

FİZİKTE MATEMATİK METOTLAR PANDEMİ FİNAL ÖDEVİ

Prof. Dr. Özlem YEŞİLTAS

16.06.2021

Diferansiyel Denklemler

1. Bir $\hat{L}$ işlemcisinin u ile verilen fonksiyonlara olan etkisi $\hat{L}u = \frac{du}{dx}$ ise, $\hat{L}$ işlemcisinin Hermisyeni olan $L^\dagger$ nedir ? Sınır şartları: $u(0) = 2u(1)$ ve $x \in [0,1]$.

2. A) Aşağıda verilen Sturm-Liouville problemi $[0,1]$ aralığında, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$ şeklinde sınır değerlere sahip ve

$$xy''(x) + y'(x) + \lambda x^2 y(x) = 0$$

Olduğuna göre, özfonksiyonların normalize edilmesi için gerekli olan ağırlık fonksiyonu nedir?

- B) $-\phi''(x) = \lambda \phi(x)$, $\phi(0) = \phi'(1) = 0$ ile verilen problemde

1. $n=1,2,\dots$ için problemi çözerek özdeğer ve özfonksiyonları bulunuz?

- 2- Ortogonalite bağıntısını yazınız?

- 3- $f(x) \in [0,1]$ ve $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x)$ ise yukarıdaki SL probleminin çözümleri olan özfonksiyonlarıdır ve c_n katsayılarını hesap etmemizi sağlayacak olan bağıntıyı bulunuz?

- 3- $3x^2 y''(x) + 2xy'(x) + x^2 y(x) = 0$ ile verilen diferansiyel denklem için:

- a) $x = 0$ bir singüler (tekil) nokta mıdır yoksa adi nokta mıdır? Neden?

- b) Frobenius metodunu kullanarak, $y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, indissel denklemi, köklerini ve kök r 'nin en büyük değeri için ilk 3 sıfırdan farklı terimi hesap ederek, bu denklemin seri çözümlerini bulunuz?

- 4- J_0 , sıfırıncı mertebeden ve 1. Tip Bessel fonksiyonu ise, $\int_0^\lambda x J_0(x) dx = ?$

$$\lambda > 0$$

- 5) a) $P_n(x)$ Legendre polinomları ve $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$ Rodrigues bağıntısını kullanarak, $P_0(x), P_1(x), P_2(x)$ ilk 3 polinomu hesaplayınız?

- b) Önce $P'_{\ell+1}(x) - P'_{\ell-1}(x) = (2\ell + 1)P_\ell(x)$ ile verilen bağıntıyı ispat ettikten sonra,

$$\int_0^1 P_\ell(x) dx = \frac{P_{\ell-1}(0) - P_{\ell+1}(0)}{2\ell+1}, \quad \ell \geq 1$$

olduğunu gösteriniz?

6- Aşağıda verilen lineer denklem sistemi

$$x'(t) = y(t)$$

$$y'(t) = \frac{3}{t^2}x(t) + \frac{1}{t}y(t), t \in (0, \infty)$$

İçin $\vec{u} = \begin{bmatrix} t^3 \\ 3t^2 \end{bmatrix}$ ve $\vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{1}{t} \\ -\frac{1}{t^2} \end{bmatrix}$ vektörlerinin de bu lineer denklem sisteminin çözümleri olduğunu göstererek $x(t) = ?$, $y(t) = ?$ Genel çözümlerini bulunuz?

Lineer cebir ve Vektör Analiz

7- Aşağıda verilen matrisi köşegen matris haline getiriniz?

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} -2 & 12 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

8- $\hat{A}$: 3×3 'lük , pozitif tanımlı matris ve $\hat{A}q_i = \lambda_i q_i$ olmak üzere $\{q_i, \lambda_i\}$ özvektör ve pozitif özdeğerlere sahiptir. Eğer, bu ilk üç özvektör setinin lineer kombinasyonu x şeklinde bir özvektörü veriyorsa, yani,

$$x = c_1 q_1 + c_2 q_2 + c_3 q_3$$

Buna göre aşağıdaki ifadeleri hesaplayınız?

$$x^T x = ?, \quad x^T \hat{A} x = ?$$

9- $\vec{F}(x, y, z) = [x, y, z]$ şeklinde verilen bir vektör fonksiyon, ve bir S küresi,

S: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ boyunca diverjans teoremini ispat ediniz?

10- $\phi(x, y, z) = x^2 + 4xy + 2yz^3$ için $\int_a^b \vec{\nabla} \phi \cdot \overrightarrow{d\ell} = \phi(b) - \phi(a)$ ile verilen integralin temel teoreminin sağlanıp sağlanmadığını aşağıda verilen yol boyunca kontrol ediniz?

$$a = (0,0,0), \quad b = (1,1,1)$$

$$C: (0,0,0) \rightarrow (1,0,0) \rightarrow (1,1,0) \rightarrow (1,1,1)$$