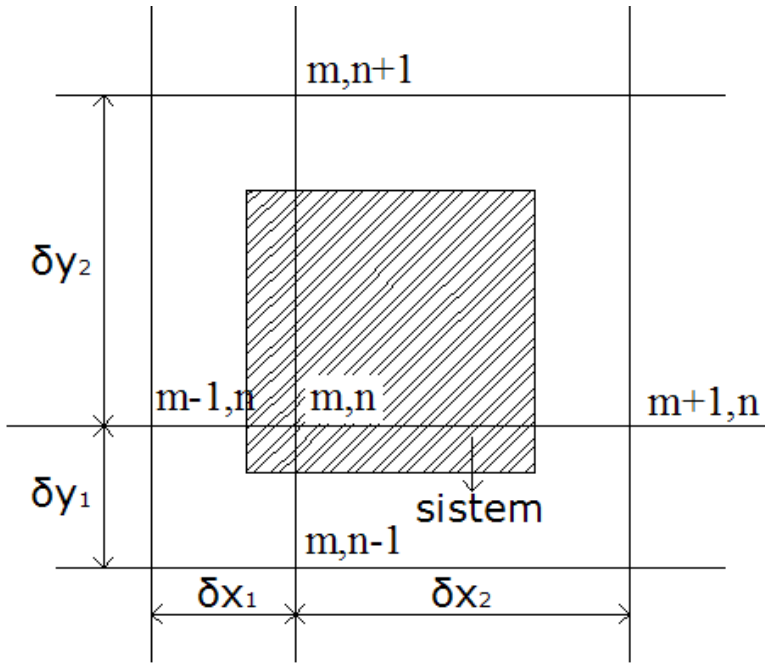


$$-k \cdot \delta y \cdot b \frac{T_{m,n} - T_{m-1,n}}{\delta x} - k \cdot \delta y \cdot b \frac{T_{m,n} - T_{m+1,n}}{\delta x} - k \cdot \delta x \cdot b \frac{T_{m,n} - T_{m,n-1}}{\delta y} - k \cdot \delta x \cdot b \frac{T_{m,n} - T_{m,n+1}}{\delta y} = 0$$

k ve b deęişkenleri sadeleřtirilir ve eřitlik $\delta x.\delta y$ 'ye bölünürse,

$$\frac{T_{m-1,n} - 2.T_{m,n} + T_{m+1,n}}{(\delta x)^2} + \frac{T_{m,n-1} - 2.T_{m,n} + T_{m,n+1}}{(\delta y)^2} = 0 \quad \Leftarrow \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

Örnek:

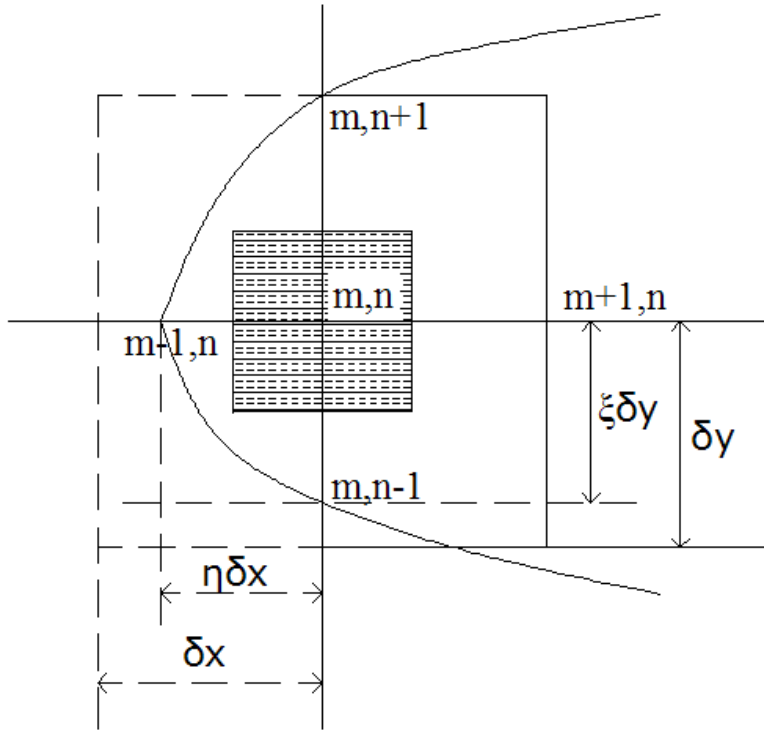


$$-k \cdot \left(\frac{\delta y_1 + \delta y_2}{2} \right) \cdot b \cdot \frac{T_{m,n} - T_{m-1,n}}{\delta x_1} - k \cdot \left(\frac{\delta y_1 + \delta y_2}{2} \right) \cdot b \cdot \frac{T_{m,n} - T_{m+1,n}}{\delta x_2}$$

$$-k \cdot \left(\frac{\delta x_1 + \delta x_2}{2} \right) \cdot b \cdot \frac{T_{m,n} - T_{m,n-1}}{\delta y_1} - k \cdot \left(\frac{\delta x_1 + \delta x_2}{2} \right) \cdot b \cdot \frac{T_{m,n} - T_{m,n+1}}{\delta y_2} = 0$$

9.3. Eğri Sınırlar

Sonlu farklar yönteminin esas faydası karmaşık sınırlar için de kullanılabilir olmasıdır. Eğer katı bir cismin sınırları koordinat eksenine paralel değilse,



Sistemin boyutları,

$$\left(\frac{\delta x}{2} + \frac{\eta \cdot \delta x}{2} \right) = \frac{\delta x}{2} (1 + \eta)$$

$$\left(\frac{\delta y}{2} + \frac{\xi \cdot \delta y}{2} \right) = \frac{\delta y}{2} (1 + \xi)$$

$$-k \cdot \frac{\delta y}{2} (1 + \xi) b \frac{T_{m,n} - T_{m-1,n}}{\eta \cdot \delta x} - k \cdot \frac{\delta y}{2} (1 + \xi) b \frac{T_{m,n} - T_{m+1,n}}{\delta x}$$

$$-k \cdot \frac{\delta x}{2} (1 + \eta) b \frac{T_{m,n} - T_{m,n-1}}{\xi \cdot \delta y} - k \cdot \frac{\delta x}{2} (1 + \eta) b \frac{T_{m,n} - T_{m,n+1}}{\delta y} = 0$$

Eğer $\delta x = \delta y$ ise,

$$\frac{2}{(1+\xi)}T_{m,n+1} + \frac{2}{(1+\eta)}T_{m+1,n} + \frac{2}{\xi.(1+\xi)}T_{m,n-1} + \frac{2}{\eta.(1+\eta)}T_{m-1,n} - \left(\frac{2}{\eta} + \frac{2}{\xi}\right)T_{m,n} = 0$$

Eğer $\eta = 1$ ve $\xi = 1$ ise,

$$T_{m,n+1} + T_{m+1,n} + T_{m,n-1} + T_{m-1,n} - 4.T_{m,n} = 0 \text{ (genel formül)}$$

10. GAUSS-SEIDEL NOKTA-NOKTA İTERASYON METODU

İterasyon metotlarından en basiti olup değişken değerlerinin her bir kafes noktasında göz önüne alınarak hesaplama yapılır. Eğer sonlu farklar denklemi “P” kafes noktası için aşağıdaki gibi verilirse,

$$a_p.T_p = \sum a_{nb}.T_{nb} + b$$

Burada nb indisi komşu noktaları göstermektedir.

$$4.T_{m,n} = 3.T_{m-1,n} + 2.T_{m+1,n} + 8.T_{m,n-1} + 3.T_{m,n+1} + K \text{ (örnek)}$$

$$T_p = \frac{\sum a_{nb}.T_{nb}^* + b}{a_p}$$

T_{nb}^* , komşu noktaların iterasyondan önceki değerleri veya ilk tahmini değerleridir. Her bir kafes noktası için yukarıdaki bağıntı ile yeni değerler bulunabilir. İterasyon arasındaki fark belirli bir ε ’dan küçük oluncaya kadar iterasyona devam edilir.

Örnek: $T_1 = 0.4 * T_2 + 0.2$

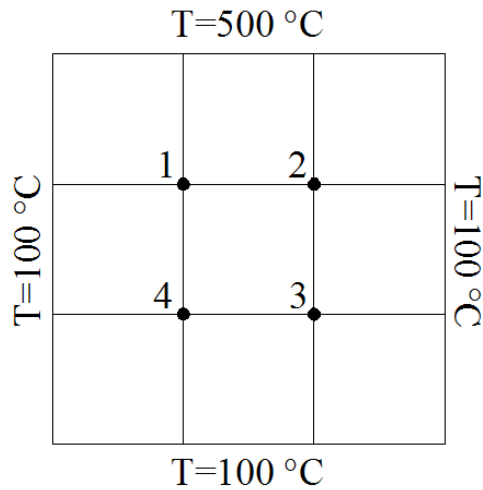
$$T_2 = T_1 + 1.0$$

, T_1 ve T_2 değerlerini Gauss-Seidel iterasyon metodu ile bulunuz.

İterasyon No	0	1	2	3	4	5	...	∞
T_1	0 (tahmin)	0.2	0.68	0.872	0.949	0.98	...	1
T_2	0 (tahmin)	1.2	1.68	1.872	1.949	1.98	...	2

İterasyon devam ederken, iterasyon içerisinde ortaya çıkan yeni değerler kullanılıyor.

Örnek: Şekilde verilen sınır şartları altında katı cisim içindeki sıcaklık dağılımını Gauss-Seidel iterasyon metodunu kullanarak bulunuz. ($\delta x = \delta y$)



$$4.T_1 = 100 + 500 + T_2 + T_4$$

$$4.T_2 = 500 + 100 + T_1 + T_3$$

$$4.T_3 = T_2 + T_4 + 100 + 100$$

$$4.T_4 = 100 + T_1 + T_3 + 100$$

$$T_1 = \frac{T_2 + T_4}{4} + 150$$

$$T_2 = \frac{T_1 + T_3}{4} + 150$$

$$T_3 = \frac{T_2 + T_4}{4} + 50$$

$$T_4 = \frac{T_1 + T_3}{4} + 50$$

İterasyon No	0 (tahmini değerler)	1	2	3	...	∞
T_1	300	275	257,33	252,25	...	250
T_2	300	268,75	256,13	251,61	...	250
T_3	200	167,19	154,17	151,12	...	150
T_4	200	160,55	152,88	150,84	...	150

Gauss-Seidel metodu her zaman yakınsamaz, yakınsama için Scarborough kriterini sağlaması yeter şarttır.

$$\text{Scarborough kriteri} \quad ; \quad \frac{\sum |a_{nb}|}{|a_p|} \left\{ \begin{array}{l} \leq 1 \text{ bütün denklemler için} \\ < 1 \text{ en az bir denklem için} \end{array} \right.$$

Mesela, $T_1 = 0.4 * T_2 + 0.2 \Rightarrow \frac{0.4}{1}$ ve $T_2 = T_1 + 1.0 \Rightarrow \frac{1.0}{1.0}$ değerleri için sağlar.

Ama eşitlikleri değiştirirsek eğer,

$$T_1 = T_2 - 1.0 \Rightarrow \frac{1.0}{1.0} \text{ ve } T_2 = 2.5 * T_1 - 0.5 \Rightarrow \frac{2.5}{1.0} = 2.5 \text{ denklemleri Gauss-Seidel iterasyon}$$

metodu çözümünü sağlamaz.

İterasyon No	0	1	2	3
T_1	0	-1	-4	-11.5
T_2	0	-3	-10.5	...