ÖRNEK $X = \{a, b, c, d, e, f\}$

$\tau = \{\phi, X, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e,f\}\}$ olsun.

(X,τ) uzayının T_0- uzay olmadığını göst.

$c \neq d$ ayrıca

$N(c) = \{K \subseteq X \mid \{c,d\} \subseteq K\}$ (c'i içeren en dar açık)

$N(d) = \{K \subseteq X \mid \{c,d\} \subseteq K\}$

$N(c) = N(d) \Rightarrow (X,\tau)$ T_0- değildir.

ÖRNEK: X sonsuz bir küme o.ü

$\tau = \{G \subseteq X \mid G^c \text{ sonlu}\} \cup \{\phi\}$ olsun. (X,τ) T_0-uzayıdır. Göst.

$x \neq y$ ve $x,y \in X$ olsun.

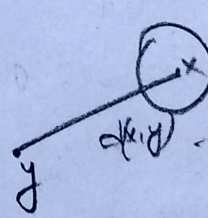
$x \in \{y\}^c = X - \{y\}$ dir. Ayrıca

$(\{y\}^c)^c = \{y\}$ sonludur. O halde $x \in \{y\}^c \in \tau \Rightarrow \{y\}^c \in N(x)$

$y \notin \{y\}^c \Rightarrow (X,\tau)$ T_0-uzaydır.

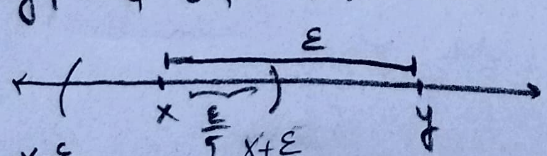
ÖRNEK: $(\mathbb{R},\tau)$ alışılmış uzayı T_0-dır. Göst.

$x \neq y$ ve $x,y \in \mathbb{R}$.



metrikte

$|x-y| = \varepsilon$ o.ş $\varepsilon > 0$ var.



$x \in \left(x-\frac{\varepsilon}{5}, x+\frac{\varepsilon}{5}\right) \in \tau \Rightarrow \left(x-\frac{\varepsilon}{5}, x+\frac{\varepsilon}{5}\right) \in N(x)$

$\Rightarrow y \notin \left(x-\frac{\varepsilon}{5}, x+\frac{\varepsilon}{5}\right)$

$\Rightarrow (\mathbb{R},\tau)$, T_0-uzaydır.

T_0- uzayı

(X,τ) bir top. uzay olsun.

X T_0-uzayıdır $\Leftrightarrow$ $x \neq y$ o.ş $\forall x,y \in X$ için

$\exists N_x \in N(x) \ni y \notin N_x$ ya da

$\exists N_y \in N(y) \ni x \notin N_y$

ÖRNEK: $(X, \tau=\{\emptyset, X\})$ uzayı T_0-uzayı mıdır?

$x \neq y$ olsun. $N(x)=\{K \subseteq X \mid x \in G \subseteq K, G \in \tau\}$

$$\left.\begin{array}{l} N(x)=\{X\} \\ N(y)=\{X\} \end{array}\right\} \Rightarrow N(x)=N(y)$$

$\therefore$ X, T_0-uzayı değildir.

Örnek: $(X, \tau=P(X))$ uzayı T_0-mıdır?

$x \neq y$ ve $x,y \in X$ olsun.

$x \in \{x\} \in \tau \Rightarrow \{x\} \in N(x)$ ve $y \notin N(x)$

$\therefore$ (X,τ) T_0-uzaydır.

ÖRNEK: $X=\{a,b,c,d\}$

$\tau=\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}$

olsun. (X,τ) uzayının T_0-uzay old. göst.

$a \in \{a\} \in \tau \Rightarrow \{a\} \in N(a)$, $b,c,d \notin \{a\}$

$b \in \{b\} \in \tau \Rightarrow \{b\} \in N(b)$, $c,d \notin \{b\}$

$c \in \{a,c\} \in \tau \Rightarrow \{a,c\} \in N(c)$, $d \notin \{a,c\}$

O halde (X,τ) T_0-uzayıdır.

T_1 - uzayı

(X,τ) top. uzay olsun. (X,τ) T_1-uzayıdır.

$\Leftrightarrow$ $x \neq y$ o.ş $\forall x,y \in X$ için $\exists N_x \in N(x)$ ve $\exists N_y \in N(y)$

$\ni$ $y \notin N_x$ ve $x \notin N_y$

Her T_1-uzay aynı zamanda T_0-uzaydır.

Örnek: (X,τ) bir top. uzay olsun. (X,τ) T_1-uzayıdır.

$\Leftrightarrow$ $\forall x \in X$ için $\{x\}$ kapalıdır. Göst.

$(\Rightarrow:)$ X T_1-uzay olsun. $x \in X$ olsun. $\{x\}$ kapalı old göst.

$\{x\}^c \in \tau$ old. gösterelim.

$y \in \{x\}^c \Rightarrow x \neq y \Rightarrow \begin{matrix} \exists N_x \in N(x) \\ \exists N_y \in N(y) \end{matrix} \ni \begin{matrix} y \notin N_x \\ x \notin N_y \end{matrix}$ (X T_1-uzay old. dan)

$\{x\} \cap N_y = \emptyset \Rightarrow N_y \subseteq \{x\}^c$

$\Rightarrow \exists G_y \in \tau \ni, y \in G_y \subseteq N_y \subseteq \{x\}^c$

$\Rightarrow \exists G_y \in \tau$ için $\ni$ $y \in G_y \subseteq \{x\}^c$

$\Rightarrow y \in (\{x\}^c)^\circ$

$\Rightarrow \{x\}^c \subseteq (\{x\}^c)^\circ \Rightarrow (\{x\}^c)^\circ = \{x\}^c \Rightarrow \{x\}^c$ açık $\Rightarrow \{x\}$ kapalı.

$(\Leftarrow)$ $\forall x \in X$, $\{x\}$ kapalı olsun.

$x \neq y$ ve $x,y \in X$ olsun. $\{x\}$ ve $\{y\}$ kapalıdır.

$\Rightarrow \{x\}^c, \{y\}^c \in \tau$

$y \in \{x\}^c \in \tau$ $\ni$, $\{x\}^c \in N(y)$ $\ni$ $x \notin \{x\}^c$

$x \in \{y\}^c \in \tau$ $\quad$ $\{y\}^c \in N(x)$ $\quad$ $y \notin \{y\}^c$

$\therefore$ X, T_1-uzaydır

(*) Bir metrik uzayda her tek nokta kümesi kapalı old. dan bir metrik uzay aslında T_1-uzayıdır.

ÖRNEK: $X = \{a,b,c,d\}$ kümesi üz. de

$\tau = \{ \emptyset, X, \{a,b,c\}, \{b,c\}, \{b\} \}$ olsun.

(X,τ), T_1- uzay mı?

(X,τ) uzayının kapalı kümelerinin sınıfı

$\mathcal{K} = \{ X, \emptyset, \{d\}, \{a,d\}, \{a,c,d\} \}$

$c \in X$ $\{c\} \subseteq X$ kapalı değil.

$\therefore$ (X,τ), T_1- uzay değildir. (önceki sorudan)

T_2 - Uzayı (Hausdorff Uzay)

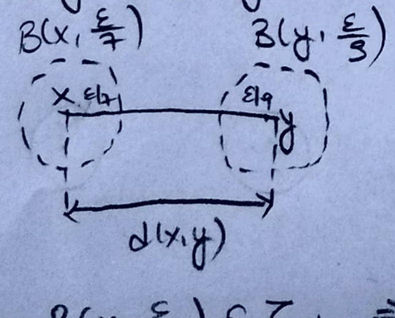
(X,τ) uzayı T_2- uzayıdır $\Leftrightarrow$ $x \neq y$ o.ş $\forall x,y \in X$ için

$N_x \cap N_y = \emptyset$ o.ş $N_x \in N(x)$
$N_y \in N(y)$

ÖRNEK: Her metrik uzayın bir Hausdorff uzay old. göst.

(X,d) bir metrik uzay olsun.

$x \neq y$ ve $x,y \in X$ olsun.



$x \neq y \Rightarrow d(x,y) \neq 0$

$\Rightarrow d(x,y) = \varepsilon$ o.ş $\varepsilon > 0$ var.

$x \in B(x, \frac{\varepsilon}{7}) \in \tau_d \Rightarrow B(x, \frac{\varepsilon}{7}) \in N(x)$

$y \in B(y, \frac{\varepsilon}{9}) \in \tau_d \Rightarrow B(y, \frac{\varepsilon}{9}) \in N(y)$

$B(x,\frac{\varepsilon}{7}) \cap B(y,\frac{\varepsilon}{9}) = \phi$ dır. Çünkü bu iki komşuluk ayrık olmasaydı

$$B(x,\frac{\varepsilon}{7}) \cap B(y,\frac{\varepsilon}{9}) \neq \phi$$

$\Rightarrow \exists z \in B(x,\frac{\varepsilon}{7}) \cap B(y,\frac{\varepsilon}{9})$

$\Rightarrow z \in B(x,\frac{\varepsilon}{7})$ ve $z \in B(y,\frac{\varepsilon}{9})$ dir.

$z \in B(x,\frac{\varepsilon}{7}) \Rightarrow d(x,z) < \frac{\varepsilon}{7}$

$z \in B(y,\frac{\varepsilon}{9}) \Rightarrow d(z,y) < \frac{\varepsilon}{9}$

$$\left.\begin{aligned} d(x,y) &\leq d(x,z) + d(z,y) \\ &< \frac{\varepsilon}{7} + \frac{\varepsilon}{9} \\ &= \frac{16\varepsilon}{63} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\Rightarrow d(x,y) < \frac{16\varepsilon}{63} \\ &\Rightarrow \varepsilon < \frac{16\varepsilon}{63} \\ &\Rightarrow 1 < \frac{16}{63} \quad \# \text{ çelişki} \end{aligned}$$

O halde $B(x,\frac{\varepsilon}{7}) \cap B(y,\frac{\varepsilon}{9}) = \phi$ olmalıdır.

$\therefore$ (X,d) bir T_2-uzaydır.

<u>ÖRNEK</u>: X sonsuz bir küme

$$\tau = \{ G \subseteq X \mid G^c \text{ sonlu} \} \cup \{\phi\} \quad \text{olsun.}$$

(X,τ) bir Hausdorff uzayı olmadığını gösterin.

Kabul edelim ki (X,τ) Hausdorff olsun.

$x \neq y$, $x,y \in X$ için $N_x \cap N_y = \phi$ o.ş. $N_x \in N(x)$ ve $N_y \in N(y)$ vardır. $N_x \in N(x) \Rightarrow \exists G_x \in \tau \ni x \in G_x \subseteq N_x \Rightarrow N_x^c \subseteq \underbrace{G_x^c}_{\text{sonlu}} \Rightarrow N_x^c$ sonlu

$N_y \in N(y) \Rightarrow \exists G_y \in \tau \ni y \in G_y \subseteq N_y \Rightarrow N_y^c \subseteq \underbrace{G_y^c}_{\text{sonlu}} \Rightarrow N_y^c$ sonlu

$N_x \cap N_y = \phi \Rightarrow (N_x \cap N_y)^c = \phi^c$

$$\Rightarrow \underbrace{N_x^c}_{\text{sonlu}} \cup \underbrace{N_y^c}_{\text{sonlu}} = \underbrace{X}_{\text{sonlu}} \quad \# \text{ (Çelişki)}$$

$\therefore$ (X,τ) Hausdorff uzay değildir.

<u>ÖRNEK</u> : $(X, \tau = P(X))$ T_2-uzayıdır. Göst.

$x \neq y$ ve $x, y \in X$

$x \in \{x\} \in \tau \Rightarrow \{x\} \in N(x)$

$\Rightarrow \{x\} \cap \{y\} = \emptyset$

$y \in \{y\} \in \tau \Rightarrow \{y\} \in N(y)$

X bir T_2-uzaydır.