# Ağlar ve Süzgeçler

## ⊛ Yönlendirilmiş Küme

$I \neq \emptyset$ olsun. Eğer $I$ üzerinde "$\leq$" bağıntısı:

1) $\forall x \in I, \quad x \leq x$ (Yansıma)

2) $\forall x,y,z \in I, \quad x \leq y$ ve $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ dir. (Geçişme)

3) $\forall x,y \in I, \quad x \leq k$ ve $y \leq k$ oş $k \in I$ vardır. (Poz. Yönlendirme)

özelliklerini sağlıyorsa bu taktirde $I$ kümesine "$\leq$" bağıntısına göre yönlendirilmiş bir küme veya kısaca $I$ kümesine yönlendirilmiş küme denir.

**Ör:** $(X,\tau)$ bir topolojik uzay ve $\beta_x = \{ G \subseteq X \mid x \in G \in \tau \}$ olsun. Buna göre, $\beta_x$ üzerinde "$\leq$" bağıntısı aşağıdaki gibi tanımlansın:

"$\forall G,H \in \beta_x$ için $G \leq H \Leftrightarrow H \subseteq G$"

Buna göre, $\beta_x$ sınıfının "$\leq$" bağıntısına göre yönlendirilmiş olduğunu gösteriniz.

1) $\forall G \in \beta_x$ için $G \subseteq G$ yazılabilir. Çünkü bir küme kendisinin alt kümesidir.

Buna göre $G \subseteq G \Rightarrow G \leq G$ dir.

2) $\forall G,H,U \in \beta_x$ olsun. Kabul edelim ki $G \leq H$ ve $H \leq U$ olsun. Buna göre $G \leq U$ olacak mı? Buna bakalım.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ G \leq H \Rightarrow H \subseteq G \\ \bullet\ H \leq U \Rightarrow U \subseteq H \end{array}\right\} \Rightarrow U \subseteq H \text{ ve } H \subseteq G$$

$\Rightarrow U \subseteq G$ , (Çünkü alt küme olma bağıntısı geçişkendir),

$\Rightarrow G \leq U$

$\Rightarrow$ "$\leq$" bağıntısı geçişme özelliğini sağlar.

3) $\forall G, H \in \mathcal{B}_x$ olsun. Buna göre,

$$\left.\begin{array}{l} G \in \mathcal{B}_x \Rightarrow x \in G \in \tau \\ H \in \mathcal{B}_x \Rightarrow x \in H \in \tau \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x \in G \cap H, \text{ (x ortak eleman olduğundan)}, \\ G \cap H \in \tau, \text{ ($\tau$ topoloji olduğundan sonlu kesişimler yine topolojiye aittir.)}, \end{array}$$

elde edilir. Eğer biz $W = G \cap H$ dersek $x \in W \in \tau$ olduğundan $W \in \mathcal{B}_x$ tir. Ayrıca

$$\left.\begin{array}{l} W = G \cap H \subseteq G \\ W = G \cap H \subseteq H \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} W \subseteq G \\ W \subseteq H \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} G \leq W \\ H \leq W \end{array}\right.$$

elde edilir. O halde pozitif yönlendirme özelliğide sağlanır.

O halde sonuç olarak $\mathcal{B}_x$ sınıfı yönlendirilmiş bir sınıftır.

**ÖR →** $X$ ve $Y$ kümeleri sırasıyla $\overset{1}{\leq}$ ve $\overset{2}{\leq}$ bağıntılarıyla yönlendirilmiş kümeler olsun. Buna göre $X \times Y$ kartezyen çarpım kümesi üzerinde $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$ için $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 \overset{1}{\leq} x_2$ ve $y_1 \overset{2}{\leq} y_2$ şeklinde tanımlanan "$\leq$" bağıntısına göre yönlendirilmiş bir kümedir. Gösteriniz.

1) $\forall (x, y) \in X \times Y$ için $x \in X$ ve $y \in Y$ dir. Buna göre $X$ ve $Y$ birer yönlendirilmiş küme olduğundan

$$\left.\begin{array}{l} x \in X \Rightarrow x \overset{1}{\leq} x \text{ , ($X$ yönlendirilmiş old. $\overset{1}{\leq}$ yansıma öz. sağlar)}, \\ y \in Y \Rightarrow y \overset{2}{\leq} y \text{ , ($Y$ yönlendirilmiş old. $\overset{2}{\leq}$ yansıma öz. sağlar)}, \end{array}\right\} \Rightarrow (x, y) \leq (x, y)$$

yansıma özelliği sağlanır.

2) $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in X \times Y$ için $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$ ve $(x_2, y_2) \leq (x_3, y_3)$ olsun. Buna göre $X$ ve $Y$ kümeleri yönlendirilmiş olduğundan $\overset{1}{\leq}$ ve $\overset{2}{\leq}$ bağıntıları geçişme özelliklerini sağlayacaktır. Bu durum dikkate alınırsa

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ (x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \Rightarrow x_1 \overset{1}{\leq} x_2 \text{ ve } y_1 \overset{2}{\leq} y_2 \\ \bullet\ (x_2, y_2) \leq (x_3, y_3) \Rightarrow x_2 \overset{1}{\leq} x_3 \text{ ve } y_2 \overset{2}{\leq} y_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 \overset{1}{\leq} x_2 \text{ ve } x_2 \overset{2}{\leq} x_3 \\ y_1 \overset{1}{\leq} y_2 \text{ ve } y_2 \overset{2}{\leq} y_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 \overset{1}{\leq} x_3 \\ y_1 \overset{2}{\leq} y_3 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow (x_1, y_1) \leq (x_3, y_3)$

elde edilir.

3) $\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2)\in X\times Y$ için $x_1,x_2\in X$ ve $y_1,y_2\in Y$ yazılabilir.

Buna göre $X$ ve $Y$ yönlendirilmiş küme olduğundan

$$x_1,x_2\in X \Rightarrow x_1 \overset{1}{\leq} x \quad \text{ve} \quad x_2 \overset{1}{\leq} x \quad \text{oş} \quad x\in X \text{ vardır}$$

$$y_1,y_2\in Y \Rightarrow y_1 \overset{2}{\leq} y \quad \text{ve} \quad y_2 \overset{2}{\leq} y \quad \text{oş} \quad y\in Y \text{ vardır.}$$

Buna göre

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \overset{1}{\leq} x \text{ ve } y_1 \overset{2}{\leq} y \Rightarrow (x_1,y_1)\leq (x,y) \\ x_2 \overset{1}{\leq} x \text{ ve } y_2 \overset{2}{\leq} y \Rightarrow (x_2,y_2)\leq (x,y) \end{array}\right\} \text{oş } (x,y)\in X\times Y$$

vardır. O halde "$\leq$" bağıntısı $X\times Y$ üzerinde yansıma, geçişme ve pozitif yönlendirme özelliklerini sağladığından $X\times Y$ bu bağıntıya göre yönlendirilmiş bir kümedir.

**ÖR:** Doğal sayılar kümesinin "$\leq$" bağıntısına göre yönlendirilmiş bir küme olduğunu gösteriniz.

1) $\forall n\in \mathbb{N}$ için $n\leq n$ dir.

2) $\forall m,n,k\in \mathbb{N}$ için $m\leq n$ ve $n\leq k \Rightarrow m\leq k$ dır.

3) $\forall m,n\in \mathbb{N}$ için $k=\underbrace{1}_{\in \mathbb{N}}+\underbrace{\max\{m,n\}}_{\in \mathbb{N}}\in \mathbb{N}$ olarak alalım. Buna göre

$m\leq k$ ve $n\leq k$ yazılabilir.

**ÖR:** Kapalı $[a,b]$ aralığında bir $f$ fonksiyonun Riemann integrali tanımlanırken $[a,b]$ aralığının

$$a=a_0<a_1<a_2<\cdots<a_n=b \quad --- (*)$$

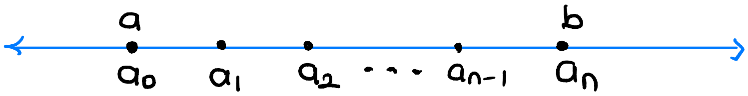
bölüntüleri kurulur ve en büyük $[a_{i-1},a_i]$ alt aralığın boyu sıfıra giderken, Riemann toplamlarının infimum ve supremum değerlerinin olup olmadığına bakılır. Alt aralıkların içice olan $(*)$ bölüntülerinin sınıfının yönlendirilmiş bir sınıf olduğunu gösteriniz.

Göstermek istediğimiz şeyi matematiksel olarak yazalım.

$$\mathcal{A} = \left\{ A = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\} \;\middle|\; a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b,\ x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

sınıfı üzerinde $\forall A = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n\} \in \mathcal{A}$ için

$$\|A\| = \max\{ |a_k - a_{k-1}| : k = 1, 2, \dots, n \}$$




şeklinde bir norm tanımlayım. Buna göre $\forall A, B \in \mathcal{A}$ için

$$A \dot{\leqslant} B \iff \|A\| \geqslant \|B\|$$

şeklinde bir bağıntı tanımlayalım. Buna göre

$$A = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_m\},\quad B = \{b_0, b_1, \dots, b_n\},\quad C = \{c_0, c_1, \dots, c_p\}$$

olmak üzere $A, B, C \in \mathcal{A}$ olsun. Buna göre

1) $\|A\| \geqslant \|A\| \Rightarrow A \dot{\leqslant} A$ sağlanır.

2) $A \dot{\leqslant} B$ ve $B \dot{\leqslant} C$ olsun. Buna göre

$$\left.\begin{array}{l} A \dot{\leqslant} B \Rightarrow \|B\| \geqslant \|A\| \\ B \dot{\leqslant} C \Rightarrow \|C\| \geqslant \|B\| \end{array}\right\} \Rightarrow \|C\| \geqslant \|A\| \Rightarrow A \dot{\leqslant} C$$

elde edilir.

3) $A = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_m\}$ ve $B = \{b_0, b_1, \dots, b_n\}$ kümelerinin elemanlarını kullanarak $\mathcal{A}$ sınıfına ait başka bir bölüntü kümesi tanımlayalım. $k = 0, 1, 2, \dots, \max\{m, n\}$ için

$$d_k = \begin{cases} a_k, & a_k \leqslant b_k \text{ ise} \\ b_k, & b_k < a_k \text{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere $\Delta = \{d_0, d_1, \dots, d_{\max\{m,n\}}\} \in \mathcal{A}$ dır ve

$$\left.\begin{array}{l} \|A\| \geqslant \|\Delta\| \\ \|B\| \geqslant \|\Delta\| \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A \dot{\leqslant} \Delta \\ B \dot{\leqslant} \Delta \end{array}$$

elde edilir. O halde $\mathcal{A}$ yönlendirilmiş bir kümedir.

## ⊛ Ağ ve Yakınsak Ağ

→ $X \neq \emptyset$ ve $I$ yönlendirilmiş bir küme olsun. Tanım kümesi $I$ ve değer kümesi $X$ olan bir fonksiyonun görüntü kümesine terimleri $X$ kümesinde olan ağ denir.

→ Her dizi bir ağdır ancak karşıtı her zaman doğru değildir.

→ $(a_\alpha)_{\alpha \in I} \subseteq X$ veya $(a_\alpha) \subseteq X$ gösterimleri terimleri $X$ de olan $(a_\alpha)$ ağını temsil etmektedir.

→ $(a_\alpha) \longrightarrow a \iff a \in G$ ve $\forall G \in \tau$ için $\exists \alpha_0 \in I$ ∂,

$\forall \alpha > \alpha_0$ olduğunda $a_\alpha \in G$ dir.

→ $(X,\tau)$ ve $(Y,\sigma)$ topolojik uzay ve $f:(X,\tau) \longrightarrow (Y,\sigma)$ fonksiyonu verilsin. Buna göre,

$f$ fonksiyonu $a \in X$ noktasında ağ anlamında süreklidir $\iff$ $(a_\alpha) \longrightarrow a$ ve $\forall (a_\alpha)_{\in I} \subseteq X$ ağı için $f(a_\alpha) \longrightarrow f(a)$ dır.

→ Bir fonksiyonun bir noktadaki sürekliliği fonksiyonun o noktadaki ağ anlamındaki sürekliliğine eş değerdir.

→ $(a_\alpha)_{\alpha \in I} \subseteq X$ olsun. Eğer her $A \subseteq X$ için

$$\{a_{\alpha_0+1}, a_{\alpha_0+2}, \dots\} \subseteq A \quad \text{veya} \quad \{a_{\alpha_0+1}, a_{\alpha_0+2}, \dots\} \subseteq A^c$$

olacak şekilde bir $\alpha_0 \in I$ bulunabiliyorsa $(a_\alpha)$ ağına aşkın ağ denir.

**Ör/** $\left(3 - \frac{1}{x}\right)_{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}$ ağının $\mathbb{R}$ nin alışılmış uzayında 3 noktasına yakınsadığını gösteriniz.

$(\mathbb{R}, \tau)$ alışılmış uzayı göstersin. Buna göre $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasını

$\forall \varepsilon > 0$ için $x_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ olacak şekilde seçersek

$\forall \varepsilon > 0$ için $\forall x > x_0$ olduğunda

$$x > x_0 \Rightarrow x > \frac{1}{\varepsilon} > 0 \quad , \left( x_0 > \frac{1}{\varepsilon} \text{ old} \right),$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{x} < \varepsilon \quad , \text{(ifadenin çarpmaya göre tersinde işaret değişir)},$$

$$\Rightarrow -\varepsilon < \frac{1}{x} < \varepsilon \quad , \text{(Bir ifade sıfırdan büyükse negatif bir sayıdan da büyüktür)},$$

$$\Rightarrow -\varepsilon < -\frac{1}{x} < \varepsilon \quad , \text{(Eşitsizliği } (-1) \text{ ile çarparsak eşitsizlik yön değiştirir)},$$

$$\Rightarrow 3-\varepsilon < 3-\frac{1}{x} < 3+\varepsilon \quad , \text{(Eşitsizlikte her tarafa 3 sayısını eklersek eşitsizlik değişmez)},$$

$$\Rightarrow 3-\frac{1}{x} \in (3-\varepsilon, 3+\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \left(3-\frac{1}{x}\right)_{x \in \mathbb{R}-\{0\}} \longrightarrow 3$$

elde edilir ki istenilen gösterilmiş olur.

**ÖR:** $(X,d)$ metrik uzay ve $I$ yönlendirilmiş bir küme olmak üzere $(a_\alpha)_{\alpha \in I} \subseteq X$ ve $a \in X$ olsun. Buna göre

$$(a_\alpha) \longrightarrow a \iff d(a_\alpha, a) \longrightarrow 0$$

olduğunu gösteriniz.

Şunu not edelim bu soru için: $(a_\alpha) \longrightarrow a$ demek aslında $(X,d)$ metrik uzayında $d$ metriğine göre yakınsamadır. Ayrıca $d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ tanımlı olduğundan $b_\alpha = d(a_\alpha, a)$ dersek $(b_\alpha) \longrightarrow 0$ demek aslında $\mathbb{R}$ nin alışılmış uzayında yakınsamadır.

$(\Rightarrow)$: Kabul edelim ki $(a_\alpha) \longrightarrow a$ olsun. Buna göre,

$a_\alpha \to a \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha_0 \in I \ \ni,\ \forall \alpha > \alpha_0$ olduğunda

$$d(a_\alpha, a) < \varepsilon \quad --- (*)$$

yazılabilir. Buna göre $b_\alpha = d(a_\alpha, a)$ dersek $(b_\alpha)_{\alpha \in I}$ ağının $\mathbb{R}$ nin alışılmış uzayına göre sıfıra yakınsadığını gösterelim

$\forall \varepsilon > 0,\ \forall \alpha > \alpha_0$ olduğunda

$$|b_\alpha - 0| = |b_\alpha| = |d(a_\alpha, a)| = d(a_\alpha, a) < \varepsilon \text{, (* dan),}$$

yazılabilir ki bu $\mathbb{R}$ nin alışılmış uzayına göre $(b_\alpha) \to 0$ olduğunu yani $d(a_\alpha, a) \to 0$ olduğunu gösterir.

$(\Leftarrow)$: Eğer $d(a_\alpha, a) \to 0$ ise durum benzer ve açık bir şekilde $(a_\alpha) \to a$ dır.

⊛ **Süzgeç**: $X \neq \emptyset$ ve $\emptyset \neq S \subseteq P(X)$ küme ailesi verilsin. Eğer $S$ ailesi:

s1) $\emptyset \notin S$

s2) $\forall A, B \in S$ için $A \cap B \in S$

s3) $\forall A \in S$ için $A \subseteq B \Rightarrow B \in S$

özelliklerini sağlarsa $S$ ailesine $X$ üzerinde bir süzgeçtir denir.

**ÖR** $(X, \tau)$ bir topolojik uzay, $x \in X$ ve $N(x)$ sınıfı $x$ elemanın komşuluklar ailesi olsun. Buna göre $N(x)$ ailesinin bir süzgeç olduğunu gösteriniz.

Matematiksel olarak $N(x)$ ailesini yazarsak;

$$N(x) = \{ N \subseteq X \mid x \in G \in \tau \text{ için } G \subseteq N \}$$

olur.

s1) $\forall N \in N(x) \Rightarrow \exists G \in \tau,\ x \in G \subseteq N$
$\Rightarrow x \in N$
$\Rightarrow N \neq \emptyset$

olduğundan $\emptyset \notin N(x)$ tir.

(Ayrıca $x \in N(x)$ old. $N(x) \neq \emptyset$ olduğu açıktır) s2) $\forall A,B \in N(x)$ olsun. Buna göre

$$A \in N(x) \Rightarrow \exists G_A \in \tau, \quad x \in G_A \subseteq A \quad --- (*)$$

$$B \in N(x) \Rightarrow \exists G_B \in \tau, \quad x \in G_B \subseteq B \quad --- (**)$$

yazılabilir. Ayrıca $(X,\tau)$ bir topolojik uzay olduğundan bu uzaydaki iki elemanın arakesiti de bu uzaya ait olacağından

$$\left.\begin{array}{l} x \in G_A \\ x \in G_B \end{array}\right\} \Rightarrow x \in G_A \cap G_B \in \tau$$

yazılabilir. Ayrıca $(*)$ ve $(**)$ dan $G_A \cap G_B \subseteq A \cap B$ yazılabilir.

Sonuç olarak $W = G_A \cap G_B$ olmak üzere

$x \in W \in \tau$ için $W \subseteq A \cap B \Rightarrow A \cap B \in N(x)$ elde edilir.

s3) $A,B \subseteq X$ olmak üzere $\forall A \in N(x)$ için $A \subseteq B$ olsun. Buna göre;

$$A \in N(x) \Rightarrow \exists G \in \tau, \quad x \in G \subseteq A$$

$$\Rightarrow \exists G \in \tau, \quad x \in G \subseteq B, \quad \left( \underbrace{G \subseteq A \subseteq B \Rightarrow G \subseteq B}_{\text{geçişme öz}} \right),$$

$$\Rightarrow B \in N(x)$$

yazılabilir. $N(x)$ sınıfı $X$ üzerinde s1, s2, s3 özelliklerini sağladığından $X$ üzerinde bir süzgeçtir.

**Ör:** $\emptyset \neq A \subseteq X$ olmak üzere $S_A = \{ B \subseteq X \mid A \subseteq B \}$ ailesinin $X$ üzerinde bir süzgeç olduğunu gösteriniz.

s1) $\forall B \in S_A$ için $\emptyset \neq A \subseteq B \Rightarrow B \neq \emptyset \Rightarrow \emptyset \notin S_A$ dır.

(Ayrıca $X \in S_A$ old $S_A \neq \emptyset$ dır.)

s2) $\forall B_1, B_2 \in S_A$ için $\left.\begin{array}{l} A \subseteq B_1 \\ A \subseteq B_2 \end{array}\right\} \Rightarrow A \cap A \subseteq B_1 \cap B_2$, (Taraf tarafa arakesit aldık),

$\Rightarrow A \subseteq B_1 \cap B_2$, ($A \cap A = A$ old.),

$\Rightarrow B_1 \cap B_2 \in S_A$ dır, ($S_A$ nın tanımından), S3) $B \in S_A$ ve $B \subseteq C$ olsun. Buna göre

$B \in S_A \Rightarrow A \subseteq B$

$\Rightarrow A \subseteq C$ , ( $A \subseteq B$ ve $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ geçişme öz. ),

$\Rightarrow C \in S_A$

$S_1, S_2$ ve $S_3$ koşulları sağlandığından $S_A$ sınıfı $X$ üzerinde bir süzgeçtir.

**ÖRN** $X$ sonsuz bir küme olmak üzere $S = \{ A \subseteq X \mid A^c \text{ sonlu} \}$ şeklinde verilen ailenin $X$ üzerinde bir süzgeç olduğunu gösteriniz.

S1) $\emptyset^c = X$ ve $X$ sonsuz bir küme olduğundan $\emptyset \notin S$ dir. ( Ayrıca $X^c = \emptyset$ sonlu old $X \in S \Rightarrow S \neq \emptyset$ dir. )

S2) $A, B \in S$ olsun. Buna göre $A^c$ sonlu ve $B^c$ sonludur. Sonlu iki kümenin birleşimlerinin de sonlu olduğunu biliyoruz o halde De Morgan kuralından $\underbrace{(A \cap B)^c}_{\text{sonlu}} = \underbrace{\underbrace{A^c}_{\text{sonlu}} \cup \underbrace{B^c}_{\text{sonlu}}}_{\text{sonlu}}$ kümesi de sonlu olup

$A \cap B \in S$ tir.

S3) $A \in S$ ve $A \subseteq B \subseteq X$ olsun. Buna göre $A \in S$ olduğundan $A^c$ sonludur.

Buna göre

$A \subseteq B \Rightarrow \underbrace{B^c}_{\text{sonlu olmalı}} \subseteq \underbrace{A^c}_{\text{sonlu}}$ , ( $\forall x$, $x \in A \Rightarrow x \in B \equiv x \notin B \Rightarrow x \notin A$
$\equiv x \in B^c \Rightarrow x \in A^c$ ),

$\Rightarrow B^c$ sonludur. ( Çünkü sonlu bir kümenin alt kümesi de sonludur ),

$\Rightarrow B \in S$ tir.

O halde $S$ sınıfı S1, S2 ve S3 özelliklerini sağladığından $X$ üzerinde bir süzgeçtir.

**ÖDEV** $X$ sayılamaz bir küme ve $F = \{ A \subseteq X \mid A^c = X - A \text{ sayılabilir} \}$ ailesinin $X$ üzerinde bir süzgeç olduğunu gösteriniz.

ÖR: $X$ kümesi üzerinde $\{S_i\}_{i\in I}$ süzgeçler ailesi verilmiş olsun. Buna göre bu süzgeçlerin arakesiti olan $S=\bigcap_{i\in I} S_i$ ailesinin de bir süzgeç olduğunu gösteriniz.

S1) $\forall A\in S$ için $A\in S \Rightarrow A\in \bigcap_{i\in I} S_i$

( Ayrica $S_i\neq\emptyset$ old. $S\neq\emptyset$ dir. Gözlemleyiniz. )

$\Rightarrow \forall i\in I,\ A\in S_i$

$\Rightarrow A\neq\emptyset$, ( $S_i$ ler süzgeç old. $\emptyset\notin A$ ),

$\Rightarrow \emptyset\notin S$

S2) $\forall A,B\in S$ için $A,B\in S \Rightarrow A,B\in \bigcap_{i\in I} A_i$

$\Rightarrow \forall i\in I,\ A,B\in S_i$

$\Rightarrow \forall i\in I,\ A\cap B\in S_i$, ( $S_i$ ler süzgeç old. ),

$\Rightarrow A\cap B\in \bigcap_{i\in I} A_i$

$\Rightarrow A\cap B\in S$

S3) $\forall A\in S$ için $B\subseteq X$ olmak üzere $A\subseteq B$ olsun. Buna göre

$A\in S \Rightarrow A\in \bigcap_{i\in I} S_i$

$\Rightarrow \forall i\in I,\ A\in S_i$

$\Rightarrow \forall i\in I,\ B\in S_i$, ( $S_i$ ler süzgeç old. ),

$\Rightarrow B\in \bigcap_{i\in I} S_i$

$\Rightarrow B\in S$

elde edilir. O halde S1, S2 ve S3 özellikleri sağlandığından $S$ ailesi $X$ üzerinde bir süzgeçtir.

ÖR: $X \neq \emptyset$ ve $X$ üzerinde $S$ süzgeci tanımlansın. Buna göre;

a) $X \in S$

b) $A \in S \Rightarrow A^c = X - A \notin S$

c) $A \in S \Rightarrow \overline{A} \in S$

d) $A_1, A_2, A_3, ---, A_n \in S \Rightarrow \bigcap_{k=1}^{n} A_k \neq \emptyset$

e) $A \in S$ ve $B \subseteq X \Rightarrow A \cup B \in S$

f) $A, B \in S \Rightarrow A \cup B \in S$

özelliklerinin sağlandığını gösteriniz.

**a)** $S$, $X$ üzerinde süzgeç old. $S \neq \emptyset$ ve $\emptyset \notin S$ olduğunu biliyoruz. Buna göre $\emptyset \neq B \in S$ öş $B \subseteq X$ kümesi vardır. Yine $S$ nin bir süzgeç olmasını kullanırsak

$$B \in S \text{ ve } B \subseteq X \Rightarrow X \in S \text{ dir.}$$

**b)** $A \in S$ olsun. (QED) Kabul edelim ki $A^c \in S$ de olsun. Buna göre $S$ süzgeç olduğundan $A, A^c \in S \Rightarrow A \cap A^c \in S$ olması gerekir. Ancak durum hiç de böyle değildir. Çünkü

$A \cap A^c = \emptyset \notin S$ dir. (Çelişki). O halde $A^c \notin S$ dir.

**c)** $A \in S$ olsun. $A \subseteq \overline{A}$ olduğundan $\overline{A} \in S$ dir.

**d)** $A_1, A_2, ---, A_n \in S$ olsun. Buna göre $S$ süzgeç olduğundan sağdaki ifadeleri yazabiliriz.

- $A_1 \cap A_2 \in S$
- $(A_1 \cap A_2) \cap A_3 = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \in S$
- $(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cap A_4 = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \in S$

$\dots$

- $\underbrace{A_1 \cap A_2 \cap --- \cap A_n}_{\neq \emptyset} \in S \Rightarrow \bigcap_{k=1}^{n} A_k \neq \emptyset$

**e)** $A \in S$ ve $B \subseteq X$ olsun. Buna göre $A \subseteq A \cup B$ olacağından ve $S$ de $X$ üzerinde bir süzgeç olduğundan

$$A \in S \text{ ve } A \subseteq A \cup B \Rightarrow A \cup B \in S \text{ dir}$$

**f)** Bu seçenek e- seçeneğinin özel halidir.

**Ör:** $X \neq \emptyset$ olmak üzere $S = \{X\}$ sınıfı verilsin. Buna göre, $S$ sınıfının $X$ üzerinde bir süzgeç old. gösteriniz.

i) $\emptyset \notin S$ ve $S \neq \emptyset$ dir.

ii) $A, B \in S$ olsun. $A, B \in S \Rightarrow A = B = X$

$\Rightarrow A \cap B = X \cap X = X$

$\Rightarrow A \cap B = X \in S$

iii) $A \in S$ ve $A \subseteq B \subseteq X$ olsun.

$A \in S$ ve $A \subseteq B \Rightarrow A = X$ ve $A \subseteq B$

$\Rightarrow X \subseteq B$

$\Rightarrow B = X$, ( $X$ evrensel küme old), $B \subseteq X$ tir.

$\Rightarrow B \in S$ dir.

bu üç şart sağlandığından $S = \{X\}$ sınıfı $X$ üzerinde bir süzgeçtir.

**ÖDEV:** $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ üzerinde en fazla kaç tane süzgeç tanımlanabilir.

**Ör:** $X = \{a, b, c\}$ üzerindeki tüm süzgeçleri yazınız.

$S_1 = \{X\}$

$S_2 = \{X, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}\}$

$S_3 = \{X, \{b\}, \{b,c\}, \{b,a\}\}$

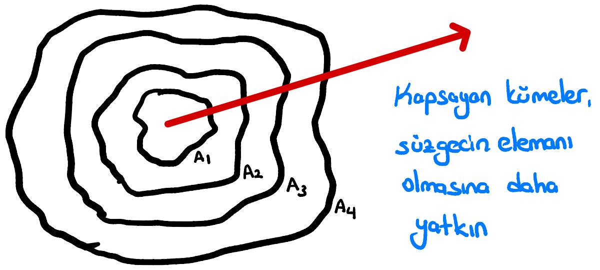
$S_4 = \{X, \{c\}, \{c,a\}, \{c,b\}\}$

$S_5 = \{X, \{a,b\}\}$

$S_6 = \{X, \{a,c\}\}$

$S_7 = \{X, \{b,c\}\}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{i) } \emptyset \notin S,\ S \neq \emptyset \\ \text{ii) } A, B \in S \Rightarrow A \cap B \in S \\ \text{iii) } A \in S \text{ ve } A \subseteq B \Rightarrow B \in S \end{array}}$$




$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq A_4$

$\underline{A_1 \in S} \Rightarrow A_2 \in S \Rightarrow A_3 \in S \Rightarrow A_4 \in S$

referans küme

**ÖDEV:** $X = \{a, b, c, d\}$ üzerindeki tüm süzgeçleri yazınız.

## ⊛ Süzgecin Tabanı :

$X \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere $S$ ailesi $X$ üzerinde bir süzgeç ve $\beta \subseteq S$ olsun. Eğer herhangi $A \in S$ için $B \subseteq A$ olacak şekilde $B \in \beta$ varsa $\beta$ ailesine $S$ süzgecinin bir bazı (tabanı) denir.

⊛ $\beta$ ailesi $S$ süzgecinin bir bazıdır $\Longleftrightarrow$ i. $\emptyset \notin \beta$

ii. $B_1, B_2 \in \beta$ için $\exists B_3 \in \beta \ni, B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

⊛ $\gamma \subseteq S$ ailesi verilmiş olsun. Eğer $\gamma$ ailesinin bütün elemanlarının sonlu arakesitlerinin ailesi $S$ için bir baz ise $\gamma$ ailesine $S$ süzgecinin bir alt bazı denir.

**Ör:** $f: X \longrightarrow Y$ fonksiyonu verilsin ve $\mathcal{B}$ ailesi $X$ üzerinde bir süzgeç tabanı ise buna göre

$$\mathcal{B}^* = \{ f(B) \subseteq Y \mid B \in \mathcal{B} \}$$

sınıfı da $Y$ üzerinde süzgeç tabanıdır. Gösteriniz.

i) $\mathcal{B}$ ailesi $X$ üzerinde bir süzgeç tabanı olduğundan $\emptyset \notin \mathcal{B}$ dir. Dolayısıyla

$$\forall B \in \mathcal{B} \text{ için } B \neq \emptyset \Rightarrow f(B) \neq \emptyset$$
$$\Rightarrow \emptyset \notin \mathcal{B}^* \text{ yazılabilir.}$$

ii) $A_1, A_2 \in \mathcal{B}^*$ olsun. Buna göre

$$A_1, A_2 \in \mathcal{B}^* \Rightarrow \exists B_1, B_2 \in \mathcal{B}, \quad A_1 = f(B_1),\ A_2 = f(B_2)$$

yazılabilir. $\mathcal{B}$ ailesi $X$ üzerinde bir süzgeç bazı olduğundan

$$B_1, B_2 \in \mathcal{B} \text{ için } \exists B_3 \in \mathcal{B} \text{ vardır } \ni, \ B_3 \subseteq B_1 \cap B_2 \text{ dir.}$$

Buna göre $A_3 = f(B_3)$ dersek $A_3 \in \mathcal{B}^*$ olacaktır ve

$$\left.\begin{aligned} B_3 \subseteq B_1 \cap B_2 &\Rightarrow f(B_3) \subseteq f(B_1 \cap B_2) \subseteq f(B_1) \cap f(B_2) \\ &\Rightarrow f(B_3) \subseteq f(B_1) \cap f(B_2) \\ &\Rightarrow A_3 \subseteq A_1 \cap A_2,\ A_3 \in \mathcal{B}^* \end{aligned}\right\}$$

yazılabilir. O halde $\mathcal{B}^*$ ailesi $Y$ üzerinde süzgeç tabanıdır.

**Ör→** $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi üzerinde
$$\mathcal{B} = \{ B_n = \{n, n+1, n+2, \dots\} \mid n \in \mathbb{N} \}$$
sınıfının bir süzgeç tabanı olduğunu gösteriniz.

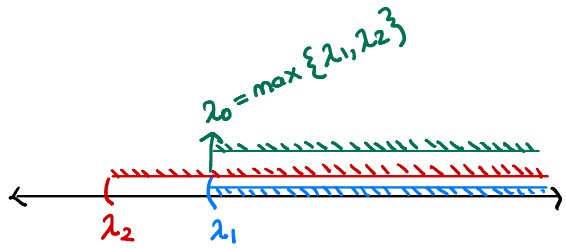
i) $\mathbb{N} \neq \emptyset$ olduğundan $B_n \neq \emptyset \Rightarrow \emptyset \notin \mathcal{B}$

ii) $\forall B_m, B_n \in \mathcal{B}$ için eğer $p = \max\{m, n\}$ dersek
$$B_p = \{p, p+1, p+2, \dots\} \in \mathcal{B}$$
olacaktır ve buna göre
$$B_p = B_m \cap B_n \Rightarrow B_p \subseteq B_m \cap B_n \quad , \; B_p \in \mathcal{B}$$
yazılabilir. O halde $\mathcal{B}$ ailesi $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi için bir süzgeç bazıdır. Aslında $\mathcal{B}$ ailesi
$$S = \{ A \subseteq \mathbb{N} \mid A^c \text{ sonlu} \}$$
Fréchet süzgeci için bir bazdır.

**Ör→** $\mathbb{R}$ üzerinde $\mathcal{B} = \{ A_\lambda = (\lambda, \infty) \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$ ailesinin bir süzgeç tabanı olduğunu gösteriniz.

i) $\mathbb{R} \neq \emptyset$ olduğundan $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $A_\lambda \neq \emptyset \Rightarrow \emptyset \notin \mathcal{B}$ dir.

ii) $\forall A_{\lambda_1}, A_{\lambda_2} \in \mathcal{B}$ için
$$A_{\lambda_1} = (\lambda_1, \infty)$$
$$A_{\lambda_2} = (\lambda_2, \infty)$$




şeklindedir. Eğer $\lambda_0 = \max\{\lambda_1, \lambda_2\}$ dersek $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ olacağı için $A_{\lambda_0} \in \mathcal{B}$ olacaktır. Buna göre
$$A_{\lambda_0} = A_{\lambda_1} \cap A_{\lambda_2} \Rightarrow A_{\lambda_0} \subseteq A_{\lambda_1} \cap A_{\lambda_2}, \quad A_{\lambda_0} \in \mathcal{B}$$
yazılabilir. O halde $\mathcal{B}$ ailesi $\mathbb{R}$ için bir süzgeç tabanıdır.

ÖDEV: $\mathbb{R}$ üzerinde $\mathcal{B} = \{ A_\lambda = (-\infty, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$ ailesinin bir süzgeç tabanı olduğunu gösteriniz.

ÖR: $(X, \tau)$ topolojik uzay ve $\beta$ sınıfı da bu uzayda bir süzgeç tabanı olsun. Buna göre $\mathcal{A} = \{ \overline{B} \mid B \in \beta \}$ sınıfının da $X$ üzerinde bir süzgeç tabanı olduğunu gösteriniz.

$\beta$ sınıfı $X$ üzerinde bir süzgeç tabanı olsun. Buna göre,

⊛ $\emptyset \notin \beta$

⊛ $B_1, B_2 \in \beta$ için $\exists B_3 \in \beta \ni, \ B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ --- $(*)$

yazılabilir. Buna göre $\mathcal{A}$ sınıfının $X$ uzayı üzerinde bir süzgeç tabanı olduğunu gösterelim.

i) $\forall A \in \mathcal{A}$ için $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \exists B \in \beta \ni A = \overline{B} \supseteq B \neq \emptyset$

$$\Rightarrow A \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow \emptyset \notin \mathcal{A} \text{ dır.}$$

Ayrıca $\beta \neq \emptyset$ old $\mathcal{A} \neq \emptyset$ olduğunu kolaylıkla görebiliriz.

ii) $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ olsun. Buna göre

$$A_1, A_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow \exists B_1, B_2 \in \beta \text{ için } A_1 = \overline{B_1} \text{ ve } A_2 = \overline{B_2}$$

yazılabilir. Ayrıca $(*)$ dan $B_1, B_2 \in \beta$ için $\exists B_3 \in \beta \ni, \ B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ yazılabilir. Biz şimdi $A_3 = \overline{B_3}$ dersek $A_3 \in \mathcal{A}$ olacağı açıktır ve

$$B_3 \subseteq B_1 \cap B_2 \Rightarrow \overline{B_3} \subseteq \overline{B_1 \cap B_2} = \overline{B_1} \cap \overline{B_2}$$

$$\Rightarrow \overline{B_3} \subseteq \overline{B_1} \cap \overline{B_2}$$

$$\Rightarrow A_3 \subseteq A_1 \cap A_2, \ A_3 \in \mathcal{A}$$

yazılabilir ki bu da $\mathcal{A}$ sınıfının $X$ üzerinde süzgeç tabanı olduğunu gösterir.

ÖDEV: Bir topoloji tabanın genellikle bir süzgeç tabanı olmadığını gösteriniz.

## ⊛ Yakınsak Süzgeç

$(X,\tau)$ bir topolojik uzay ve $S$ ailesi de $X$ üzerinde bir süzgeç olsun. Eğer $S$ süzgeci $x\in X$ noktasının $N(x)$ komşuluklar ailesinden daha ince ise yani $N(x)\subseteq S$ ise, $S$ süzgeci $x$ noktasına yakınsıyor denir ve bu durum $S\longrightarrow x$ ve $\lim S = x$ ile gösterilir.

⊛ $S\longrightarrow x \iff N(x)\subseteq S$ tir.

⊛ $\beta$ ailesi $X$ üzerinde bir süzgeç tabanı olsun. Eğer $\beta$ nın ürettiği süzgeç $x$ noktasına yakınsıyor ise $\beta$ süzgeç tabanı da $x$ noktasına yakınsıyor denir. Bu durum $\beta\longrightarrow x$ ile gösterilir.

⊛ $\beta\longrightarrow x \iff \forall N\in N(x),\ B\subseteq N$ o.ş. $B\in\beta$ vardır.

ÖRN: $(X,\tau)$ topolojik uzay, $x\in X$ ve $A\subseteq X$ olsun. Buna göre $x\in\overline{A} \iff A$ da bir süzgeç tabanı vardır ki $\beta\longrightarrow x$ dır. Gösteriniz.

$(\Rightarrow)$: Kabul edelim ki $x\in\overline{A}$ olsun.

$$x\in\overline{A} \Rightarrow \forall N\in N(x),\quad A\cap N\neq\emptyset \quad --- (*)$$

yazılabilir. Buna göre, $\beta=\{A\cap N \mid N\in N(x)\}$ sınıfının $A$ da süzgeç tabanı olduğunu gösterelim.

i) $\forall B\in\beta$ için $B\in\beta \Rightarrow \exists N\in N(x)\ \ni,\ B=A\cap N\neq\emptyset$, ((*) dan dolayı),

yazılabilir. Buna göre $\forall B\in\beta,\ B\neq\emptyset \Rightarrow \emptyset\notin\beta$ dır.

(Ayrıca $X\in N(x)$ olup $A\cap X = A\in\beta$ old. $\beta\neq\emptyset$ dır.)

ii) $\forall B_1, B_2 \in \beta$ için

- $B_1 \in \beta \Rightarrow \exists N_1 \in N(x), \quad B_1 = A \cap N_1$ --- (**)
- $B_2 \in \beta \Rightarrow \exists N_2 \in N(x), \quad B_2 = A \cap N_2$ --- (***)

yazılabilir. Ayrıca $N_1, N_2 \in N(x)$ ise $N_1 \cap N_2 \in N(x)$ tir. Çünkü

$$\left.\begin{array}{l} N_1 \in N(x) \Rightarrow \exists G_1 \in \tau, \quad x \in G_1 \subseteq N_1 \\ N_2 \in N(x) \Rightarrow \exists G_2 \in \tau, \quad x \in G_2 \subseteq N_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} G_1 \cap G_2 \in \tau \text{ dur ve} \\ \quad x \in G_1 \cap G_2 \subseteq N_1 \cap N_2 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow N_1 \cap N_2 \in N(x)$$

yazılabilir. Şimdi (**) ve (***) eşitliğini kullanırsak

$$\begin{aligned} B_1 \cap B_2 &= (A \cap N_1) \cap (A \cap N_2) \\ &= (A \cap A) \cap (N_1 \cap N_2) \\ &= A \cap (N_1 \cap N_2) \quad , \quad N_1 \cap N_2 \in N(x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow B_1 \cap B_2 \in \beta \quad , \quad \underbrace{B_1 \cap B_2}_{\in \beta} \subseteq B_1 \cap B_2$$

yazılabilir. O halde i ve ii koşulları sağlandığından $\beta$ ailesi $A$ kümesi üzerinde süzgeç tabanıdır. Bu tabana göre

$\forall N \in N(x), \quad B = A \cap N \subseteq N \quad , \quad B \in \beta$ yazılabilir $\Rightarrow \beta \to x$ tir.

($\Leftarrow$): $A$ kümesi üzerinde $\beta \to x$ olacak şekilde süzgeç tabanı var olsun. Buna göre,

$\beta \to x \Rightarrow \forall N \in N(x), \quad \emptyset \neq B \subseteq N$ oş $B \in \beta$ vardır. Ayrıca $\beta$ $A$ üzerinde süzgeç tabanı olduğundan $B \subseteq A$ dır. Buna göre

$\forall N \in N(x)$ için $\quad \emptyset \neq B = B \cap B \subseteq A \cap N$

$\Rightarrow \forall N \in N(x)$ için $A \cap N \neq \emptyset$

$\Rightarrow x \in \overline{A}$ elde edilir.

ÖR: $(X,\tau)$ topolojik uzay ve $A\subseteq X$ olmak üzere $(A,\tau_A)$ da alt uzay olsun. Ayrıca $c\in A$ ve $\beta$ sınıfı da $A$ üzerinde süzgeç tabanı olsun. Buna göre;

$\beta \xrightarrow[X]{} c$ ($\beta$, $X$ üzerinde $c$ değerine yakınsar)

$\Longleftrightarrow$ $\beta \xrightarrow[A]{} c$ ($\beta$, $A$ üzerinde $c$ değerine yakınsar)

olduğunu gösteriniz.

Öncelikle şunları belirtelim.

- $X$ uzayı üzerinde $c$ noktasının komşuluklarının sınıfı
$$N(c)=\{N\subseteq X \mid c\in G\subseteq X,\ G\in\tau\}$$ dir.
- $A$ uzayı üzerinde $c$ noktasının komşuluklarının sınıfı
$$N_A(c)=\{N_A=N\cap A \mid N\in N(c)\}$$ dir.

Bu hatırlatmadan sonra sorunun çözümüne dönelim.

$(\Rightarrow)$: $\beta \xrightarrow[X]{} c$ olsun.

$\beta \xrightarrow[X]{} c \Rightarrow \forall N\in N(c),\ B\subseteq N$ oş $B\in\beta$ vardır ---(*)

Ayrıca $\beta$ sınıfı $A$ üzerinde süzgeç tabanı olduğundan $\forall B\in\beta,\ B\subseteq A$ ---(**)
yazılabilir. (*) ve (**) beraber düşünüldüğünde

$\forall N\in N(c),\ \exists B\in\beta \ni,$

$$\left.\begin{array}{l} B\subseteq N \\ B\subseteq A \end{array}\right\} \Rightarrow B\cap B\subseteq N\cap A$$
$$\Rightarrow B\subseteq N\cap A = N_A\in N_A(c)$$

yazılabilir ki bu da

$\forall N_A\in N_A(c),\ \exists B\in\beta \ni,\ B\subseteq N_A$ dır.

$\Rightarrow \beta \xrightarrow[A]{} c$ elde edilir.

$(\Leftarrow)$: $\beta \xrightarrow[A]{} c$ olsun. Buna göre

$$\beta \xrightarrow[A]{} c \Rightarrow \forall N_A \in N_A(c),\ \exists B \in \beta \ \ni,\ B \subseteq N_A$$

$$\Rightarrow \forall N \in N(c),\ \exists B \in \beta \ \ni,\ B \subseteq N \cap A \subseteq N$$

$$\Rightarrow \forall N \in N(c),\ \exists B \in \beta \ \ni,\ B \subseteq N$$

$$\Rightarrow \beta \xrightarrow[X]{} c$$ elde edilir.

Ör. $X$ üzerinde $\tau = \{X, \emptyset\}$ ayrık olmayan topolojisi verilsin. Buna göre $X$ üzerindeki bir $\beta$ süzgeç bazı $X$ uzayının her noktasına yakınsar. Gösteriniz.

$x \in X$ keyfi bir nokta olsun. Buna göre $x \in X$ noktasının sadece $N = X$ komşuluğu vardır. Ayrıca $\beta$, $X$ üzerinde bir süzgeç bazı olduğundan $\forall B \in \beta$, $B \subseteq X$ tir. Buna göre

$$\forall N \in N(x) \text{ için } N \in N(x) \Rightarrow N = X$$

$$\Rightarrow \exists B \in \beta,\ B \subseteq N = X$$

$$\Rightarrow \beta \longrightarrow x$$

yazılabilir. Ayrıca $x \in X$ noktasını keyfi olarak düşünmüştük. O halde $\beta \longrightarrow \forall x \in X$ elde edilir ki istenilen gösterilmiş olur.

Ör. $X$ üzerinde $\tau = P(X)$ ayrık topolojisi verilsin ve $X$ üzerinde bir $\beta$ süzgeç bazı verilsin. Buna göre, $x \in X$ olmak üzere

$$\beta \longrightarrow x \iff \{x\} \in \beta$$ dır. Gösteriniz.

$(\Rightarrow)$: $\beta \longrightarrow x$ olsun. Buna göre

$$\beta \rightarrow x \Rightarrow \forall N \in N(x),\ \exists B \in \beta \ \ni,\ B \subseteq N \quad \text{--- } (*)$$

yazılabilir. Ayrıca $\tau = P(X)$ olduğundan $\{x\} \in \tau$ dur ve $x \in \{x\}$ olduğu da açıktır. O halde $x \in \{x\} \in \tau \Rightarrow \{x\} \in N(x)$ olur. Buna göre,

(*) dan $\exists B \in \beta$ için $B \subseteq \{x\}$ yazılabilir. Buna göre

$$B \in \beta \text{ ve } B \subseteq \{x\} \Rightarrow \emptyset \neq B \subseteq \{x\}$$
$$\Rightarrow B = \{x\} \in \beta$$

elde edilir.

$(\Leftarrow)$: $\{x\} \in \beta$ olsun. Buna göre

$$\forall N \in N(x) \text{ için } N \in N(x) \Rightarrow \exists G \in \tau \ni, \ x \in G \subseteq N$$
$$\Rightarrow \exists G \in \tau \ni, \ x \in \{x\} \subseteq G \subseteq N$$
$$\Rightarrow \{x\} \subseteq N$$

yazılabilir. Yani

$$\forall N \in N(x) \text{ için } \{x\} \subseteq N \text{ ve } \{x\} \in \beta \Rightarrow \beta \longrightarrow x \text{ elde edilir.}$$